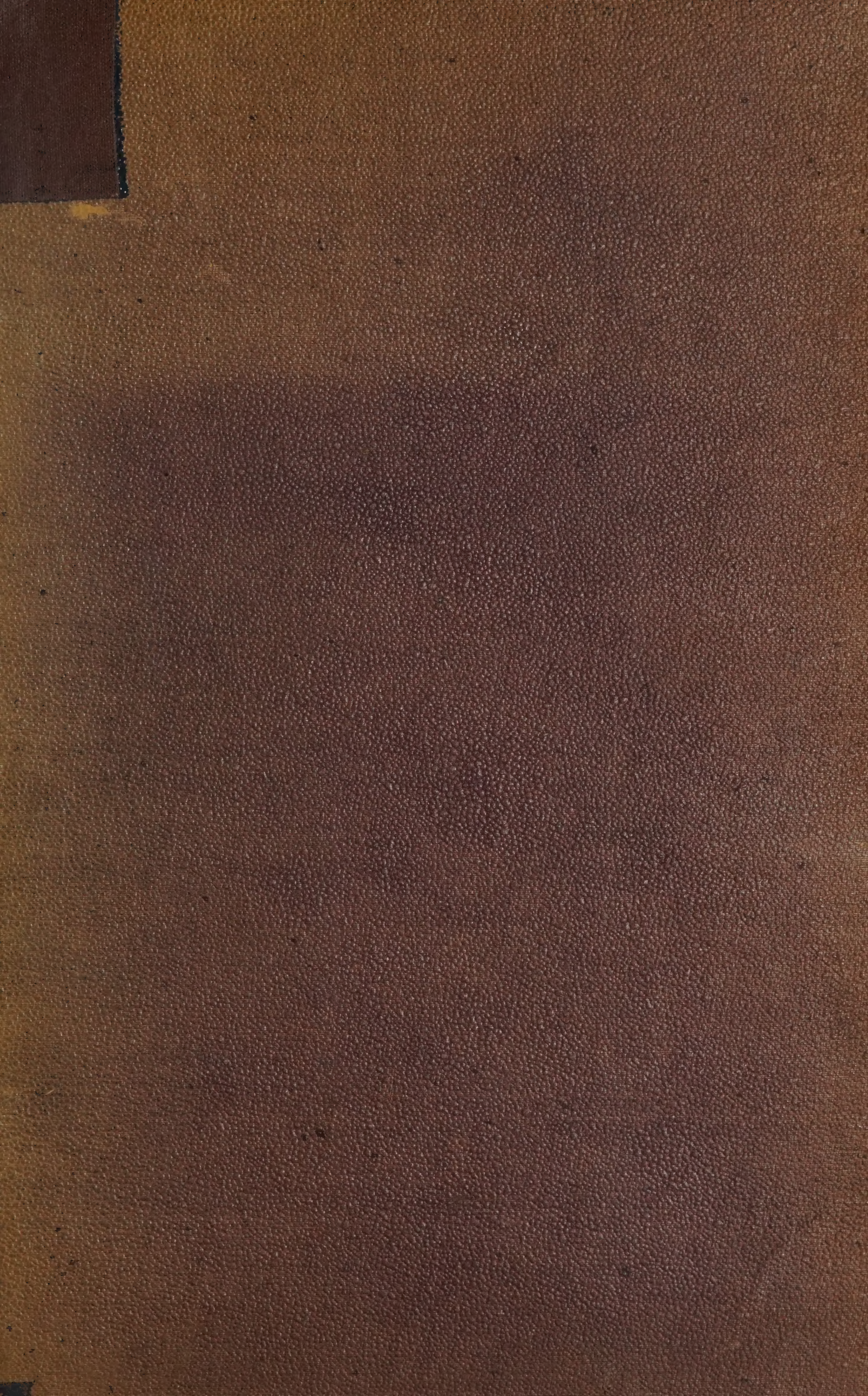


COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CALCUL INTÉGRAL.

PARTIE ÉLÉMENTAIRE.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

A L'USAGE DES PERSONNES QUI ÉTUDIENT CETTE SCIENCE,

EN VUE

DE SES APPLICATIONS MÉCANIQUES ET PHYSIQUES;

PAR J. BOUSSINESQ,
Membre de l'Institut,
Professeur de Mécanique physique à la Faculté des Sciences de Paris,
Ancien Professeur de Calcul différentiel et intégral
à la Faculté des Sciences de Lille et à l'Institut industriel du Nord.

TOME II.
CALCUL INTÉGRAL.

FASCICULE I.

PARTIE ÉLÉMENTAIRE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

TABLE DES MATIÈRES

DU SECOND VOLUME,

CONSACRÉ AU CALCUL INTÉGRAL.

(Les indications de pages et de numéros ou articles *suivies d'astérisques* renvoient au *Fascicule II,* les autres, au Fascicule I.)

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

APPLICATION DES PROCÉDÉS GÉNÉRAUX A L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES LES PLUS SIMPLES.

VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

DES INTÉGRALES DÉFINIES : NOTIONS FONDAMENTALES ET EXEMPLES DIVERS ; * FONCTION Γ.

Pages.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DÉFINIES; IDÉE DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES ET DES * FONCTIONS ELLIPTIQUES; APPLICATIONS ANALYTIQUES DES INTÉGRALES DÉFINIES.

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES INTÉGRALES DÉFINIES : QUADRATURE DES AIRES PLANES ET RECTIFICATION DES COURBES.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

CUBATURE DES VOLUMES ET QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

INTÉGRALES MULTIPLES ET LEUR USAGE ; CENTRES DE GRAVITÉ DES FIGURES ; VOLUME ET SURFACE LATÉRALE DU TRONC DE PRISME ; THÉORÈME DE GULDIN.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

*RÉDUCTION ET TRANSFORMATION DES INTÉGRALES MULTIPLES ; ÉVALUATION APPROXIMATIVE, PAR CES INTÉGRALES, DES RESTES DE CERTAINES SÉRIES, ETC.

TRENTIÈME LEÇON.

ÉTUDE DIRECTE DES INTÉGRALES DÉFINIES ET PROCÉDÉS SPÉCIAUX DE CALCUL POUR CERTAINES D'ENTRE ELLES.

TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

* EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES ET USAGE DE CES EXPRESSIONS.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

* SUITE DES CALCULS D'EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES D'INTÉGRALES DÉFINIES : SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

* DE L'EMPLOI DES INTÉGRALES DÉFINIES POUR EXPRIMER DES FONCTIONS ÉCHAPPANT GÉNÉRALEMENT AUX AUTRES MODES DE REPRÉSENTATION FOURNIS PAR L'ANALYSE : INTÉGRALES POURVUES, SOUS LES SIGNES $\int$, DE FONCTIONS ARBITRAIRES, ET DONT LES DÉRIVÉES ONT DES FORMES SIMPLES.

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

* SUITE DE L'EMPLOI DES INTÉGRALES DÉFINIES POUR EXPRIMER CERTAINES FONCTIONS : THÉORIE GÉNÉRALE DES POTENTIELS ; POTENTIELS SPHÉRIQUES.

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

* SUITE DE LA THÉORIE DES POTENTIELS : ÉTUDE SPÉCIALE DE CEUX DANS LESQUELS L'INTÉGRATION S'ÉTEND A TOUTE LA MASSE POTENTIANTE.

TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : THÉORIE DE L'ÉQUATION DU PREMIER ORDRE.

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES; MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES POUR L'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS MÊME NON LINÉAIRES.

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE LES PLUS SIMPLES.

QUARANTIÈME LEÇON.

*ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECONDS MEMBRES, SOIT D'ORDRE SUPÉRIEUR, SOIT SIMULTANÉES : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS.

QUARANTE ET UNIÈME LEÇON.

*SUITE DE L'ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS VARIABLES QUE L'ON SAIT INTÉGRER OU SOUS FORME FINIE, OU EN SÉRIE, OU PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES ; FONCTIONS CYLINDRIQUES, ETC.

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON.

*DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET DE LEUR INTÉGRATION SOUS FORME FINIE : ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON.

*SUITE DE L'INTÉGRATION, EN TERMES FINIS, DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES : ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

QUARANTE-QUATRIÈME LEÇON.

* PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, SPÉCIAUX AUX PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE QUI CONCERNENT LES CORPS DE GRANDEUR FINIE : ÉTUDE D'ÉTATS VARIABLES EN FONCTION DU TEMPS.

QUARANTE-CINQUIÈME LEÇON.

* SUITE DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE POUR LES CORPS DE DIMENSIONS FINIES : ÉTUDE D'ÉTATS PERMANENTS.

QUARANTE-SIXIÈME LEÇON.

* PROCÉDÉS D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, POUR LES CORPS D'UNE ÉTENDUE CENSÉE INFINIE : ÉQUATIONS NE CONTENANT QUE DES DÉRIVÉES D'UN MÊME ORDRE PAIR, ET QUI S'INTÈGRENT PAR DES POTENTIELS.

QUARANTE-SEPTIÈME LEÇON.

*SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE ; ÉQUATIONS OU FIGURENT DES DÉRIVÉES D'ORDRES DIFFÉRENTS ET QUI S'INTÈGRENT PAR LES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIIIe LEÇON.

QUARANTE-HUITIÈME LEÇON.

*SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE ; ÉQUATIONS QUI S'INTÈGRENT PAR L'EMPLOI SIMULTANÉ DES POTENTIELS ET DES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIIIe LEÇON.

QUARANTE-NEUVIÈME LEÇON.

*RÉSULTATS GÉNÉRAUX CONCERNANT LA NATURE DES INTÉGRALES DANS LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS OU MILIEUX INDÉFINIS ; EMPLOI DE LA FORMULE DE FOURIER POUR RÉSOUDRE CES PROBLÈMES.

CINQUANTIÈME LEÇON.

CALCUL DES VARIATIONS.

ERRATA ET ADDITIONS.

Page 3, ligne 14, en remontant, *après* « la fonction $f(x)$ », *ajouter* « supposée encore finie »; et, quatre lignes plus bas, *au lieu du mot* « encore », *lire* « néanmoins ».

Page 4, ligne 15, *au lieu de* « fonction ou continue », *lire* « fonction finie et continue ».

Page 59, ligne 3 du n° 57, *au lieu de* « quelconque m », *lire* « m, supérieur à l'unité ».

Page 64, ligne 11, *au lieu de* « dx », *lire* « du »; et ligne 8, en remontant, *au lieu de* « $\int x^{-m} dx$ », *lire* $-\int x^{-m} dx$ ».

Page 100, ligne 19, *au lieu de* « OA », *lire* « OB′ ».

Page 113, à la fin du n° 288, *ajouter, en note :*

(1) On me fait observer que cette proposition s'énonce d'une manière encore plus simple et plus facile à retenir, sous la forme suivante : *la longueur de toute ellipse dont l'excentricité n'est pas très voisine de l'unité égale sensiblement celle d'une circonférence qui aurait pour rayon la moyenne arithmétique des demi-axes, accrue de son demi-excédent sur leur moyenne géométrique.*

Page 115, lignes 5 et 6, *au lieu de* « longueur », *lire* « côté ».

Page 126, ligne 4, *ajouter, en note :*

(1) Néanmoins, ces triangles, pour être, à la limite, certainement tangents, devront y garder des côtés distincts en direction, c'est-à-dire n'avoir pas d'angle tendant vers deux droits : on prendra donc leurs sommets, sur la surface, à des distances angulaires comparables dans les divers sens, chose évidemment toujours facile.

Page 129, ligne 12, *au lieu de* « aura fait », *lire* « décrira ».

Page 163, ligne 3, indiquer la limite supérieure « ∞ » de l'intégrale.

Page 181, ligne 8, *au lieu de* « p. 231* », *lire* « p. 232* ».

Page 190, au titre du n° 374, *au lieu de* « intégrales », *lire* « intégrales générales ».

Page 198, ligne 2, *au lieu de* « $u' = f(u)$ », *lire* « $u'' = f(u)$ ».

Page 258, ligne 17, *ôter le mot* « positives ».

Page 265, à la fin du n° 494, *ajouter les phrases suivantes :*

« Observons encore que la courbe plane à aire maxima ou la surface courbe à volume maximum seront essentiellement convexes, c'est-à-dire coupées par toute droite ou tout plan sécants en deux points seulement ou suivant un seul contour : sans quoi, il suffirait de remplacer les parties en creux que détacheraient de la courbe ou de la surface une telle droite ou un tel plan, par les segments interceptés de ceux-ci, pour accroître l'aire A ou le volume V que l'on considère, tout en diminuant l'étendue C ou S de leurs limites ; conséquence évidemment impossible dans l'hypothèse du maximum.

» On reconnaît de même que la courbe à aire maxima, sur la sphère, est nécessairement convexe, ou coupée au plus en deux points par les grands cercles de la sphère, pourvu que, du moins, elle se trouve tout entière comprise dans un hémisphère et admette, par suite, comme plus courte distance entre deux quelconques de ses points, l'arc de grand cercle qui les unit. »

Et commencer le n° 495 *de cette manière :* « Les principes qui précèdent se trouvant ainsi établis, ... ».

Page 13*, dernière ligne, au dénominateur de la première fraction, *lire* « $e^h - 1$ ».

Page 21*, au dénominateur de la formule (5), *lire* « $f'(x)$ »; et, à la dernière ligne, *lire* « $f(x) = (x - c - h_1)(x - c - h_2) \ldots$ ».

Page 35*, à la première formule (21), inscrire la limite supérieure « ∞ » de l'intégrale.

Page 36*, ligne 2, en remontant, *au lieu de* « XXXe Leçon », *lire* « XXXIe Leçon ».

Page 68*, ligne 7, en remontant, *au lieu de* « il », *lire* « elle ».

Pages 106*, 107*, 108* et 109*, *au lieu de* A, *mettre partout, de préférence,* K.

Page 168*, ligne 6 en remontant, rétablir, au bas du premier signe $\int$, la limite $-\infty$.

Page 227*, ligne 2 en remontant, *au lieu de* « dz », *lire* « $z\,dz$ ».

Page 238*, ligne 4, ajouter :

« Ce faîte ou thalweg, sans être une enveloppe (sauf pour chaque *versant* considéré à part), représente donc une solution singulière et constitue en même temps le lieu des rebroussements des courbes qu'expriment les intégrales particulières. Il fournit un curieux exemple, tout à la fois : 1° de disjonction des deux propriétés de ligne-enveloppe et de lieu de rebroussements, assez ordinairement unies sur une même courbe; 2° de réunion de la qualité de solution singulière avec la même propriété de lieu de rebroussements, dont elle se trouve le plus souvent séparée ».

Page 257*, à la deuxième ligne du titre du n° 385*, *lire* « linéaire homogène ».

Page 342*, ligne 17 en remontant, *au lieu de* « tangente en ce point à l'enveloppe », *lire* « menée par ce point de l'enveloppe ».

Page 355*, ligne 6 en remontant, à la fin, *lire* « $P_1 \gtrless 0$ ».

Page 378*, ligne 18 en remontant, *au lieu de* « dérivées premières de u, qui deviennent ... », *lire* « dérivées premières de u en x, y, z, qui deviennent ... ».

Page 495*, ligne 2, *au lieu de* « que l'autre », *lire* « qu'il parvenait à l'autre ».

Page 512*, dernière ligne, *au lieu de* « développons-la », *lire* « développons-le ».

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CALCUL INTÉGRAL.

PARTIE ÉLÉMENTAIRE.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

CALCUL INTÉGRAL : DES INTÉGRALES TANT DÉFINIES QU'INDÉFINIES; INTÉGRABILITÉ DES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES.

213. — But du Calcul intégral; ce qu'on entend par intégrer une différentielle de la forme $f(x)\,dx$.

On a pu entrevoir, dès la quatrième Leçon (t. I, p. 74), que le Calcul intégral a pour but de remonter des différentielles aux fonctions et, par conséquent, de former les fonctions dont les dérivées ou les différentielles jouissent de propriétés voulues, c'est-à-dire satisfont à des conditions, à des formules données. On s'y propose donc, quand une fonction unique, y, et sa différentielle, dy, sont seules à considérer (ce qui est le cas le plus simple), d'obtenir la fonction au moyen d'une expression de ses changements infiniment petits dy, autant du moins que celle-ci la détermine. Cette opération s'appelle une *intégration* ou, plus précisément, l'intégration de l'expression donnée. Elle équivaut à réunir toutes les valeurs prises successivement par cette expression à mesure qu'ont changé avec continuité les variables à partir d'un état choisi comme primitif, valeurs constituant les différentielles dy de la fonction jusqu'à son nouvel état, ou l'infinité des accroisse-

ments infiniment petits qui y composent son accroissement graduel total, c'est-à-dire la fonction elle-même, si l'on est parti d'un état où elle fût nulle. Ainsi *intégrer,* c'est, au fond, rétablir une quantité dans sa valeur totale, dans ce qu'on peut appeler son *intégralité,* par le rapprochement, la *sommation,* des *éléments* ou parties infiniment petites qui la constituent. Ce mot se justifie donc de lui-même, comme ceux d'*intégration* et de *calcul intégral* qui en dérivent.

Nous verrons plus loin que la différentielle d'une fonction peut être donnée sous diverses formes plus ou moins complexes. Pour le moment, bornons-nous au cas le plus simple, qui est celui où la quantité inconnue ne dépend que d'une variable, x, et où sa différentielle, donnée explicitement en fonction de cette variable seule, est de la forme $f(x)\,dx$, $f(x)$ désignant, comme on voit, la fonction connue qui exprime sa dérivée. Nous représenterons par $\mathrm{F}(x)$ la fonction cherchée, ayant pour différentielle $f(x)\,dx$: on l'appelle quelquefois la *fonction primitive* de $f(x)$, par opposition à celle-ci, $f(x)$, qui en est dite, comme nous savons depuis longtemps, la *dérivée.*

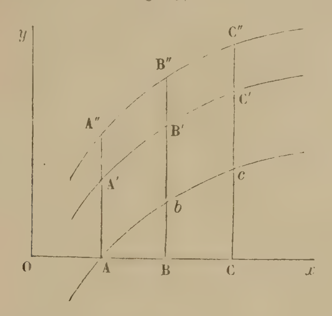
Ces dénominations sont parfaitement justes quand on aborde l'analyse infinitésimale par l'étude des courbes algébriques et des fonctions algébriques, dont les équations ou expressions finies se présentent en effet comme primitives, c'est-à-dire comme logiquement antérieures aux équations différentielles de ces courbes ou aux formules des variations infiniment petites de ces fonctions. Mais il n'en est plus de même dans d'autres questions d'Analyse ou de Géométrie pures, et surtout quand on se place au point de vue des applications physiques. En effet, *dans la nature, ce sont les différentielles, plutôt que leurs sommes, qu'on peut regarder comme primitives;* car ce sont les changements infiniment petits des quantités concrètes, c'est-à-dire les flux ou rapidités de variation, que les lois des choses déterminent immédiatement, en les réglant, il est vrai, à chaque instant, d'après l'état actuel déjà réalisé, c'est-à-dire d'après les valeurs intégrales présentes du système de quantités dont il s'agit.

214. — Existence et degré d'indétermination de la fonction dite primitive.

Remarquons qu'il existe toujours, quelle que soit la fonction donnée $f(x)$, une fonction continue $\mathrm{F}(x)$, qui répond à la question, ou dont la dérivée est $f(x)$. Pour le concevoir, imaginons que x soit, dans le plan $x\mathrm{O}y$, une abscisse horizontale variable, d'abord égale à une certaine quantité $\mathrm{OA} = a$, que nous appellerons sa *valeur initiale,*

puis indéfiniment croissante ou décroissante d'une manière continue. Cette abscisse prendra donc, successivement, des valeurs telles que OA, OB, OC,.... Menons à son extrémité mobile A, B, C,... une ordonnée verticale y, qui, après avoir eu une première valeur AA′ quelconque, grandisse ou diminue à chaque instant, ou à partir de

Fig. 42.



chaque valeur x de l'abscisse, de quantités dy égales au produit de la valeur actuelle de la fonction $f(x)$ par le transport infiniment petit dx de l'ordonnée, survenu aussitôt après. En d'autres termes, disposons de la *pente*, arbitrairement variable entre $-\infty$ et $+\infty$, qui définit la direction suivant laquelle se meut à chaque instant la seconde extrémité, A′, B′, C′,... de cette ordonnée verticale, de manière à lui faire prendre sans cesse la valeur actuelle de $f(x)$. Il est clair que, si $f(x)$ varie graduellement avec x, la seconde extrémité dont il s'agit décrira dans le plan une certaine courbe, A′B′C′..., pendant que l'ordonnée occupera successivement les positions AA′, BB′, CC′,...; et si, au contraire, la fonction $f(x)$ se trouve être discontinue, mais seulement pour des valeurs *isolées* de x, cas où la courbe tracée ne sera *bien* continue elle-même que dans l'intervalle de deux discontinuités consécutives de $f(x)$, la trajectoire tout entière de la seconde extrémité de l'ordonnée y possédera encore, aux points anguleux qui y marqueront le passage d'un intervalle à l'autre, une stricte continuité, caractérisée par l'absence de toute rupture complète (ou séparation).

Or, dans les deux cas, cette trajectoire, une fois construite, définit parfaitement son ordonnée y en fonction de l'abscisse x; et la manière même dont elle a été décrite, ou dont on a réglé à chaque instant sa direction, montre qu'on y aura partout $dy = f(x)\,dx$ ou $y' = f(x)$. Par conséquent, son ordonnée variable y est bien la fonction primitive demandée $F(x)$ ou, du moins, une fonction primitive, c'est-à-dire ayant pour différentielle $f(x)\,dx$.

On voit même que la droite AA′, *valeur initiale* de cette fonction, pourrait être allongée ou raccourcie d'une quantité quelconque A′A″; et qu'on obtiendrait alors une nouvelle courbe, A″B″C″..., dont l'ordonnée, que j'appellerai Y, aurait également pour dérivée $f(x)$, ou exprimerait, elle aussi, au même titre que la précédente, une fonction primitive. Mais il importe d'observer que la différence $Y - y$ des deux ordonnées se maintiendrait invariable, ou que l'on aurait

$$A'A'' = B'B'' = C'C'' = \ldots.$$

En effet, l'expression $Y - y$, ayant sa dérivée $Y' - y'$ ou $f(x) - f(x)$ identiquement nulle, se réduit forcément à une quantité constante (t. I, p. 34). Donc, si nous désignons par c une *constante arbitraire*, positive ou négative à volonté, la fonction primitive la plus générale de $f(x)$ sera $y + c$ ou $F(x) + c$.

En résumé, *quelle que soit la différentielle donnée, de la forme $f(x)\,dx$, dans laquelle toutefois $f(x)$ désigne une fonction ou continue ou affectée seulement de discontinuités accidentelles, on peut toujours se représenter, et il existe, en conséquence, une fonction continue,* $F(x)$, *qui admet cette différentielle $f(x)\,dx$, c'est-à-dire dont la dérivée est $f(x)$. De plus, la différentielle $f(x)\,dx$ définit complètement les changements éprouvés par cette fonction, ou ce qu'on peut appeler sa partie variable avec x; mais elle laisse entièrement libre sa partie constante, ou une première valeur, dite initiale.* Aussi doit-on comprendre soit explicitement, soit implicitement, dans celle-ci, une *constante arbitraire,* dont la détermination s'effectue à l'aide d'une donnée ou condition accessoire propre à chaque problème.

215. — Intégrale définie et intégrale indéfinie d'une différentielle $f(x)\,dx$; signification et emploi du signe $\int$.

Supposons que, x ayant reçu d'abord la valeur a, on ait choisi égale à zéro la valeur correspondante de l'ordonnée de la courbe, ou, ce qui revient au même, donnons-nous la constante arbitraire c égale à

$$-AA' = -F(a).$$

La fonction primitive que nous obtiendrons sera ainsi l'ordonnée de la courbe, A*bc*... (p. 3), construite en retranchant partout la constante $F(a)$ de l'ordonnée $y = F(x)$ de la courbe A′B′C′... considérée d'abord. Cette fonction primitive, $F(x) - F(a)$, joindra donc à la propriété d'avoir pour différentielle $f(x)\,dx$ celle d'être initialement nulle, ou de se former, peu à peu, par l'apport exclusif des va-

leurs que sa différentielle $f(x)\,dx$ reçoit pendant que x, après avoir égalé a, éprouve les variations continues ou insensibles dx, d'ailleurs complètement arbitraires quant à leurs rapports mutuels et à leurs signes.

La somme de toutes ces valeurs successives de la différentielle $f(x)\,dx$ se représente quelquefois, suivant une notation que nous avons déjà employée (t. I, p. 66), par le symbole $\Sigma f(x)\,dx$. Mais, comme les *éléments* ainsi ajoutés sont infiniment petits et infiniment nombreux, en sorte qu'il s'agit d'une limite de sommes (*id.*, p. 65) et non d'une somme déterminée, il est bon d'exprimer nettement, au moyen d'une forme spéciale donnée au signe de sommation, l'intention où l'on est de passer à la limite en faisant décroître tous les termes jusqu'à zéro et croître leur nombre au delà de toute grandeur. A cet effet, on remplace le Σ grec par le symbole $\int$, dû à Leibnitz et qui n'est qu'une S (initiale du mot *somme*) déformée. C'est ainsi que, dans le Calcul différentiel, la substitution de la lettre d à la lettre grecque Δ avait traduit une intention analogue. Et, pour que cette intention se manifeste aussi dans le langage parlé, le symbole $\int$ s'énonce *intégrale*, plus particulièrement que *somme*, de même que le signe d s'est appelé *différentielle* et non *différence*. Par conséquent, la somme des valeurs prises successivement par la différentielle $f(x)\,dx$ quand x varie avec continuité s'écrira $\int f(x)\,dx$ et se lira *intégrale de* $f(x)\,dx$ ou *somme de* $f(x)\,dx$.

Cette somme étant égale à $F(x) - F(a)$ quand la valeur initiale de x est a, on aura

$$\int f(x)\,dx = F(x) - F(a).$$

Une telle expression s'appelle une *intégrale définie*. Sa valeur, comme on voit, est complètement déterminée, parce qu'on se donne celle, a, à partir de laquelle x a commencé à varier ; et c'est justement cette détermination parfaite qu'on exprime par l'adjectif *définie*.

Pour en donner un exemple très simple, posons $f(x) = x$ et $a = 0$, ou soit $x\,dx$ l'expression à intégrer, dans l'hypothèse d'une valeur initiale nulle de x. Il est clair, par une différentiation immédiate, qu'une des fonctions primitives $F(x)$ ayant pour dérivée x est $\frac{1}{2}x^2$; et, comme cette fonction s'évanouit avec x, ou que l'on a ici $F(a) = F(0) = 0$, il vient $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$.

Mais, si l'on n'expliquait pas quelle a été la première valeur de x, le terme $-F(a)$ pourrait généralement recevoir, comme a, une infinité de valeurs différentes, comprises ou non entre certaines limites ; et ce serait (du moins entre ces limites, s'il y restait contenu) une

constante arbitraire. En la représentant par c, on aurait donc

$$\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + c.$$

Alors la quantité $\int f(x)dx$, indéterminée en partie, prend le nom d'*intégrale indéfinie.* On voit que, sauf cette circonstance que c peut bien quelquefois n'y pas sortir d'un certain intervalle, elle comporte la même expression analytique, $\mathrm{F}(x) + c$, que la fonction primitive la plus générale de $f(x)$. Aussi a-t-on pris l'habitude de regarder les deux termes, *intégrale indéfinie* et *fonction primitive,* comme synonymes. On dira, indifféremment, l'intégrale de $f(x)\,dx$ et la fonction primitive de $f(x)$, en sous-entendant que la constante arbitraire impliquée dans celle-ci devra se déterminer de manière à faire commencer l'intégrale pour telle valeur de x qu'on voudra.

Le symbole $\int$ dispensera de donner un nom spécial, tel que $\mathrm{F}(x)$, à la fonction primitive de $f(x)$, puisqu'on la désignera bien mieux par l'expression $\int f(x)\,dx$, qui a l'avantage de rappeler son mode le plus naturel de génération. Par suite, *le signe d'intégration $\int$ sera l'opposé du signe de différentiation d*; et celui-ci, placé au devant de l'autre, le détruira identiquement, d'après le sens même qu'on leur attribue : on aura, par exemple,

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Mais on ne peut pas dire, au même degré, que le signe $\int$, placé au devant du signe d, le détruise; car

$$\int d\,\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(x) + \text{ une constante arbitraire, et non } \mathrm{F}(x) \text{ seulement.}$$

La différence provient de ce que la différentiation est une opération donnant un résultat parfaitement défini, tandis que l'intégration d'une différentielle $f(x)\,dx$ est une opération propre à faire connaître uniquement les variations de la quantité cherchée et non sa valeur initiale.

216. — **Ce qu'on entend par l'intégrabilité d'une expression de la forme**

$$\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \mathrm{P}\,dz + \ldots.$$

Nous nous occuperons de la recherche des fonctions primitives ou, ce qui revient au même, du calcul des intégrales indéfinies, avant de considérer spécialement les intégrales définies. Mais il convient, auparavant, d'étendre les considérations générales qui précèdent, touchant les expressions de la forme $f(x)\,dx$, aux expressions différentielles analogues à plusieurs termes et affectées de plusieurs variables x, y,

$z, \ldots$, afin d'examiner si ce seront toujours les différentielles totales de certaines fonctions, et quelle marche on pourra suivre, quand, en effet, de telles fonctions existeront, pour ramener leur recherche à des intégrations comme celle de $f(x)\,dx$.

Soit donc $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \mathrm{P}\,dz + \ldots$ la plus générale des expressions dont il s'agit, c'est-à-dire celle qui les comprend toutes, les coefficients M, N, P, ... des différentielles $dx, dy, dz, \ldots$ y étant des fonctions connues quelconques de $x, y, z, \ldots$; et demandons-nous d'abord en quoi pourra consister son intégration, supposé que $x, y, z, \ldots$ y varient avec continuité et simultanément, depuis certaines valeurs initiales constantes $a, b, c, \ldots$ jusqu'à d'autres valeurs quelconques $x, y, z, \ldots$.

Pour fixer les idées, réduisons d'abord à trois, x, y, z, les variables; et faisons-leur exprimer alors les coordonnées des divers points de l'espace par rapport à un système d'axes; de sorte que chaque triple série des valeurs de x, y, z que l'on a en vue se trouve représentée par une ligne, issue du point constant de départ (a, b, c) et aboutissant au point voulu d'arrivée (x, y, z). Nous savons (t. I, p. 115) que, le long de cette ligne, deux des coordonnées, y et z par exemple, seront fonctions de l'autre, x, et que, plus généralement, dans chaque série multiple des valeurs de variables $x, y, z, \ldots$ en nombre quelconque et qui changent à la fois, il correspond, aux diverses valeurs de l'une, certaines valeurs de chacune des autres, dès lors fonctions de la première. Nous pourrons donc, s'il y a, par exemple, trois variables, poser $y = \psi(x)$, $z = \chi(x)$, ψ et χ désignant ici deux fonctions continues de x, astreintes à avoir b, c pour valeurs initiales et les valeurs finales y, z données, mais, dans tout l'intervalle, entièrement arbitraires. Comme il en résulte $dy = \psi'(x)\,dx$, $dz = \chi'(x)\,dx$, et que d'ailleurs M, N, P, fonctions connues de x, y, z, deviennent dépendantes seulement de x, l'expression proposée $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \mathrm{P}\,dz$ se change en $[\mathrm{M} + \mathrm{N}\psi'(x) + \mathrm{P}\chi'(x)]\,dx$: elle reçoit donc la forme $f(x)\,dx$, avec des valeurs de $f(x)$ parfaitement déterminées aux divers points de chaque arc où, d'un bout à l'autre, x varie dans un même sens. Par suite, la somme des valeurs prises par cette expression le long du chemin suivi, somme qu'on peut écrire $\int(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \mathrm{P}\,dz)$, ne sera autre qu'une intégrale, $\int f(x)\,dx$, du genre de celles dont nous avons commencé l'étude, ou se composera de telles intégrales; et elle aura une valeur déterminée dès que la ligne définie par les fonctions $y = \psi(x)$, $z = \chi(x)$, étant donnée, fera parfaitement connaître la fonction $f(x) = \mathrm{M} + \mathrm{N}\psi'(x) + \mathrm{P}\chi'(x)$.

Mais, justement parce que cette valeur doit dépendre en général du

chemin suivi, et non pas uniquement du point d'arrivée ou des valeurs finales x, y, z des variables, il y a lieu de se demander dans quels cas, ou pour quelles formes des fonctions M, N, P, elle varie seulement avec ces valeurs finales x, y, z, supposées quelconques, et devient par conséquent une véritable fonction de point, la même en chaque endroit (x, y, z) de l'espace quelle que soit, à partir de (a, b, c), la voie le long de laquelle on l'aura formée. S'il n'y avait que deux variables x et y, les lignes considérées, alors définies par $y = \psi(x)$, toutes issues d'un point donné (a, b) du plan des xy, n'auraient pas à sortir de ce plan. Et le cas remarquable qu'il s'agit d'examiner serait celui où l'intégrale $\int(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy)$ dépendrait uniquement du point (x, y) d'arrivée; ce qui permettrait de l'exprimer par une ordonnée perpendiculaire z en émanant, dont la seconde extrémité, mobile avec (x, y), décrirait une surface continue

$$z = \int(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy),$$

représentative de l'intégrale. Quand, les variables se réduisant toujours à x et y, il n'en est pas ainsi, la somme $z = \int(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy)$ représente bien encore l'ordonnée verticale d'une infinité de courbes parties d'un même point $(a, b, 0)$ et se distinguant les unes des autres par leurs projections horizontales $y = \psi(x)$; mais ces courbes se trouvent éparpillées à diverses hauteurs z en arrivant sur une même verticale quelconque (x, y), et, par conséquent, elles ne couvrent pas toutes une surface unique.

Si l'expression $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \ldots$ contenait, au contraire, plus de trois variables, ou que toute représentation géométrique simple fît défaut, il n'y aurait pas moins à remarquer le cas important où l'intégrale $\int(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \ldots)$, prise à partir de valeurs fixes $a, b, \ldots$ des variables, dépendrait uniquement des valeurs finales x, y, ... de celles-ci, et non des valeurs intermédiaires ou de la manière dont y, z, ... y auraient varié en fonction de x.

Ainsi, dans la supposition la plus générale quant au nombre des variables, l'expression à intégrer $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \ldots$, que l'hypothèse d'un mode quelconque de variation simultanée de x, y, ... réduit au type plus simple $f(x)\,dx$, mérite une étude spéciale lorsque la forme des fonctions M, N, ... y rend la somme $\int(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \ldots)$ dépendante des valeurs finales x, y, ... des variables, mais non de leurs valeurs produites entre celles-là et les valeurs initiales fixes a, b, ... Alors appelons $\mathrm{F}(x, y, \ldots)$ l'intégrale (définie) ou posons

$$\mathrm{F} = \int(\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy + \ldots),$$

et donnons aux valeurs finales considérées $x, y, \ldots$ des accroissements infiniment petits quelconques $dx, dy, \ldots$. Comme on peut amener graduellement les variables, des valeurs initiales $a, b, \ldots$, aux proposées $x + dx, y + dy, \ldots$, en les faisant passer par les précédentes valeurs finales $x, y, \ldots$, l'intégrale comprendra maintenant, outre les mêmes éléments, c'est-à-dire les mêmes différentielles successives, que tout à l'heure, la nouvelle partie, assimilable à un dernier élément, $M\,dx + N\,dy + \ldots$, dans laquelle $x, y, \ldots$ seront les précédentes valeurs finales et $dx, dy, \ldots$ les excédents, sur celles-là, des valeurs finales actuelles. En conséquence, l'accroissement éprouvé par la fonction F a la valeur $M\,dx + N\,dy + \ldots$ quels que soient les rapports mutuels de $dx, dy, \ldots$; ce qui, en choisissant égales à zéro toutes ces différentielles à l'exception d'une seule et puis divisant par celle-ci, donne pour dérivées partielles en $x, y, \ldots$ de la fonction F les coefficients mêmes M, N, ... Il vient donc, identiquement (ou pour des valeurs quelconques de $x, y, \ldots$), $M = \frac{dF}{dx}$, $N = \frac{dF}{dy}$, ... Ainsi, *l'intégrale* $\int (M\,dx + N\,dy + \ldots)$ *dépend, uniquement, des valeurs finales des variables* (*leurs valeurs initiales restant fixes*), *à la condition nécessaire que les coefficients* M, N, ... *de l'expression proposée* $M\,dx + N\,dy + \ldots$ *soient les dérivées partielles respectives d'une même fonction par rapport à* $x, y, \ldots$.

Réciproquement, *cette condition est suffisante;* car, dès que M, N, ... égalent constamment les dérivées partielles en $x, y, \ldots$ d'une fonction déterminée $\varphi(x, y, \ldots)$, chaque valeur de

$$M\,dx + N\,dy + \ldots,$$

correspondant à une variation élémentaire donnée $dx, dy, \ldots$ du système des variables, représente l'accroissement infiniment petit simultané $d\varphi$ de cette fonction, et, par suite, la somme

$$F = \int (M\,dx + N\,dy + \ldots)$$

n'est (à la limite) autre chose que l'accroissement total de φ, savoir $\varphi(x, y, \ldots) - \varphi(a, b, \ldots)$, quantité dépendant bien uniquement des valeurs finales $x, y, \ldots$ des variables, lorsque les valeurs initiales $a, b, \ldots$ sont fixées, et, par conséquent, ne dépendant pas de leurs valeurs intermédiaires.

La question revient donc à chercher les fonctions φ qui vérifient à la fois les équations $\frac{d\varphi}{dx} = M$, $\frac{d\varphi}{dy} = N$, ... Quand de telles fonctions existent, l'expression proposée prend le nom de *différentielle exacte;*

et elle est dite *immédiatement intégrable*, pour exprimer que la somme $\int(M\,dx + N\,dy + \ldots)$ peut s'obtenir ou, du moins, constitue une fonction des valeurs finales $x, y, \ldots$ *bien définie* (à partir de valeurs initiales données $a, b, \ldots$), sans qu'on ait besoin de faire subir aux éléments $M\,dx + N\,dy + \ldots$ aucune transformation. Les conditions auxquelles doivent, pour cela, satisfaire les coefficients M, N, ... s'appellent *conditions d'intégrabilité*.

Il est clair que la différence de deux de ces fonctions φ aura ses dérivées partielles en $x, y, \ldots$ identiquement nulles; ce qui, dans toute manière de faire varier à la fois $x, y, \ldots$, annulera sans cesse sa dérivée complète par rapport à la variable indépendante choisie et, par suite, ses changements totaux. Cette différence est donc invariable; et toutes les fonctions φ se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par l'addition d'une constante c, évidemment arbitraire. L'expression générale de φ ainsi obtenue s'appelle, comme dans le cas de la différentielle $f(x)\,dx$, l'*intégrale indéfinie* de $M\,dx + N\,dy + \ldots$ et se représente d'ordinaire par la formule $\int(M\,dx + N\,dy + \ldots)$, dans laquelle on laisse alors indéterminées les valeurs initiales $a, b, \ldots$ ou la constante $-\varphi(a, b, \ldots)$.

Nous allons voir, en considérant d'abord le cas de deux variables seulement x, y, quelles sont les conditions d'intégrabilité, et comment on peut, quand elles se trouvent vérifiées, obtenir l'intégrale indéfinie φ.

217. — Marche à suivre, en général, pour intégrer $M\,dx + N\,dy$; condition d'intégrabilité.

Soit donc $M\,dx + N\,dy$ la différentielle proposée, ou

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = M, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = N.$$

les deux équations à résoudre. Appelons $\int M\,dx$ une fonction de x et y ayant M pour sa dérivée partielle en x et obtenue, par conséquent, en intégrant $M\,dx$ sans faire varier y : chose que nous savons être toujours possible, en ce sens du moins que la fonction primitive considérée existe. Comme on aura identiquement $M = \frac{d}{dx}\int M\,dx$, la première équation (1) pourra s'écrire $\frac{d}{dx}(\varphi - \int M\,dx) = 0$, et elle signifiera que la différence $\varphi - \int M\,dx$ ne dépend pas de x, mais dépend seulement des autres variables, c'est-à-dire ici de y. Si nous la représentons par $\psi(y)$, nous aurons

$$(2) \qquad \varphi = \int M\,dx + \psi(y);$$

et il nous restera, pour déterminer la fonction arbitraire $\psi(y)$, la deuxième équation (1) qui, vu la valeur (2) de φ, devient

$$\frac{d}{dy}\int \mathrm{M}\,dx + \psi'(y) = \mathrm{N},$$

ou

$$\psi'(y) = \mathrm{N} - \frac{d}{dy}\int \mathrm{M}\,dx. \tag{3}$$

Or la fonction $\psi(y)$ et, par suite, sa dérivée $\psi'(y)$ n'étant astreintes jusqu'ici qu'à ne pas dépendre de x, il suffira, pour qu'on puisse donner à $\psi'(y)$ la valeur $\mathrm{N} - \frac{d}{dy}\int \mathrm{M}\,dx$, que cette valeur soit bien indépendante de x, ou, ce qui revient au même, que la dérivée en x de $\mathrm{N} - \frac{d}{dy}\int \mathrm{M}\,dx$ se réduise constamment à zéro. Si cette condition est remplie, l'expression (3) de $\psi'(y)$, multipliée par dy et intégrée sans faire varier x, donnera

$$\psi(y) = \int\left(\mathrm{N} - \frac{d}{dy}\int \mathrm{M}\,dx\right)dy + \text{une constante arbitraire } c,$$

valeur qui, portée dans (2), achèvera de déterminer la forme de φ en x et y,

$$\varphi = \int \mathrm{M}\,dx + \int\left(\mathrm{N} - \frac{d}{dy}\int \mathrm{M}\,dx\right)dy + c. \tag{4}$$

L'intégration de la différentielle totale $\mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy$ en comprendra donc généralement deux dans le genre de celle de $f(x)\,dx$, c'est-à-dire effectuées en n'y faisant changer, pour chacune, qu'une seule variable : la première, celle de $\mathrm{M}\,dx$, aura lieu en ne faisant varier que x, ou elle se fera, comme on dit, *par rapport à x*; la seconde, relative à y, se fera sur l'expression $\mathrm{N} - \frac{d}{dy}\int \mathrm{M}\,dx$.

Mais on voit que les fonctions M et N devront, pour que le problème soit possible, satisfaire à la condition, nécessaire et suffisante, de rendre nulle identiquement la dérivée en x de $\mathrm{N} - \frac{d}{dy}\int \mathrm{M}\,dx$. Ainsi l'on a pour toute condition d'intégrabilité la relation

$$\frac{d\mathrm{N}}{dx} - \frac{d^2}{dx\,dy}\int \mathrm{M}\,dx = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\mathrm{N}}{dx} - \frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}\int \mathrm{M}\,dx\right) = 0;$$

et comme enfin, par définition, $\frac{d}{dx}\int \mathrm{M}\,dx$ n'est autre que M, cette

condition d'intégrabilité devient simplement

$$(5) \qquad \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} = 0.$$

Elle signifie, en langage ordinaire, que, *dans l'expression donnée* $M\,dx + N\,dy$, *le coefficient affectant la différentielle d'une des deux variables doit avoir, par rapport à l'autre variable, même dérivée que le coefficient de la différentielle de celle-ci par rapport à la première.*

On l'aurait immédiatement prévu en observant que, si la fonction φ existe, M, N sont ses deux dérivées premières, et que $\frac{dM}{dy}$, $\frac{dN}{dx}$ constituent par suite les deux expressions $\frac{d^2\varphi}{dy\,dx}$ et $\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}$ de sa dérivée seconde oblique. Mais la démonstration précédente fait voir de plus que cette égalité, évidemment nécessaire, des deux dérivées réciproques de M et N, est suffisante pour que la fonction φ existe.

218. — Extension de la méthode précédente au cas d'un nombre quelconque de variables.

Supposons maintenant que l'expression à intégrer soit

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz,$$

ou qu'on ait trois variables x, y, z et, par conséquent, les trois équations à vérifier

$$(6) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = M, \qquad \frac{d\varphi}{dy} = N, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = P.$$

On pourra d'abord ne considérer que les deux premières, ou choisir, parmi toutes les manières possibles de faire varier à la fois x, y et z, celles où z ne change pas. On sera ainsi ramené au cas de deux variables x, y; et, si la condition d'intégrabilité (5) est satisfaite quel que soit z, la formule (4), qui implique deux intégrations, l'une en x, l'autre en y, fera connaître la fonction φ la plus générale qui puisse de la sorte vérifier les deux premières relations (6). Observons seulement que, dans cette formule (4) et d'après la démonstration même qui a conduit à la poser, le terme complémentaire indéterminé c n'est astreint qu'à ne pas dépendre de x ni de y : ce n'est qu'en ce sens, ou par rapport à x et à y, qu'on l'a dit constant. Dès qu'il y a lieu de considérer une nouvelle variable z, il peut donc devenir une fonction arbitraire de z. Aussi le désignerons-nous par $\psi(z)$. Quant à la partie

dépendante de x et y, savoir $\int M\,dx + \int\left(N - \frac{d}{dy}\int M\,dx\right)dy$, et où z, en général, entrera aussi par M et N, nous l'écrirons simplement $\int(M\,dx + N\,dy)$, pour nous rappeler que ses deux dérivées respectives en x et y sont M et N. Nous aurons donc, en vertu des deux premières équations (6) du problème, comme expression la plus générale possible de φ, la suivante

$$(7) \qquad \varphi = \int(M\,dx + N\,dy) + \psi(z),$$

où il ne restera d'indéterminé, c'est-à-dire de disponible pour essayer de satisfaire à la troisième équation (6), que le terme $\psi(z)$.

Or cette troisième équation (6) devient aisément, par la substitution à φ de sa valeur (7),

$$(8) \qquad \psi'(z) = P - \frac{d}{dz}\int(M\,dx + N\,dy).$$

D'ailleurs, $\psi'(z)$ ne se trouvant astreint qu'à ne pas dépendre de x ni de y, on pourra vérifier cette équation (8) si son second membre est en effet une expression de $\psi'(z)$ acceptable ou indépendante de x et de y, c'est-à-dire à la double condition que ses deux dérivées partielles en x et en y se réduisent à zéro pour toutes les valeurs possibles de x, y et z. Il y aura donc deux conditions d'intégrabilité à joindre à la précédente (5), et ce seront, sous une forme condensée qui nous est familière, les deux relations

$$\frac{dP}{d(x,y)} - \frac{d^2}{d(x,y)\,dz}\int(M\,dx + N\,dy) = 0,$$

ou

$$\frac{dP}{d(x,y)} - \frac{d}{dz}\,\frac{d\int(M\,dx + N\,dy)}{d(x,y)} = 0;$$

c'est-à-dire, finalement,

$$(9) \qquad \frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dP}{dy} - \frac{dN}{dz} = 0.$$

Ainsi l'introduction de la troisième variable z, ou de la troisième équation (6), a pour effet de rendre nécessaires les deux nouvelles conditions d'intégrabilité (9); et celles-ci expriment que les deux dérivées, en x et y, du coefficient P affectant la différentielle de la variable nouvelle z, doivent être égales respectivement aux dérivées, par rapport à z, des coefficients M et N des différentielles dx et dy. Ces conditions sont, comme on voit, analogues à la première, (5), et leur nécessité se trouvait également évidente.

Si les expressions données de M, N, P les vérifient, la relation (8), multipliée par dz et intégrée, fera connaître $\psi(z)$ à une constante arbitraire près, et, en appelant $\int(\mathrm{M}\,dx+\mathrm{N}\,dy+\mathrm{P}\,dz)$ ce que sera toute la partie du second membre de (7) contenant x, y, z, il viendra

(10) $$\varphi=\int(\mathrm{M}\,dx+\mathrm{N}\,dy+\mathrm{P}\,dz)+\text{ une constante arbitraire } c.$$

Concevons actuellement que M, N, P dépendent encore d'une quatrième variable u, et que l'on ajoute une nouvelle équation à vérifier, $\frac{d\varphi}{du}=\mathrm{Q}$. Il est clair que le dernier terme c de (10), constant seulement en ce sens qu'il ne dépend ni de x, ni de y, ni de z, sera une fonction provisoirement arbitraire, ψ, de u, à déterminer de manière qu'on ait $\frac{d\varphi}{du}=\mathrm{Q}$. De là se tirera la valeur de $\psi'(u)$, et, vu l'impossibilité, pour cette valeur, de dépendre de x, y ou z, il viendra, comme nouvelles conditions d'intégrabilité, l'égalité des dérivées respectives de Q en x, y et z à celles de M, N, P par rapport à u. Et ainsi de suite.

En résumé : 1° le procédé suivi s'étend au cas d'autant de variables qu'on le veut; 2° il exige, généralement, autant d'intégrations qu'il y a de variables indépendantes, savoir, une intégration par rapport à chaque variable; 3° toutes les conditions d'intégrabilité consistent en ce que, dans l'expression donnée $\mathrm{M}\,dx+\mathrm{N}\,dy+\ldots$, les coefficients des différentielles de deux variables quelconques doivent avoir leurs dérivées premières respectives, prises, pour chacun, par rapport à la variable dont il n'affecte pas la différentielle, identiquement égales entre elles.

219. — Exemples de différentielles totales qui s'intègrent facilement.

Deux exemples très simples de l'intégration d'une différentielle totale montreront qu'on peut employer, dans divers cas, des procédés spéciaux suggérés par une vue directe de l'expression proposée, et qui dispensent de recourir à la méthode générale.

Soit d'abord la différentielle, à deux variables,

(11) $$\frac{(ax-by)\,dx+(ay+bx)\,dy}{x^2+y^2},$$

où a et b désignent deux constantes quelconques. On a ici

$$\mathrm{M}=\frac{ax-by}{x^2+y^2},\qquad \mathrm{N}=\frac{ay+bx}{x^2+y^2},$$

fonctions vérifiant bien la condition d'intégrabilité (5); car des différentiations immédiates donnent

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} = -\frac{2axy + b(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Pour intégrer, on groupera, dans (11), d'une part, les termes en a et, d'autre part, les termes en b. Les premiers donneront en tout $a\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$ ou $\frac{a}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$; et, comme le rapport de la différentielle d'une quantité $x^2 + y^2$ à cette quantité même est précisément la différentielle de son logarithme népérien $\log(x^2+y^2)$, la partie considérée, en a, de l'expression (11), pourra s'écrire

$$\frac{a}{2}\,d\log(x^2+y^2), \qquad \text{ou} \qquad d\left[\frac{a}{2}\log(x^2+y^2)\right] = d\left(a\log\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

D'autre part, les termes qui, dans (11), contiennent b, ont pour somme $b\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, Or, d'après la règle de différentiation d'un quotient (t. I, p. 77), l'expression $x\,dy - y\,dx$, si on la divisait par x^2, serait la différentielle du rapport $\frac{y}{x}$, en sorte que la somme considérée revient à $b\frac{x^2\,d\frac{y}{x}}{x^2+y^2}$, ou à $b\frac{d\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$; et comme enfin la différentielle d'une quantité $\frac{y}{x}$, divisée par le carré de celle-ci accru de 1, exprime la différentielle de l'arc ayant pour tangente cette même quantité $\frac{y}{x}$, la somme en question n'est autre que $b\,d\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}$ ou $d\left(b\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)$. Donc l'expression (11) tout entière équivaut à

$$d\left[a\log\sqrt{x^2+y^2} + b\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right];$$

et il vient

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\frac{(ax - by)\,dx + (ay + bx)\,dy}{x^2+y^2} \\ &\quad = a\log\sqrt{x^2+y^2} + b\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} + \text{const.}\end{aligned}\right.$$

Soit encore à intégrer l'expression suivante, qui, en conservant sa forme, pourrait contenir un nombre quelconque de variables,

$$(13)\quad (y+z+u)\,dx + (z+u+x)\,dy + (u+x+y)\,dz + (x+y+z)\,du.$$

Toutes les conditions d'intégrabilité sont vérifiées, puisque dans (13) le coefficient de la différentielle de chaque variable a ses dérivées, par rapport à toutes les autres variables, égales à l'unité, et qu'il vient bien ainsi $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, $\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}$, ...

Pour effectuer simplement l'intégration, appelons S la somme, $x+y+z+u$, de toutes les variables; puis, observons que le coefficient, $y+z+u$, de dx, est $S-x$, et, de même, celui de dy, $S-y$, etc. La différentielle proposée (13) s'écrira donc, successivement,

$$\left\{\begin{aligned} &(S-x)\,dx+(S-y)\,dy+(S-z)\,dz+(S-u)\,du \\ &\quad = S(dx+dy+dz+du)-x\,dx-y\,dy-z\,dz-u\,du \\ &\quad = S\,dS-x\,dx-y\,dy-z\,dz-u\,du \\ &\quad = d\frac{S^2}{2}-d\frac{x^2}{2}-d\frac{y^2}{2}-d\frac{z^2}{2}-d\frac{u^2}{2}=d\frac{S^2-(x^2+y^2+z^2+u^2)}{2}; \end{aligned}\right.$$

et il viendra, par une intégration immédiate,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\int[(y+z+u)\,dx \\ &\quad +(z+u+x)\,dy+(u+x+y)\,dz+(x+y+z)\,du] \\ &\qquad = \frac{(x+y+z+u)^2-(x^2+y^2+z^2+u^2)}{2}+\text{const.} \\ &\qquad = xy+xz+xu+yz+yu+zu+\text{const.} \end{aligned}\right.$$

220*. — De l'intégrabilité des différentielles totales implicites.

(Compléments, p. 1*.)

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

PROCÉDÉS GÉNÉRAUX POUR LE CALCUL DES INTÉGRALES INDÉFINIES.

221. — Des règles servant à intégrer en termes finis une différentielle de la forme $f(x)dx$.

On est très loin de pouvoir calculer exactement, ou même de savoir exprimer en termes finis, au moyen des fonctions connues, l'intégrale d'une différentielle quelconque de la forme $f(x)\,dx$, soit algébrique, soit surtout transcendante. Il faut d'ailleurs, pour que des tentatives dans ce sens aboutissent, que la quantité représentée par l'intégrale se trouve, en effet, réductible aux fonctions simples de l'analyse; ce qui n'a lieu qu'assez rarement, sans qu'on ait même toujours des moyens sûrs de le discerner. Et dans les cas où une telle réduction ne s'effectue pas, c'est un problème en général très ardu, que de reconnaître les intégrales d'une même famille, ou exprimables les unes par les autres, et de les ramener aux moins complexes d'entre elles, dont il reste ensuite à opérer le calcul numérique et à composer des tables, par des développements en séries, ou autrement, comme on l'a fait pour la fonction logarithmique et pour les fonctions circulaires.

Nous nous bornerons ici, presque entièrement, aux principales des catégories de différentielles qui s'intègrent à l'aide des fonctions familières à tous les géomètres, les unes algébriques, les autres exponentielles ou circulaires, tant directes qu'inverses. Cette recherche sera basée sur l'emploi de cinq règles constituant, en quelque sorte, cinq procédés spéciaux d'intégration, que nous allons exposer.

222. — Première règle, concernant les différentielles qui s'intègrent immédiatement.

Cette règle consiste à connaître par cœur et à appliquer les intégrations suivantes, qui résultent, sans calcul ou presque sans calcul, des formules usuelles de différentiation des fonctions les plus simples, et

où c, c' désignent des constantes arbitraires :

$$(1)\left\{\begin{array}{l}
\int x^m\,dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + c \text{ (} m \text{ étant un exposant constant quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire)},\\[2ex]
\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log x + c', \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + c,\\[2ex]
\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \left(\text{quand } \arcsin x \text{ est compris entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2}\right),\\[2ex]
\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pm \arcsin x + c = \mp \arccos x + c' \text{ (quand les arcs sont quelconques)},\\[2ex]
\int e^x\,dx = e^x + c, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + c, \quad \int \sin x\,dx = -\cos x + c,\\[2ex]
\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + c, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c.
\end{array}\right.$$

On vérifie l'exactitude de toutes ces formules en observant que les seconds membres ont bien pour différentielles les quantités placées sous le signe $\int$ dans les premiers membres.

Faisons les remarques suivantes :

1° *L'intégrale de $x^m\,dx$ s'obtient en ajoutant algébriquement* 1 *à l'exposant de la variable et en divisant par son nouvel exposant la puissance ainsi obtenue.* Par exemple, la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{x}}$ s'écrira d'abord $x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ et donnera

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c.$$

2° Cette intégrale $\int x^m\,dx$ prend ainsi la forme *illusoire* (c'est-à-dire incertaine ou obscure) $\frac{x^0}{0} + c = \frac{1}{0} + c$ dans le cas particulier $m = -1$; et c'est pour suppléer à l'insuffisance de la formule générale dans ce cas qu'est donnée la seconde formule, $\int \frac{dx}{x} = \log x + c'$. La véritable intégrale, contenant alors la fonction *transcendante* $\log x$, ne pouvait, en effet, être représentée *distinctement* par une expression *algébrique,* telle que $\frac{x^{m+1}}{m+1} + c$. Elle ne constitue cependant qu'un

cas extrême ou *limite* de celle-ci, comme on le reconnaît en posant non pas, tout de suite, $m = -1$, mais $m = -1 + \frac{1}{n}$, et en faisant croître indéfiniment n pour que m tende vers -1. Alors le monôme $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ devient $n x^{\frac{1}{n}} = n\sqrt[n]{x}$; et sa partie variable avec x est identique à celle de l'expression $n\sqrt[n]{x} - n = n(\sqrt[n]{x} - 1)$, qui tend vers $\log x$ (t. I, p. 51) quand n y grandit indéfiniment en valeur absolue. Donc il suffit de poser $c = -n + c'$ pour voir la forme algébrique $n\sqrt[n]{x} + c$ ou $\frac{x^{m+1}}{m+1} + c$, nécessairement insuffisante quand $m = -1$, donner alors naissance à la forme transcendante $\log x + c'$.

3° Dans la cinquième formule, concernant $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, une même intégrale se trouve exprimée, à volonté, soit par $\pm \operatorname{arc\,sin} x + c$, soit par $\mp \operatorname{arc\,cos} x + c'$. Et, en effet, le sinus d'un arc étant le cosinus de son complément, les deux arcs $\operatorname{arc\,sin} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, qui ont respectivement x pour sinus et pour cosinus, égalent en somme $\frac{\pi}{2}$; de sorte qu'on a

$$\operatorname{arc\,sin} x = -\operatorname{arc\,cos} x + \frac{\pi}{2}$$

et que les deux fonctions $\operatorname{arc\,sin} x$, $-\operatorname{arc\,cos} x$ diffèrent seulement par la constante $\frac{\pi}{2}$ ou sont parfaitement équivalentes en ce qui concerne leur partie variable, seule à considérer dans une intégrale indéfinie.

4° Enfin, la comparaison des diverses formules du tableau précédent montre que les différentielles algébriques, comme, par exemple, $x^m\,dx$, $\frac{dx}{x}$, $\frac{dx}{1+x^2}$, $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ont pour intégrales, les unes, des fonctions algébriques, les autres des fonctions transcendantes (qui sont ici des fonctions inverses d'exponentielles, de tangentes ou de sinus); tandis que les différentielles transcendantes ont toujours leurs intégrales transcendantes, comme on pouvait le prévoir en observant que la dérivée d'une fonction algébrique est toujours algébrique et que, par suite, nulle fonction algébrique ne saurait être l'intégrale d'une fonction transcendante.

Donc, *l'intégration, bien supérieure en cela, pour la variété des cas, à la différentiation, est une opération qui introduit fréquemment des fonctions transcendantes, quand les expressions d'où l'on*

part sont algébriques, et qui est par conséquent propre à définir ou à faire connaître de nouvelles transcendantes.

223*. — Extension, au cas de différences finies, de certaines des précédentes formules de sommation : factorielles, progressions arithmétiques et leurs sommes successives.

(Compléments, p. 8*.)

224*. — Suite : sommation des progressions géométriques à termes soit réels, soit imaginaires, ce qui comprend celle de sinus ou cosinus d'arcs équidistants; différentielle d'une exponentielle imaginaire, etc.

(Compléments, p. 11*.)

225. — Deuxième règle : intégration d'une somme ou d'une différence.

L'intégrale de la somme ou de la différence de divers termes égale la somme ou la différence des intégrales de ces termes.

Je dis, par exemple, qu'on aura

$$\int[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int\varphi(x)\,dx-\int\psi(x)\,dx.$$

En effet, la différentielle d'une somme algébrique s'obtient en différentiant chaque terme : donc celle du second membre sera

$$d\int f(x)\,dx+d\int\varphi(x)\,dx-d\int\psi(x)\,dx,$$

c'est-à-dire

$$f(x)\,dx+\varphi(x)\,dx-\psi(x)\,dx=[f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx,$$

différentielle qui est bien la quantité à intégrer, placée sous le signe $\int$ dans le premier membre.

226. — Troisième règle : transport des facteurs constants hors du signe $\int$.

L'intégrale du produit d'un facteur constant par un facteur variable s'obtient en faisant sortir le facteur constant du signe de l'intégration, c'est-à-dire en multipliant par ce facteur constant l'intégrale du facteur variable.

Je dis que, si a, par exemple, désigne un facteur constant, on aura

$$\int a f(x)\,dx=a\int f(x)\,dx.$$

La raison en est que la différentielle du produit d'un facteur constant, a, par un facteur variable, $\int f(x)\,dx$, égale le produit du fac-

teur constant par la différentielle, $f(x)\,dx$, du facteur variable et n'est autre, en conséquence, que $af(x)\,dx$. Ainsi, le second membre exprime bien l'intégrale $\int af(x)\,dx$, puisqu'il a pour différentielle $af(x)\,dx$.

Observons qu'il est inutile d'ajouter explicitement au second membre, tant dans cette formule que dans celle du numéro précédent, la constante arbitraire que comporte toute intégrale indéfinie; car ce second membre contient lui-même l'indication d'une intégration indéfinie qui, dans chaque cas particulier où on l'effectuera, introduira la constante voulue.

227. — Application des trois règles précédentes aux différentielles de forme entière.

Les trois règles précédentes suffisent pour intégrer une foule de différentielles, très importantes, notamment celles qui sont de la forme $(Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots)\,dx$, A, B, C, ..., α, β, γ, ... désignant des quantités constantes quelconques. L'application de la deuxième règle donne d'abord, pour l'intégrale de cette expression,

$$\int Ax^\alpha\,dx + \int Bx^\beta\,dx + \int Cx^\gamma\,dx + \ldots,$$

formule que la troisième règle transforme en celle-ci

$$A\int x^\alpha\,dx + B\int x^\beta\,dx + C\int x^\gamma\,dx + \ldots.$$

Enfin, la première règle, d'après laquelle l'intégrale $\int x^m\,dx$ vaut $\frac{x^{m+1}}{m+1}$, achève de conduire au résultat, et il vient

$$\left\{\begin{aligned} &\int (Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots)\,dx \\ &\quad = A\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + B\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} + C\frac{x^{\gamma+1}}{\gamma+1} + \ldots + \text{const.} \end{aligned}\right.$$

228*. — Sommation des différences finies exprimées par une fonction entière d'une variable dont les valeurs successives sont équidistantes; application à des sommes de carrés et de cubes.

(Compléments, p. 18*.)

229. — Quatrième règle : intégration par substitution.

La quatrième règle, relative à ce qu'on appelle le procédé d'*intégration par substitution,* consiste à remplacer la variable x, entrant dans la différentielle donnée $f(x)\,dx$, par une nouvelle variable, t, liée à x, et choisie de manière à simplifier assez cette différentielle

pour la rendre intégrable au moyen des autres règles ou procédés. Appelons, en effet, t une fonction quelconque de x, et donnons-nous, sous la forme $x = \varphi(t)$, la relation qui la définira. Si dt désigne l'accroissement de t correspondant à un accroissement infiniment petit dx de x, on déduira, de $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$; et il viendra

$$f(x)\,dx = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Une même différentielle recevra donc une infinité d'expressions différentes, suivant la nouvelle variable t qu'on y introduira; et il pourra bien se faire que, parmi ces expressions, inégalement compliquées, quelqu'une soit intégrable. Il est vrai que, si la première variable x se trouve donnée comme indépendante et a toutes ses différentielles successives dx égales, la nouvelle, t, ne variera généralement pas d'une manière aussi simple. Mais l'intégration, se distinguant, en cela, d'une sommation de différences finies, n'en est rendue ni plus, ni moins difficile; car la différentielle d'une fonction $F(t)$ est aussi bien $F'(t)\,dt$ quand t dépend, suivant une loi continue quelconque, d'une ou de plusieurs variables, que lorsque t est indépendant.

Supposons donc que l'intégrale de $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ puisse être obtenue, et appelons-la $F(t)$. On aura

$$\int f(x)\,dx = F(t) + \text{const.};$$

et il ne restera plus qu'à remplacer, dans le résultat, t par sa valeur en x tirée de l'équation de condition $x = \varphi(t)$.

230. — Premier exemple : intégration d'un produit de la forme $\cos(ax+b)\cos(a'x+b')\cos(a''x+b'')\ldots dx$.

Comme premier exemple de l'intégration par substitution, considérons une différentielle de la forme $f(ax+b)\,dx$, f désignant une fonction quelconque et a, b deux constantes ou $ax+b$ une fonction linéaire. Prenons le binôme $ax+b$ pour nouvelle variable, en posant

$$ax + b = t; \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{t-b}{a} \qquad \text{et} \qquad dx = \frac{dt}{a}\cdot$$

La différentielle $f(ax+b)\,dx$ deviendra $\frac{1}{a}f(t)\,dt$, et il suffira, comme on voit, de savoir intégrer l'expression $f(t)\,dt$ pour que la proposée s'intègre elle-même.

Supposons, par exemple, que $f(ax+b)$ soit le cosinus ou le sinus d'une fonction linéaire de x. On pourra, pour fixer les idées, admettre

toujours que ce soit un cosinus; car, si c'était un sinus, on poserait $\sin(ax+b)=\cos\left(ax+b-\frac{\pi}{2}\right)$, expression où $ax+b-\frac{\pi}{2}$ est, comme $ax+b$, une fonction linéaire, dans laquelle seulement le terme constant b se trouve diminué de $\frac{\pi}{2}$. On aura donc, dans les deux cas, à intégrer une différentielle comme

$$\cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\cos t\,dt=d\,\frac{\sin t}{a}=d\,\frac{\sin(ax+b)}{a};$$

en sorte que le résultat sera

$$(21)\qquad \int\cos(ax+b)\,dx=\frac{\sin(ax+b)}{a}+\text{const.}$$

On ramène à la différentielle $\cos(ax+b)dx$ tout produit de dx par un nombre quelconque de sinus ou cosinus d'arcs fonctions linéaires de x. Supposons, en effet, qu'on mette un tel produit sous la forme

$$\cos(ax+b)\cos(a'x+b')\cos(a''x+b'')\ldots\,dx.$$

En appliquant la formule trigonométrique connue

$$\cos p\cos q=\frac{1}{2}\cos(p+q)+\frac{1}{2}\cos(p-q)$$

au produit des deux premiers facteurs $\cos(ax+b)$ et $\cos(a'x+b')$, on remplacera ce produit par la demi-somme des cosinus des arcs

$$(a+a')x+(b+b'),\quad (a-a')x+(b-b'),$$

lesquels sont linéaires comme les proposés. Chacun des termes ainsi obtenus, multiplié à son tour par le facteur suivant $\cos(a''x+b'')$, donnera des termes encore de même forme; et ainsi de suite. Finalement, le produit de tous les cosinus donnés se trouvera transformé en une somme de termes dont chacun égalera, à un facteur constant près, un cosinus de même forme. L'intégration proposée sera donc ramenée à celle d'expressions telles que $\cos(\mathrm{A}x+\mathrm{B})dx$, dont l'intégrale est, comme on sait, $\frac{\sin(\mathrm{A}x+\mathrm{B})}{\mathrm{A}}$.

231. — Deuxième exemple : intégration de $\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$.

Soit, comme deuxième exemple, l'expression $\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, où α et β désignent deux constantes quelconques. De toutes les différentielles

simples que la première règle permet d'intégrer, celle qui se rapproche le plus de la proposée est visiblement $\frac{dx}{x^2+1}$ ou, en changeant le nom de la variable, $\frac{dt}{t^2+1}$, dont l'intégrale est arc tang t. Cherchons donc si, par une substitution convenable, nous ne pourrions pas ramener notre différentielle à celle-ci. Et d'abord, nous réduirons le terme constant, β^2, du dénominateur, à la valeur 1 que nous nous proposons de lui faire acquérir dans la transformation, si nous mettons, au dénominateur, β^2 en facteur commun; ce qui nous donnera

$$\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}\,\frac{dx}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}.$$

Nous voyons actuellement, en laissant de côté le facteur constant $\frac{1}{\beta^2}$, que le dénominateur sera, comme nous le désirons, t^2+1, si nous posons

$$t = \frac{x-\alpha}{\beta}; \qquad \text{d'où} \qquad x-\alpha = \beta t \qquad \text{et} \qquad dx = \beta\,dt.$$

Donc la différentielle proposée devient

$$\frac{1}{\beta^2}\,\frac{\beta\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{\beta}\,\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{\beta}\,d\operatorname{arc\,tang} t = \frac{1}{\beta}\,d\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta};$$

et l'on a, finalement,

$$(22) \qquad \int\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\operatorname{arc\,tang}\frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.}$$

232. — Troisième exemple : intégration de $\frac{dx}{\sqrt{\beta^2-(x-\alpha)^2}}$.

Ici, nous remarquons que l'expression donnée, $\frac{dx}{\sqrt{\beta^2-(x-\alpha)^2}}$, se rapproche assez, pour la forme, de $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ou de $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, dont l'intégrale est arc sin t quand l'arc qui y figure se trouve compris, comme nous le supposerons, entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Nous mettrons en facteur commun, ainsi que nous l'avons fait dans l'exemple précédent, le terme β^2 auquel nous désirons substituer l'unité; et il viendra

$$\frac{dx}{\sqrt{\beta^2-(x-\alpha)^2}} = \frac{1}{\beta}\,\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}}.$$

Nous poserons donc encore $\frac{x-\alpha}{\beta}=t$, $dx=\beta\,dt$; ce qui réduira notre différentielle à $\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ou à d arc sin t. Et l'intégrale demandée sera

$$(23)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{\beta^2-(x-\alpha)^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x-\alpha}{\beta} + \text{const.}$$

233. — Quatrième exemple : différentielles de la forme $f(\sin x, \cos x)\,dx$.

Un changement de variables permet souvent de rendre algébrique une différentielle transcendante. Par exemple, une expression de la forme $f(\sin x, \cos x)\,dx$, où f désigne une fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$, devient une différentielle algébrique et même rationnelle quand on adopte, pour nouvelle variable t, la tangente de $\frac{x}{2}$. En effet, la relation $\text{tang}\frac{x}{2}=t$ donne

$$\left\{\begin{aligned} \cos\frac{x}{2} &= \pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2\frac{x}{2}}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\\ \sin\frac{x}{2} &= \pm\frac{\text{tang}\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\text{tang}^2\frac{x}{2}}} = \pm\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\\ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} &= \frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2};\end{aligned}\right.$$

et d'ailleurs, en différentiant cette même relation $\text{tang}\frac{x}{2}=t$, il vient

$$\frac{\frac{1}{2}\,dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = dt,\qquad \text{d'où}\qquad dx = 2\cos^2\frac{x}{2}\,dt = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

On aura donc

$$(24)\qquad f(\sin x, \cos x)\,dx = f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

différentielle rationnelle en t et qu'on pourra toujours intégrer par des procédés dont il sera parlé dans la prochaine Leçon.

Mais divers artifices dispensent souvent de recourir à cette substitution assez compliquée de $\text{tang}\frac{x}{2}$ à x dans le rôle de variable.

Soit, par exemple, l'expression $\frac{dx}{1 + a\cos^2 x}$. En la divisant *haut et bas* par $\cos^2 x$, elle deviendra $\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{a + \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{d\,\text{tang}\,x}{a + 1 + \text{tang}^2 x}$. Si donc on pose ici $\text{tang}\,x = t$ et $a + 1 = \beta^2$, la différentielle à intégrer sera $\frac{dt}{\beta^2 + t^2}$. Elle se trouve comprise dans celle-ci, déjà étudiée (n° 231, p. 24), $\frac{dt}{(t - \alpha)^2 + \beta^2}$, dont l'intégrale est $\frac{1}{\beta}\,\text{arc tang}\,\frac{t - \alpha}{\beta}$. Par suite, on aura, pour l'intégrale cherchée, $\frac{1}{\beta}\,\text{arc tang}\,\frac{t}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{a+1}}\,\text{arc tang}\,\frac{t}{\sqrt{a+1}}$ ou enfin, en ajoutant d'ailleurs une constante arbitraire,

$$(25) \qquad \int \frac{dx}{1 + a\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{a+1}}\,\text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,x}{\sqrt{a+1}}\right) + \text{const.}$$

Soit encore la différentielle $\sin^m x \cos^n x\,dx$, où m et n désignent deux exposants entiers, positifs ou négatifs. Nous verrons bientôt comment on peut ramener son intégration à celle d'une différentielle de même forme, mais dans laquelle chacun des deux nombres m, n a les valeurs les plus simples possibles, qui sont zéro, 1, ou -1. Or voici comment on l'intègre directement, pour ces valeurs de m, n, sans recourir à la transformation générale consistant à prendre dès l'abord $\text{tang}\,\frac{x}{2}$ pour nouvelle variable. Suivant que m est nul, égal à 1, ou égal à -1, on a les trois types $\cos^n x\,dx$, $\sin x \cos^n x\,dx$, $\frac{\cos^n x\,dx}{\sin x}$, dont chacun se subdivise lui-même en trois puisque n peut y être ou zéro, ou 1, ou -1; et les différentielles à intégrer, rangées par ordre de difficulté croissante (comme on va voir), sont

$$(26) \qquad \left\{\begin{array}{l} dx, \quad \cos x\,dx, \quad \sin x\,dx, \quad \sin x \cos x\,dx, \\ \frac{\cos x\,dx}{\sin x}, \quad \frac{\sin x\,dx}{\cos x}, \quad \frac{dx}{\sin x \cos x}, \quad \frac{dx}{\sin x}, \quad \frac{dx}{\cos x}. \end{array}\right.$$

Les trois premières ont pour intégrales, respectivement, x, $\sin x$, $-\cos x$. La quatrième et la cinquième, si l'on y pose $\sin x = t$ (d'où $\cos x\,dx = dt$), deviennent $t\,dt$, $\frac{dt}{t}$: leurs intégrales sont donc $\frac{t^2}{2}$, $\log t$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\sin^2 x$, $\log \sin x$. La sixième, en y faisant $\cos x = t$ (d'où $\sin x\,dx = -dt$), devient de même $-\frac{dt}{t}$ et a pour intégrale

$-\log t$, ou $-\log\cos x$. La septième, $\frac{dx}{\sin x\cos x}$, si l'on divise les deux termes de la fraction par $\cos^2 x$, prend la forme

$$\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{d\,\mathrm{tang}\,x}{\mathrm{tang}\,x} = d\log\mathrm{tang}\,x,$$

et elle a, par suite, pour intégrale, $\log\mathrm{tang}\,x$. La huitième, $\frac{dx}{\sin x}$, en y posant $x=2t$ (d'où $dx=2\,dt$), devient $\frac{2\,dt}{\sin 2t}=\frac{dt}{\sin t\cos t}$; ce qui la ramène à la forme de la précédente et donne comme intégrale $\log\mathrm{tang}\,t$ ou $\log\mathrm{tang}\frac{x}{2}$. Enfin la neuvième et dernière, $\frac{dx}{\cos x}$, équivaut à $\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{d\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{d\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$, c'est-à-dire à $\frac{dt}{\sin t}$ si l'on prend $t=\frac{\pi}{2}+x$; et celle-ci, étant de la forme $\frac{dx}{\sin x}$, a l'intégrale

$$\log\mathrm{tang}\frac{t}{2} = \log\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

Ainsi, il suffira bien, pour pouvoir intégrer l'expression

$$\sin^m x\cos^n x\,dx,$$

quand m et n égaleront des entiers quelconques, de la ramener aux cas où chacun de ces exposants aura l'une des deux valeurs absolues 0, 1.

234. — Cinquième règle : intégration par parties.

Enfin, une des grandes ressources du Calcul intégral est ce qu'on appelle l'*intégration par parties*. Ce procédé, que Fermat et Pascal, dès le milieu du XVII[e] siècle, c'est-à-dire avant l'organisation même de l'Analyse infinitésimale par Leibnitz, connaissaient déjà et employaient fréquemment, s'applique à des différentielles dont l'intégration n'est empêchée que par la présence d'un facteur variable, dit *facteur non intégré;* il permet de réduire l'intégrale cherchée à une autre souvent plus simple. Voici en quoi il consiste.

Supposons que la différentielle donnée soit de la forme $\varphi(x)f(x)\,dx$, et que le facteur $\varphi(x)$, seul, fasse obstacle à la sommation, ou, ce qui revient au même, que le produit $f(x)\,dx$ des autres facteurs égale la

différentielle d'une fonction connue de x. Désignons par v cette fonction, intégrale de $f(x)\,dx$; et appelons-la *facteur intégré,* par opposition au facteur *non intégré* $\varphi(x)$, que nous désignerons de même par u. L'expression donnée $\varphi(x)\,f(x)\,dx$ étant ainsi mise sous la forme $u\,dv$, la règle de l'intégration par parties consiste à prendre $\int u\,dv = uv - \int v\,du$, et s'énonce en disant que *l'intégrale cherchée égale le produit du facteur non intégré par le facteur intégré, moins l'intégrale de ce facteur intégré multiplié par la différentielle du facteur non intégré.* En effet, l'expression $uv - \int v\,du$ est bien l'intégrale de $u\,dv$, puisque sa différentielle, $d(uv) - v\,du$, ou $(u\,dv + v\,du) - v\,du$, se réduit identiquement à $u\,dv$.

Le calcul de $\int u\,dv$ se trouvera donc ramené à celui de $\int v\,du$. Observons d'ailleurs, comme nous l'avons fait dans une circonstance analogue (p. 21), qu'il est ordinairement inutile d'ajouter au second membre $uv - \int v\,du$ une constante arbitraire, vu qu'une telle constante se trouve déjà implicitement contenue dans le terme $-\int v\,du$.

235. — Premier exemple : différentielles transcendantes se ramenant à d'autres algébriques; application à $\int x^m \log x\,dx$ et à $\int x^m (\log x)^n\,dx$.

Parmi les cas où l'intégration par parties a chance de réussir, un des plus remarquables est celui où, le facteur intégré v se trouvant algébrique, le facteur non intégré u est *une fonction transcendante,* mais *de celles qui ont leur dérivée algébrique,* comme $\log x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, ... Car alors la différentielle proposée $u\,dv$ est *transcendante,* tandis que celle à laquelle on la ramène, $v\,du$, est *algébrique.*

Soit, par exemple, l'expression $x^m \log x\,dx$, immédiatement intégrable dans le cas unique $m = -1$ où elle équivaut à

$$\log x\,d\log x = d\frac{(\log x)^2}{2}.$$

Ce cas $m = -1$ étant ainsi écarté, on voit de suite que le facteur $\log x$ empêche seul d'intégrer, puisque, sans ce facteur, on aurait $x^m\,dx = d\frac{x^{m+1}}{m+1}$ et que l'intégrale serait $\frac{x^{m+1}}{m+1}$. On posera donc

$$\int x^m \log x\,dx = \int \log x\,d\frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{m+1}\int \log x d.x^{m+1},$$

et, par suite, abstraction faite du facteur constant $\frac{1}{m+1}$, $u = \log x$, $v = x^{m+1}$; d'où $du = \frac{dx}{x}$, $v\,du = x^m\,dx$. Ainsi, il viendra successi-

vement

$$(27)\quad \begin{cases} \int x^m \log x \, dx = \dfrac{1}{m+1} x^{m+1} \log x - \dfrac{1}{m+1} \int x^m \, dx \\ \qquad = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} \left(\log x - \dfrac{1}{m+1} \right) + \text{const.} \end{cases}$$

Le même procédé, mais répété, pourrait encore aboutir, si le facteur non intégré u était une fonction entière quelconque d'une transcendante à dérivée algébrique; car cette fonction entière se trouverait évidemment remplacée, dans la nouvelle différentielle $v\,du$, par sa dérivée, dont le degré est moindre de 1 que le sien; puis le même genre de réduction, s'il était applicable à $\int v\,du$, abaisserait d'une deuxième unité l'exposant le plus élevé de la transcendante, et ainsi de suite, jusqu'à réduction du degré à zéro ou de la fonction à un simple facteur constant.

Par exemple, $\int x^m (\log x)^n \, dx$, sauf encore dans le cas $m = -1$ où $x^m (\log x)^n \, dx = (\log x)^n \, d \log x$ est immédiatement intégrable, s'écrira $\dfrac{1}{m+1} \int (\log x)^n \, d.x^{m+1}$; et, en posant $(\log x)^n = u$, $x^{m+1} = v$ [d'où $v\,du = n x^m (\log x)^{n-1} \, dx$], il viendra

$$(28)\quad \int x^m (\log x)^n \, dx = \frac{x^{m+1} (\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\log x)^{n-1} \, dx.$$

L'intégration de $x^m (\log x)^n \, dx$ se trouve donc ramenée à celle de la différentielle de même forme $x^m (\log x)^{n-1} \, dx$, où l'exposant de $\log x$ est moindre de 1. Il est clair que, si n a une valeur entière et positive, n intégrations analogues par parties la réduiront à $x^m \, dx$ ou permettront de l'intégrer.

236. — Deuxième exemple : calcul de $\int f(x) e^x dx$, $\int f(x) \cos x \, dx$, $\int f(x) \sin x \, dx$.

Quand la différentielle proposée contient encore un facteur transcendant, mais ayant sa fonction primitive facile à obtenir, il peut y avoir avantage à prendre celle-ci comme facteur intégré, pourvu que, d'ailleurs, le facteur non intégré ait sa dérivée assez simple.

Soient, comme exemples, les expressions

$$\int f(x) e^x \, dx, \quad \int f(x) \cos x \, dx, \quad \int f(x) \sin x \, dx,$$

où les facteurs transcendants e^x, $\cos x$, $\sin x$ ont pour fonctions primitives e^x, $\sin x$, $-\cos x$, et où la dérivée de l'autre facteur $f(x)$ sera

plus simple qu'il ne l'est lui-même, si on le suppose fonction entière de x.

En posant donc $u = f(x)$ [d'où $du = f'(x)\,dx$], et $v =$ soit e^x, soit $\sin x$, soit $-\cos x$, il viendra

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \int f(x)e^x\,dx &= f(x)e^x - \int f'(x)e^x\,dx,\\ \int f(x)\cos x\,dx &= f(x)\sin x - \int f'(x)\sin x\,dx,\\ \int f(x)\sin x\,dx &= -f(x)\cos x + \int f'(x)\cos x\,dx.\end{aligned}\right.$$

On voit que les trois intégrales proposées sont ramenées à d'autres de mêmes formes, mais où le polynôme $f(x)$, d'un certain degré m, se trouve remplacé par sa dérivée, dont le degré n'est plus que $m-1$. Le même procédé, appliqué à ces nouvelles intégrales, les réduira pareillement à d'autres où le polynôme placé sous le signe $\int$, $f''(x)$, ne sera plus que du degré $m-2$; et ainsi de suite, jusqu'à ce que, après m opérations, le polynôme étant devenu $f^{(m)}(x)$, c'est-à-dire un simple facteur constant, et pouvant dès lors sortir du signe $\int$, les expressions, restées sous ce signe, $e^x\,dx$ et $\cos x\,dx$ ou $\sin x\,dx$, soient immédiatement intégrables.

Observons que, si, dans les intégrales $\int f(x)e^x\,dx$, $\int f(x)\cos x\,dx$, $\int f(x)\sin x\,dx$, on pose soit $e^x = t$, soit $\sin x = t$, soit $\cos x = t$ (d'où $x =$ soit $\log t$, soit $\arcsin t$, soit $\arccos t$), elles prennent les formes respectives $\int f(\log t)\,dt$, $\int f(\arcsin t)\,dt$, $-\int f(\arccos t)\,dt$. Celles-ci sont donc elles-mêmes évaluables d'une manière finie, comme il était du reste évident pour la première, composée de termes de la forme $A\int(\log x)^n\,dx$ qu'on vient d'intégrer.

237. — Troisième exemple : réduction de $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$.

Nous avons vu tout à l'heure (pp. 26 et 27) comment l'expression $\sin^m x\cos^n x\,dx$ s'intègre quand les exposants m, n sont ou nuls, ou égaux à l'unité en valeur absolue. Il suffira donc, si l'on veut calculer l'intégrale $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ pour tous les cas où m, n sont entiers, de la ramener à d'autres de même forme, mais où les exposants aient deux unités de moins en valeur absolue; car ce genre de réduction, appliqué un nombre suffisant de fois, rendra finalement les entiers m et n moindres que 2 en valeur absolue, c'est-à-dire égaux, chacun, à zéro, à $+1$, ou à -1. Or on y arrive, justement, au moyen de l'intégration par parties.

Supposons, par exemple, qu'on veuille réduire de deux unités l'exposant du sinus. Alors on prendra pour facteur non intégré $\sin^{m-1} x$

et, conséquemment, pour facteur intégré,

$$\int \sin x \cos^n x\,dx = -\int \cos^n x\,d\cos x = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$$

Il viendra successivement

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x\,dx &= -\frac{1}{n+1}\int \sin^{m-1} x\,d\cos^{n+1} x \\ &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int \cos^{n+1} x\,d\sin^{m-1} x \\ &= -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx. \end{aligned}\right.$$

Cette relation ramène, comme on voit, $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ à

$$\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx;$$

mais, quand on la résout par rapport à l'intégrale

$$\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx,$$

elle ramène, au contraire, celle-ci à la première, $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$. Donc si, dans la proposée, les exposants diffèrent de signe et sont tous les deux égaux ou supérieurs à 2 en valeur absolue, on les réduira de deux unités par l'application de la formule (30), soit prise sous sa forme (30) si l'exposant du sinus est positif et, celui du cosinus, négatif, soit résolue par rapport à $\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\,dx$, et transformée par les changements de $m-2$ en m et de $n+2$ en n, dans le cas opposé de m négatif et n positif.

Mais, quand, au contraire, les exposants m, n ont même signe, ou signes différents avec des valeurs absolues ne dépassant pas toutes les deux l'unité, il y a lieu de réduire l'un quelconque d'entre eux pourvu qu'il soit supérieur à 1, sans toucher à l'autre. Supposons, par exemple, que ce soit l'exposant du sinus qu'on veuille diminuer de deux unités. Il suffira de remplacer, dans le dernier terme de (30), $\cos^{n+2} x$ par $\cos^n x(1-\sin^2 x)$, ou de dédoubler ce terme en les deux suivants, $\frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx$ et $-\frac{m-1}{n+1}\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, puis, de faire passer le nouveau dernier terme dans le premier membre pour le joindre au terme semblable qui s'y trouve déjà. En multipliant enfin toute l'égalité par $n+1$, il viendra la formule

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &(m+n)\int \sin^m x \cos^n x\,dx \\ &\qquad = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1)\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx, \end{aligned}\right.$$

qui, pour m positif, ramènera $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ à $\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx$

et qui, pour m et $m-2$ négatifs, permettra de ramener, au contraire, l'intégrale $\int \sin^{m-2} x \cos^n x\,dx$ à $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, où la valeur absolue de l'exposant du sinus se trouvera également diminuée de deux unités.

On réduirait l'exposant du cosinus en opérant de même, après avoir pris, dans $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, pour facteur non intégré, $\cos^{n-1} x$ et, pour facteur intégré, $\int \sin^m x \cos x\,dx = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$, puis en remplaçant, dans l'intégrale obtenue au second membre, $\sin^{m+2} x$ par $\sin^m x(1-\cos^2 x)$.

Supposons, par exemple, que $n=0$ et que m soit un nombre entier positif supérieur à 1. Alors la formule (31), divisée par m, deviendra

$$(32) \qquad \int \sin^m x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x\,dx.$$

Elle permettra, comme on voit, d'abaisser successivement l'exposant m d'autant de fois deux unités qu'on le voudra, de manière à le réduire finalement à zéro ou à 1; et alors l'expression à intégrer, dx ou $\sin x\,dx$, donnera soit $\int dx = x + c$, soit $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

238. — Quatrième exemple : calcul de $\int e^{-ax} \cos bx\,dx$ et de $\int e^{-ax} \sin bx\,dx$.

Pour abréger, appelons I la première des intégrales proposées, $\int e^{-ax} \cos bx\,dx$, et J la seconde, $\int e^{-ax} \sin bx\,dx$. Prenons-y, pour facteur non intégré, $\cos bx$, dans la première, $\sin bx$, dans la deuxième, et, par suite, dans les deux cas, pour facteur intégré,

$$\int e^{-ax}\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a}.$$

Nous aurons donc successivement, en multipliant par a,

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} a\mathrm{I} &= -\int \cos bx\,de^{-ax} = -e^{-ax} \cos bx + \int e^{-ax}\,d\cos bx \\ &= -e^{-ax} \cos bx - b\int e^{-ax} \sin bx\,dx, \\ a\mathrm{J} &= -\int \sin bx\,de^{-ax} = -e^{-ax} \sin bx + \int e^{-ax}\,d\sin bx \\ &= -e^{-ax} \sin bx + b\int e^{-ax} \cos bx\,dx. \end{aligned} \right.$$

Les intégrales sur lesquelles on tombe dans les derniers membres ne sont autres que J et I, à des constantes arbitraires près; d'où il suit, en appelant $-\frac{c}{b}, \frac{c'}{b}$ ces constantes, que les relations obtenues (33) équivalent, par la transposition des parties variables des derniers

termes, aux deux équations, du premier degré en I et J,

$$(34)\quad a\mathrm{I}+b\mathrm{J}=-e^{-ax}\cos bx+c,\qquad -b\mathrm{I}+a\mathrm{J}=-e^{-ax}\sin bx+c'.$$

Il suffit, pour en déduire I et J, d'ajouter ces deux équations, après les avoir respectivement multipliées, soit par a et par $-b$, soit par b et par a. Si l'on divise enfin par a^2+b^2, il vient, en remarquant que $\dfrac{ac-bc'}{a^2+b^2}$ et $\dfrac{bc+ac'}{a^2+b^2}$ sont deux constantes quelconques,

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} \int e^{-ax}\cos bx\,dx &= -\frac{a\cos bx-b\sin bx}{a^2+b^2}e^{-ax}+\text{const.},\\ \int e^{-ax}\sin bx\,dx &= -\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}+\text{const.}\end{aligned}\right.$$

On peut juger, par cet exemple et par ceux qui précèdent, combien est précieuse, dans une foule de cas, l'intégration par parties. Ce procédé et celui de substitution sont les deux principales ressources du Calcul intégral.

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

APPLICATION DES PROCÉDÉS GÉNÉRAUX A L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES LES PLUS SIMPLES.

---

239. — Différentielles rationnelles : de leur décomposition en termes ou en fractions aussi simples que possible.

Restreignons-nous maintenant aux différentielles algébriques, pour en faire une étude moins sommaire, et occupons-nous, en premier lieu, des différentielles rationnelles, les seules que l'on sache intégrer dans tous les cas.

On appelle *différentielle rationnelle* toute différentielle algébrique dans l'expression de laquelle n'entre aucun radical ou exposant fractionnaire portant sur la variable. En y effectuant les calculs, on la réduit toujours au produit de la différentielle, dx, de cette variable, par une *fraction rationnelle* (t. I, p. 25), c'est-à-dire par le quotient, $\frac{F(x)}{f(x)}$, de deux polynômes $F(x)$, $f(x)$. J'appellerai n le degré du dénominateur $f(x)$, et je supposerai qu'en divisant préalablement les deux termes de la fraction par le coefficient de x^n dans le dénominateur, on ait rendu égal à l'unité ce coefficient. Si donc $F(x)$, $f(x)$ sont ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, l'expression de $f(x)$ aura la forme

$$f(x) = x^n + Kx^{n-1} + Lx^{n-2} + \ldots + M.$$

Cela posé, pour rendre intégrable la différentielle $\frac{F(x)}{f(x)}dx$, il suffira évidemment qu'on sache y décomposer la fraction complexe $\frac{F(x)}{f(x)}$ en termes plus simples, dont les fonctions primitives puissent s'obtenir séparément au moyen des règles de la dernière Leçon.

A cet effet, si l'expression $\frac{F(x)}{f(x)}$ n'est pas une fraction proprement dite, c'est-à-dire que le numérateur $F(x)$ s'y trouve d'un degré aussi élevé ou plus élevé que celui, n, du dénominateur $f(x)$, on divisera d'abord $F(x)$ par $f(x)$, jusqu'à ce qu'on obtienne un reste, $\varphi(x)$, du

degré $n-1$ au plus. On aura donc extrait de la fraction proposée un certain polynôme, constituant la *partie entière* que cette fraction contenait, et le quotient se complétera par la *fraction proprement dite* $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, dont il nous reste à nous occuper pour la subdiviser en fractions aussi élémentaires que possible.

Dans ce but, nous commencerons par résoudre complètement, au moyen des procédés de l'Algèbre, l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré $f(x)=0$, afin de décomposer $f(x)$ en ses facteurs réels du premier ou du second degré. Nous savons : 1° qu'aux diverses racines réelles simples, que j'appellerai $a, b, \ldots$, il correspondra tout autant de facteurs du premier degré, savoir $x-a, x-b, \ldots$; 2° qu'à chaque racine réelle multiple, c par exemple, d'un certain degré de multiplicité p, il correspondra le facteur $(x-c)^p$; 3° enfin, qu'à chaque couple de racines imaginaires conjuguées, de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, il correspondra le facteur réel du second degré

$$(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})=(x-\alpha)^2+\beta^2,$$

en sorte que, si q désigne le degré de multiplicité de ce couple de racines conjuguées, $f(x)$ sera divisible par $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q$. Donc, quand on connaîtra toutes les racines réelles simples $a, b, \ldots$, toutes les racines réelles multiples $c, \ldots$, ainsi que leurs degrés respectifs de multiplicité $p, \ldots$, et tous les couples de racines imaginaires $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}, \ldots$, avec leurs degrés analogues de multiplicité $q, \ldots$, on pourra mettre le dénominateur $f(x)$ de la fraction sous la forme

$$f(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-c)^p\ldots[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q\ldots;$$

et il est évident que le degré, n, de $f(x)$, égalera le nombre des facteurs du premier degré $x-a, x-b, \ldots, x-c, x-c, \ldots$, plus le double du nombre des facteurs du second degré $(x-\alpha)^2+\beta^2, \ldots$, c'est-à-dire, en tout, le nombre des racines tant imaginaires que réelles de l'équation $f(x)=0$, chacune comptant pour autant que l'indique son degré de multiplicité.

Actuellement, l'expression considérée $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, avec son numérateur $\varphi(x)$ d'un degré moindre que le dénominateur et son dénominateur égal au produit des facteurs $x-a, x-b, \ldots, (x-c)^p, \ldots, [(x-\alpha)^2+\beta^2]^q, \ldots$, se trouve avoir justement la forme de la fraction qu'on obtient, toutes les fois qu'on ajoute ensemble des fractions ayant comme dénominateurs ces facteurs respectifs et ayant leurs

numérateurs de degrés moindres que leurs dénominateurs. En effet, de telles fractions, quand on les réduit au dénominateur commun $f(x)$ en multipliant leurs deux termes par les polynômes $\frac{f(x)}{x-a}$, $\frac{f(x)}{x-b}$, ..., $\frac{f(x)}{(x-c)^p}$, ..., acquièrent des numérateurs généralement du degré $n-1$, comme $\varphi(x)$, et la somme de ces numérateurs, numérateur de la somme des fractions, forme bien de même un polynôme analogue à $\varphi(x)$. Il est donc naturel de chercher à décomposer $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ en fractions plus simples, qui auraient pour dénominateurs, respectivement, $x-a$, $x-b$, ..., et dont les numérateurs, de degrés moindres, seraient : 1°, de simples constantes A, B, ... pour les fractions correspondant aux facteurs du premier degré; 2°, des polynômes de degrés $p-1$, $2q-1$ pour les fractions correspondant aux facteurs plus complexes $(x-c)^p$, $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q$, ...

Or ces dernières fractions peuvent elles-mêmes se décomposer en d'autres plus simples. Car si, par exemple, celle qui correspond au facteur $(x-c)^p$ est $\frac{\psi(x)}{(x-c)^p}$, où $\psi(x)$ désigne un polynôme du degré $p-1$, on pourra, en divisant $\psi(x)$ par $x-c$ et appelant d'une part Q le quotient de degré $p-2$, d'autre part C_p le reste constant, écrire $\psi(x)=Q(x-c)+C_p$, ou, par suite,

$$\frac{\psi(x)}{(x-c)^p}=\frac{Q}{(x-c)^{p-1}}+\frac{C_p}{(x-c)^p};$$

puis on extraira par le même procédé, de $\frac{Q}{(x-c)^{p-1}}$, une nouvelle fraction simple, de la forme $\frac{C_{p-1}}{(x-c)^{p-1}}$, analogue à $\frac{C_p}{(x-c)^p}$; et ainsi de suite, jusqu'à ce que la fraction $\frac{\psi(x)}{(x-c)^p}$ se trouve remplacée par une somme, $\frac{C_p}{(x-c)^p}+\frac{C_{p-1}}{(x-c)^{p-1}}+\ldots+\frac{C_2}{(x-c)^2}+\frac{C_1}{x-c}$, où les numérateurs $C_1, C_2, \ldots, C_p$ seront des nombres constants. De même, si $\chi(x)$ désigne le numérateur de la fraction correspondant au facteur $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q$, en divisant $\chi(x)$ par le trinôme du second degré $(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)$ et appelant Q le quotient, du degré $2q-3$, $D_q x+E_q$ le reste du premier degré, on aura

$$\chi(x)=Q[(x-\alpha)^2+\beta^2]+(D_q x+E_q);$$

et la fraction considérée, $\frac{\chi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}$, deviendra

$$\frac{Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}}+\frac{D_q x+E_q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}.$$

De la première de celles-ci, $\frac{Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}}$, on extraira pareillement une nouvelle fraction, de la forme $\frac{D_{q-1}x+E_{q-1}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}}$; et ainsi de suite, de manière à remplacer finalement la fraction complexe proposée $\frac{\chi(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}$ par d'autres, plus simples, ayant comme numérateurs des binômes du premier degré en x et pour dénominateurs les puissances successives, première, deuxième, etc. de $(x-\alpha)^2+\beta^2$, jusqu'à la $q^{\text{ième}}$ inclusivement.

En résumé, si A, B, C, ..., C_p, C_{p-1}, ..., C_1, ..., D_q, E_q, D_{q-1}, E_{q-1}, ..., D_1, E_1, ... désignent certains coefficients constants inconnus, on voit qu'il y a lieu de considérer les fractions

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{A}{x-a},\quad \frac{B}{x-b},\quad \dots,\quad \frac{C_p}{(x-c)^p},\quad \frac{C_{p-1}}{(x-c)^{p-1}},\quad \dots,\quad \frac{C_1}{x-c},\quad \dots,\\ \frac{D_q x+E_q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q},\quad \frac{D_{q-1}x+E_{q-1}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}},\quad \dots,\quad \frac{D_1 x+E_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2},\quad \dots, \end{array}\right.$$

et de chercher à déterminer les coefficients dont il s'agit de manière à rendre la somme de ces fractions identiquement égale à la fraction complexe proposée $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$. Alors, en effet, celle-ci se trouvera décomposée en fractions plus simples (1), dont chacune multipliée par dx s'intégrera assez facilement, comme nous verrons tout à l'heure.

240. — Calcul des fractions simples par la méthode des coefficients indéterminés.

En conséquence, réduisons toutes les fractions (1) au dénominateur commun $f(x)$, en multipliant leurs termes, respectivement, par les polynômes $\frac{f(x)}{x-a}$, $\frac{f(x)}{x-b}$, ..., $\frac{f(x)}{(x-c)^p}$, $\frac{f(x)}{(x-c)^{p-1}}$, ..., $\frac{f(x)}{x-c}$, ..., $\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}$, $\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}}$, ..., $\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, ...; puis, ajoutant leurs numérateurs pour en égaler la somme au poly-

nôme $\varphi(x)$ qui doit l'exprimer identiquement, posons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) = {} & A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + \ldots + C_p\frac{f(x)}{(x-c)^p} + C_{p-1}\frac{f(x)}{(x-c)^{p-1}} + \ldots \\ & + C_1\frac{f(x)}{x-c} + \ldots + (D_q x + E_q)\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q} \\ & + (D_{q-1}x + E_{q-1})\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}} + \ldots + (D_1 x + E_1)\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Les parties du second membre qui correspondent aux racines réelles de $f(x) = 0$ sont, comme les quotients $\frac{f(x)}{x-a}$, $\frac{f(x)}{x-b}$, ..., $\frac{f(x)}{(x-c)^q}$, ..., du degré $n-1$ en x, ou de degrés moindres; et les parties suivantes, produits de facteurs du premier degré par les quotients (de degrés $n-2q$, $n-2q+2$, ..., $n-2$, ...) $\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^q}$, $\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{q-1}}$, ..., $\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, ..., sont aussi, elles-mêmes, du degré $n-1$ ou de degrés moindres. Donc toutes ces expressions qui forment le second membre de (2), polynômes en x dont les coefficients contiennent linéairement les constantes indéterminées A, B, ..., C_p, ..., D_q, E_q, ..., donneront en tout un polynôme analogue à $\varphi(x)$, c'est-à-dire du degré $n-1$, mais où le coefficient de chaque puissance de x sera une somme de termes proportionnels aux diverses constantes A, B, ..., C_p, ... Et c'est cette somme, pour chacun des coefficients totaux des puissances, x^{n-1}, x^{n-2}, ..., x^2, x^1, x^0 ou 1, de x, qui devra, d'après la question posée, avoir la valeur numérique (fût-elle seulement zéro) du coefficient connu de la même puissance de x dans $\varphi(x)$.

L'identification des deux membres de (2) fournira donc n équations du premier degré entre les constantes A, B, ..., C_p, ... Or celles-ci sont justement au nombre de n, c'est-à-dire en même nombre que les racines de l'équation $f(x) = 0$, puisqu'il en correspond une, A, ou B, etc., à chaque racine réelle simple, qu'il en correspond p, savoir C_1, C_2, ..., C_p, à chaque racine réelle d'un degré p de multiplicité, et, enfin, $2q$, qui sont D_1, E_1, ..., D_q, E_q, à chaque couple de racines imaginaires d'un degré q de multiplicité. Ainsi le système de relations du premier degré obtenu entre les constantes A, B, ... se composera d'autant d'équations que d'inconnues; et l'on conçoit qu'il détermine parfaitement ces inconnues ou qu'il fournisse, sans ambiguïté, un système unique

de valeurs pour A, B, ..., C_p, ... C'est ce qu'un examen détaillé, mais dont la place est dans le cours d'Algèbre, prouve effectivement, à condition, bien entendu, que la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ soit irréductible, ou qu'on ait préalablement supprimé, comme on doit l'admettre, les facteurs réels du premier ou du second degré communs à $\varphi(x)$ et à $f(x)$, s'il s'en trouvait de tels. Il nous suffit ici de montrer comment s'obtiendront les coefficients A, B, ..., et, par suite, les fractions simples $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{x-b}$, ..., en résolvant un système de n équations du premier degré : c'est ce qu'un exemple achèvera bientôt d'éclaircir.

241*. — Formules générales des fractions simples, quand leurs numérateurs sont constants.

(Compléments, p. 20*.)

242. — Intégration des termes les moins complexes provenant de la décomposition de la différentielle rationnelle proposée.

En résumé, la décomposition de l'expression primitive donnée $\frac{F(x)}{f(x)}$ aura fourni trois sortes de termes, savoir : 1° des monômes comme Mx^m; 2° des fractions simples de la forme $\frac{C}{(x-c)^m}$; 3° d'autres fractions de la forme plus compliquée $\frac{Dx+E}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$. Il ne reste donc qu'à voir comment on intégrera les produits par dx de ces trois sortes de termes.

Et, d'abord, tout terme de la première espèce, Mx^m, donnera la différentielle $Mx^m\,dx$, dont l'intégrale sera $M\frac{x^{m+1}}{m+1}$.

Quant à un terme de la deuxième espèce, la différentielle correspondante, de la forme $\frac{M\,dx}{(x-c)^m}$, pourra s'écrire $M(x-c)^{-m}d(x-c)$ et aura pour intégrale, si m dépasse l'unité, $M\frac{(x-c)^{-m+1}}{-m+1}$, c'est-à-dire $-\frac{M}{(m-1)(x-c)^{m-1}}$. Au contraire, dans le cas beaucoup plus fréquent $m=1$ où, en appelant t la valeur absolue $\pm(x-c)$ de $x-c$, cette différentielle $M\frac{\pm\,dx}{\pm(x-c)}$ égalera $M\frac{dt}{t}$, l'intégrale sera $M\log t$,

c'est-à-dire $M\log(x-c)$, si $x-c$ est positif, et $M\log(c-x)$, si c'est, au contraire, $c-x$ qui est positif ([1]).

Soit, enfin, $\frac{(Dx+E)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$ la différentielle à laquelle conduit un terme de la troisième espèce. On la débarrasse d'abord de la partie du premier degré en x, au numérateur, en remplaçant $Dx+E$ par la quantité évidemment équivalente $D(x-\alpha)+(D\alpha+E)$; ce qui permet de dédoubler la différentielle en deux termes, dont l'un est $\frac{D(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}=\frac{D}{2}\,\frac{d[(x-\alpha)^2+\beta^2]}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$, et l'autre, $\frac{(D\alpha+E)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}$. Le premier, si l'on y pose $(x-\alpha)^2+\beta^2=t$, devient $\frac{D}{2}t^{-m}\,dt$ et a pour intégrale soit $-\frac{D}{2(m-1)t^{m-1}}$, c'est-à-dire

$$-\frac{D}{2(m-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}},$$

quand m dépasse l'unité, soit $\frac{D}{2}\log t$, c'est-à-dire $\frac{D}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2]$ ou $D\log\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, dans le cas ordinaire $m=1$.

Considérons donc le seul terme restant, qui est

$$\frac{(D\alpha+E)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}=\frac{(D\alpha+E)\,d(x-\alpha)}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m},$$

et divisons-y par β^{2m} le numérateur et le dénominateur. Le résultat pourra évidemment s'écrire $\frac{D\alpha+E}{\beta^{2m-1}}\;\frac{d\,\frac{x-\alpha}{\beta}}{\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]^m}$. Prenons-y enfin comme variable auxiliaire t le rapport $\frac{x-\alpha}{\beta}$, et, abstraction faite du facteur constant $\frac{D\alpha+E}{\beta^{2m-1}}$, ce terme aura la forme, aussi simple que

---

([1]) Cette double forme, $\log(x-c)$ et $\log(c-x)$, donnée à l'intégrale de $\frac{dx}{x-c}$, a pour but de ne faire figurer que des logarithmes *réels*, des logarithmes de nombres *positifs*. Mais en admettant aussi dans les formules le logarithme imaginaire le plus simple des nombres négatifs, celui qui dépasse de $\pi\sqrt{-1}$ le logarithme de la valeur absolue de ces nombres (t. I, p. 36*), on pourrait se contenter d'une seule des deux formes, puisque $\log(x-c)$ et $\log(c-x)$ ne diffèrent que par la constante $\pi\sqrt{-1}$ et ont la même partie variable avec x, ou s'équivalent en tant qu'intégrales indéfinies.

possible,

$$\frac{dt}{(t^2+1)^m}.$$

En définitive, il nous suffira, pour savoir intégrer toute différentielle rationnelle, d'obtenir l'expression de $\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$, où m désigne un exposant entier et positif quelconque.

243. – **Intégration des expressions plus compliquées auxquelles conduit la même décomposition, c'est-à-dire de $\frac{dt}{(1+t^2)^m}$; conclusion générale.**

Occupons-nous donc du calcul de $\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$. Dans le cas ordinaire et simple où $m=1$, cette intégrale s'obtient immédiatement, car elle se réduit à $\int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tang}\, t$. Il ne reste plus ainsi qu'à ramener les autres cas à celui-là, en apprenant à y abaisser l'exposant m d'une unité et, par suite, d'autant d'unités qu'il le faut pour le réduire à 1. A cet effet, cherchons comment $\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$ peut se calculer en fonction de $\int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}$. Pour abréger, appelons respectivement I_m, I_{m-1} ces deux intégrales, ou posons

$$I_m = \int \frac{dt}{(1+t^2)^m}, \qquad I_{m-1} = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}.$$

En retranchant I_{m-1} de I_m, nous aurons évidemment

$$\begin{cases} I_m - I_{m-1} = \int \left[\frac{dt}{(1+t^2)^m} - \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}\right] \\ \qquad = \int \frac{1-(1+t^2)}{(1+t^2)^m}\, dt = -\int t \frac{t\,dt}{(1+t^2)^m}. \end{cases}$$

Or $\frac{t\,dt}{(1+t^2)^m}$ ne diffère pas de $\frac{1}{2}(1+t^2)^{-m} d(1+t^2)$, qui est la différentielle de $\frac{1}{2}\frac{(1+t^2)^{-m+1}}{-m+1} = -\frac{1}{2m-2}\frac{1}{(1+t^2)^{m-1}}$. L'expression $-\int t \frac{t\,dt}{(1+t^2)^m}$ revient donc à $\frac{1}{2m-2}\int t\, d\frac{1}{(1+t^2)^{m-1}}$, et l'intégration par parties la transforme en celle-ci

$$\frac{1}{2m-2}\left[\frac{t}{(1+t^2)^{m-1}} - \int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}\right],$$

qui, à une constante arbitraire près, n'est autre que

$$\frac{t}{(2m-2)(1+t^2)^{m-1}} - \frac{I_{m-1}}{2m-2}.$$

L'égalité ci-dessus peut s'écrire, en conséquence,

$$I_m - I_{m-1} = \frac{t}{(2m-2)(1+t^2)^{m-1}} - \frac{1}{2m-2} I_{m-1} + \text{const. arbitraire.}$$

Si donc nous isolons I_m dans le premier membre et que nous groupions, dans le second, les termes en I_{m-1}, puis que nous remplacions I_m, I_{m-1} par leurs expressions $\int \frac{dt}{(1+t^2)^m}$ et $\int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}$, il viendra, en supposant d'ailleurs la constante arbitraire du second membre implicitement contenue dans le terme qui s'y trouve affecté du signe $\int$,

$$(11) \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^m} = \frac{t}{(2m-2)(1+t^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{m-1}}.$$

Telle est la formule qui, appliquée $m-1$ fois, permettra d'abaisser l'exposant m de $m-1$ unités, de manière à le réduire à la valeur 1. L'intégrale proposée I_m se trouvera ainsi exprimée au moyen de $m-1$ termes algébriques et d'un dernier terme, transcendant, en

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tang}\, t.$$

Il est bon d'observer à cet égard que, si l'on voulait ramener ce terme à $I_0 = \int \frac{dt}{(1+t^2)^0} = t + \text{const.}$, en posant $m=1$ dans (11), le dénominateur $2m-2$, qui paraît dans chacun des deux termes variables du second membre, s'annulerait et rendrait ce second membre illusoire, comme il est arrivé plus haut (p. 18) pour la relation

$$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c,$$

dans le cas $m=-1$. Il en est ainsi toutes les fois qu'on veut représenter *algébriquement* une fonction *transcendante*. L'expression dont celle-ci constitue un *cas limite* acquiert des coefficients ou des exposants infinis qui ne lui permettent de donner qu'une réponse en quelque sorte évasive, ou s'évanouissant dès qu'on lui impose d'être exacte et non plus seulement approchée.

En résumé, *les différentielles rationnelles peuvent toujours s'intégrer sous forme finie, en ce sens que leurs intégrales comprennent un nombre limité de termes soit algébriques, soit affectés des trans-*

cendantes les plus simples : les termes algébriques y sont rationnels et les termes transcendants y sont des fonctions inverses, logarithmes ou arcs tangente, d'expressions entières par rapport à la variable. Les arcs tangente y deviendront d'ailleurs des arcs sinus ou des arcs cosinus si l'on y fait paraître un sinus ou un cosinus au lieu de la tangente, en fonction de laquelle on sait que le sinus ou le cosinus du même arc s'expriment algébriquement.

Ces résultats remarquables ont été obtenus vers 1702 par Leibnitz et Jean Bernoulli : ils constituent le chapitre en quelque sorte le plus simple, il est vrai, mais aussi le plus achevé du Calcul intégral.

244. — Exemple : intégration de $\frac{x^4+a^4}{x^4-a^4}dx$.

Éclaircissons, par un exemple, ce que pourrait avoir de trop général ou de trop abstrait la théorie précédente. Prenons $F(x)=x^4+a^4$, $f(x)=x^4-a^4$; ou soit à intégrer l'expression $\frac{x^4+a^4}{x^4-a^4}dx$.

La division du numérateur par le dénominateur donne d'abord

$$\frac{F(x)}{f(x)}=1+\frac{2a^4}{x^4-a^4},$$

et il reste à décomposer la fraction rationnelle $\frac{2a^4}{x^4-a^4}$. Pour cela, conformément à la marche indiquée, cherchons les racines de l'équation $f(x)=0$, c'est-à-dire $x^4-a^4=0$, ou mieux, résolvons x^4-a^4 en facteurs réels aussi simples que possible. Il vient évidemment $x^4-a^4=(x^2-a^2)(x^2+a^2)$; et, d'ailleurs, $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$, tandis que le facteur x^2+a^2, somme de deux carrés, ne pourrait se dédoubler qu'en facteurs imaginaires. Ainsi, l'on aura définitivement $x^4-a^4=(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$; et il s'agira de décomposer

$$\frac{2a^4}{x^4-a^4}$$

en trois fractions simples, ayant respectivement les formes $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{x+a}$, $\frac{Cx+D}{x^2+a^2}$. Posons donc

$$(12)\qquad \frac{2a^4}{x^4-a^4}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}+\frac{Cx+D}{x^2+a^2},$$

c'est-à-dire

$$2a^4=A\frac{x^4-a^4}{x-a}+B\frac{x^4-a^4}{x+a}+Cx\frac{x^4-a^4}{x^2+a^2}+D\frac{x^4-a^4}{x^2+a^2},$$

ou bien, en effectuant les divisions indiquées et plaçant les uns sous les autres les termes semblables,

$$2a^4 = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3) \\ + \mathrm{B}(x^3 - ax^2 + a^2x - a^3) \\ + \mathrm{C}(x^3 \qquad - a^2x \qquad) \\ + \mathrm{D}(\qquad x^2 \qquad - a^2). \end{array} \right.$$

On voit que, pour rendre le polynôme du troisième degré en x, qui constitue le second membre, identiquement égal au premier membre $2a^4$, ou, pour égaler, dans les deux membres, les coefficients totaux des mêmes puissances de x, il faudra, au second membre, annuler ceux de x^3, x^2, x et égaler à $2a^4$ le coefficient de x^0, formé par l'ensemble des termes constants. Il vient donc, pour déterminer les quatre inconnues A, B, C, D, les quatre équations

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = 0, & a\mathrm{A} - a\mathrm{B} + \mathrm{D} = 0, \\ a^2\mathrm{A} + a^2\mathrm{B} - a^2\mathrm{C} = 0, & a^3\mathrm{A} - a^3\mathrm{B} - a^2\mathrm{D} = 2a^4. \end{array} \right.$$

Si l'on divise la troisième par a^2 et qu'on la combine alors avec la première, tant par voie d'addition que par voie de soustraction, on trouve $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$, $\mathrm{C} = 0$; en sorte que ces deux équations reviennent à prendre $\mathrm{C} = 0$, $\mathrm{B} = -\mathrm{A}$. Alors la seconde (13), résolue par rapport à D, devient elle-même $\mathrm{D} = a(\mathrm{B} - \mathrm{A}) = -2a\mathrm{A}$. Enfin, ces valeurs, $-\mathrm{A}$, $-2a\mathrm{A}$, de B et D, portées dans la quatrième (13), la changent en celle-ci, $4a^3\mathrm{A} = 2a^4$, qui donne $\mathrm{A} = \frac{a}{2}$ et achève par suite de déterminer les inconnues. On a donc $\mathrm{A} = \frac{a}{2}$, $\mathrm{B} = -\frac{a}{2}$, $\mathrm{C} = 0$, $\mathrm{D} = -a^2$.

C'est dire que, d'après l'égalité (12), accrue, dans ses deux membres, de la partie entière 1 trouvée précédemment, la valeur décomposée de la fraction $\frac{x^4 + a^4}{x^4 - a^4}$ est

$$(14) \qquad \frac{x^4 + a^4}{x^4 - a^4} = 1 + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right) - \frac{a^2}{x^2 + a^2}.$$

Et, en effet, si nous additionnons les termes du second membre, il vient successivement

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{a}{2}\left(\frac{x + a}{x^2 - a^2} - \frac{x - a}{x^2 - a^2}\right) - \frac{a^2}{x^2 + a^2} \\ \qquad = 1 + a^2\left(\frac{1}{x^2 - a^2} - \frac{1}{x^2 + a^2}\right) = 1 + \frac{2a^4}{x^4 - a^4} = \frac{x^4 + a^4}{x^4 - a^4}. \end{array} \right.$$

Cette vérification ne doit jamais être négligée; car les calculs de décomposition d'une fonction rationnelle en termes simples, étant généralement longs et arides, prêtent beaucoup à erreur.

Multiplions actuellement par dx les deux membres de (14) et intégrons, en observant que

$$\left\{\begin{aligned} &\int dx = x, \quad \int\frac{dx}{x-a} - \int\frac{dx}{x+a} = \log(x-a) - \log(x+a) = \log\frac{x-a}{x+a}, \\ &\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int\frac{d\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale cherchée, si l'on y remplace $\frac{a}{2}\log\frac{x-a}{x+a}$ par $a\log\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$, sera donc

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \int\frac{x^4+a^4}{x^4-a^4}\,dx &= x + a\log\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} - a\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a} + \text{const.} \\ &= a\left(\frac{x}{a} + \log\sqrt{\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{x}{a}+1}} - \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}\right) + \text{const.} \end{aligned}\right.$$

245. — Intégration des différentielles irrationnelles dont tous les radicaux portent sur une même expression de la forme $\frac{ax+b}{a'x+b'}$.

Après avoir vu comment s'intègrent, dans tous les cas, les différentielles rationnelles, passons à l'étude des types les plus usuels des différentielles irrationnelles, relativement peu nombreuses, que l'on sait intégrer.

Le plus simple concerne les différentielles dans lesquelles tous les radicaux portent sur une même expression de la forme $\frac{ax+b}{a'x+b'}$, généralement fractionnaire, mais qui devient entière et se réduit à un binôme $ax+b$, quand on prend $a'=0$, $b'=1$. Comme, d'ailleurs, $ax+b$ se réduit lui-même à x pour $b=0$ et $a=1$, on voit que le cas dont il s'agit comprend toutes les différentielles affectées senlement *d'irrationnelles monômes*, c'est-à-dire dans lesquelles les radicaux portent uniquement sur x, à des facteurs constants près qu'on peut en faire sortir.

En remplaçant les radicaux par des exposants fractionnaires et puis

réduisant tous ceux-ci à un dénominateur commun positif m, on aura, comme radical unique, dans la différentielle proposée, la quantité $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}$, dont les radicaux en question égaleront des puissances entières. La différentielle proposée pourra donc s'écrire

$$f\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right) dx,$$

où f désignera une fonction *rationnelle* des deux variables x et

$$\sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}.$$

On l'intègre, comme du reste les autres types de différentielles irrationnelles dont il sera question ci-après, au moyen d'une substitution ou changement de variable propre à la transformer en une différentielle rationnelle, que l'on traite ensuite par le procédé général de Leibnitz et Jean Bernoulli. A cet effet, prenant le radical pour nouvelle variable, posons

$$(16) \qquad t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{ax+b}{a'x+b'} = t^m.$$

L'équation en x, *du premier degré seulement*, donnera par suite à x une valeur, que j'appellerai $\varphi(t)$ pour abréger, fonction rationnelle de t : ce sera la quantité $\frac{b't^m - b}{a - a't^m}$. Sa différentielle, $dx = \varphi'(t)\,dt$, sera évidemment rationnelle elle-même, et l'expression proposée, $f\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right) dx$, devenue $f[\varphi(t), t]\,\varphi'(t)\,dt$, ne contiendra plus aucun radical. On pourra donc l'intégrer par la méthode exposée ci-dessus, et, si $F(t)$ désigne son intégrale, il viendra, en remplaçant t par sa valeur (16),

$$(17) \qquad \int f\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right) dx = F\left(\sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}\right) + \text{const.}$$

246. — Autre type : différentielles qui ne contiennent qu'un radical carré, portant sur un trinôme du second degré ; leur intégration sous forme réelle, quand le trinôme est décomposable en facteurs réels du premier degré.

Le deuxième type de différentielles irrationnelles qu'on sait intégrer comprend toutes celles où il ne paraît, soit une fois, soit plusieurs fois

ou à plusieurs endroits, qu'un seul radical ayant 2 pour indice et portant sur un trinôme du second degré. Désignons ce radical par $\sqrt{a+bx+cx^2}$, et la différentielle proposée sera de la forme

$$f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})\,dx,$$

si f désigne une fonction rationnelle.

Avant d'intégrer, on trouve avantage à simplifier le radical, en y écrivant ainsi le trinôme, $(\pm c)\left(\frac{a}{\pm c}+\frac{b}{\pm c}x \pm x^2\right)$, où $\pm c$, pris avec le signe supérieur si c est positif, et avec le signe inférieur si c est négatif, désigne la valeur absolue du coefficient du terme en x^2 : on peut alors extraire la racine carrée du facteur constant essentiellement positif $\pm c$, représenter chacun des quotients censés effectués $\frac{a}{\pm c}$, $\frac{b}{\pm c}$, par une seule lettre, que je supposerai être respectivement A, B, et la différentielle à intégrer prend la forme sous laquelle nous la considérerons, $f(x, \sqrt{A+Bx\pm x^2})\,dx$, où f continue à désigner une fonction rationnelle de deux variables.

Supposons d'abord que le trinôme $A+Bx\pm x^2$ donne deux racines réelles, α, β, quand on résout l'équation du second degré obtenue en l'égalant à zéro. Nous savons qu'alors ce trinôme sera le produit du coefficient ± 1 de x^2 par les deux facteurs linéaires $x-\alpha$, $x-\beta$. La différentielle à intégrer pourra donc s'écrire

$$f\left[x, \sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)}\right]dx.$$

Soit t une nouvelle variable, définie par l'équation

$$(18) \qquad \sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t,$$

c'est-à-dire telle que l'on ait

$$(19) \qquad t = \frac{\sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)}}{x-\alpha} = \sqrt{\pm\frac{x-\beta}{x-\alpha}}.$$

En élevant (18) au carré et puis supprimant le facteur commun $x-\alpha$ (ce qu'on peut faire, puisqu'il ne s'annule que pour la valeur isolée $x=\alpha$), il viendra

$$(20) \qquad \pm(x-\beta) = (x-\alpha)t^2.$$

Or cette équation est du premier degré en x et, par suite, résolue, donne une expression de x rationnelle, que je représenterai par $\varphi(t)$ comme dans le cas du type précédent de différentielles irrationnelles.

En la différentiant, on aura $dx = \varphi'(t)\,dt$ et, l'expression (18) du radical devenant d'ailleurs $t\,\varphi(t) - \alpha t$, la différentielle proposée prendra la forme, elle-même rationnelle, $f[\varphi(t),\ t\,\varphi(t) - \alpha t]\,\varphi'(t)\,dt$. Elle se trouvera donc intégrable par la méthode exposée dans la première partie de cette Leçon : si l'on appelle $F(t)$ la fonction primitive obtenue, le résultat demandé sera, vu la valeur (19) de t,

$$F\left(\sqrt{\pm\frac{x-\beta}{x-\alpha}}\right) + \text{const.}$$

247. — Suite : Autres procédés, applicables notamment lorsque le trinôme n'est pas décomposable en facteurs réels du premier degré.

Quand le trinôme $A + Bx \pm x^2$, égalé à zéro, a ses deux racines imaginaires ou, ce qui revient au même, quand il n'est pas décomposable en facteurs réels du premier degré, on sait qu'il conserve le même signe, sans s'annuler, pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. Alors le radical et, par suite, la différentielle proposée ne sont des quantités réelles, comme nous le supposerons, qu'autant que ce signe, constamment le même, du trinôme, est $+$. Donc le trinôme se trouve positif, en particulier, pour la valeur zéro de x, qui le réduit à A, de sorte qu'on a $A > 0$; et il l'est aussi pour les très grandes valeurs absolues de x, qui rendent, comme on sait, prépondérant le terme $\pm x^2$ du second degré, ce qui oblige également à poser $\pm x^2 > 0$, ou implique, devant x^2, le signe supérieur $+$, à l'exclusion de l'autre $-$. Ainsi, le trinôme, lorsqu'il paraîtra dans une différentielle réelle et ne sera pas décomposable en deux facteurs réels du premier degré, offrira ces deux caractères, d'avoir son terme constant A, positif, et son terme du second degré x^2, précédé du signe $+$.

Or chacun de ces deux caractères conduit à une transformation réelle qui rend rationnelle et par conséquent intégrable la différentielle proposée, transformation d'ailleurs applicable même à des cas où le trinôme se résout en facteurs réels du premier degré, pourvu que le caractère en question y soit vérifié, c'est-à-dire pourvu qu'on n'ait pas $A < 0$, s'il s'agit de la première transformation, ou que le terme du second degré ne soit pas $-x^2$, s'il s'agit de la seconde.

Supposons donc d'abord que A se trouve ou nul, ou positif, et admette par conséquent une racine carrée réelle; ce qui, en appelant a cette racine, prise d'ailleurs, à volonté, avec le signe $+$ ou le signe $-$, permet d'écrire la différentielle proposée, $f\left(x, \sqrt{a^2 + Bx \pm x^2}\right) dx$. Choisissons notre nouvelle variable t, de manière qu'on ait

$$(21) \qquad \sqrt{a^2 + Bx \pm x^2} = a + tx,$$

ou, en d'autres termes, prenons

$$(22) \qquad t = \frac{\sqrt{a^2 + Bx \pm x^2} - a}{x}.$$

En élevant (21) au carré et supprimant des deux membres du résultat le terme a^2, puis un facteur commun x, il viendra, pour définir x en fonction de t, la relation

$$(23) \qquad B \pm x = 2at + t^2 x.$$

On voit que celle-ci est du premier degré en x, comme (20) dans le cas précédent. On en tirera donc une expression de x, rationnelle, de la forme $x = \varphi(t)$, une expression de dx, $\varphi'(t)\,dt$, rationnelle aussi, et le radical $\sqrt{a^2 + Bx \pm x^2}$, devenu, d'après (21),

$$a + tx \quad \text{ou} \quad a + t\varphi(t),$$

sera lui-même rationnel. Dès lors la différentielle proposée, changée en celle-ci $f[\varphi(t),\ a + t\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$, s'intégrera par les règles données tout à l'heure pour les différentielles rationnelles; et il suffira de remplacer finalement, dans le résultat, t par sa valeur (22).

Passons au procédé applicable toutes les fois que le terme en x^2 du trinôme est $+x^2$ et non $-x^2$. Il consiste à poser

$$(24) \qquad \sqrt{A + Bx + x^2} = t - x;$$

ce qui donne

$$(25) \qquad t = x + \sqrt{A + Bx + x^2}.$$

En élevant (24) au carré, puis supprimant des deux membres le terme commun x^2, il vient encore une équation du premier degré en x; d'où résultent toujours une expression de x, qu'on peut écrire $x = \varphi(t)$, rationnelle, et une valeur de dx, $\varphi'(t)\,dt$, rationnelle également, ainsi que la formule $t - x$ ou $t - \varphi(t)$ du radical

$$\sqrt{A + Bx + x^2}.$$

La différentielle proposée devient donc intégrable; et il suffit de remplacer enfin t, dans le résultat auquel elle conduit, par sa valeur (25).

248. — Exemple : calcul de $\int \frac{dx}{\sqrt{A + x^2}}$.

Comme application des méthodes précédentes, intégrons par le

dernier procédé l'expression $\frac{dx}{\sqrt{A+x^2}}$, qui se présente assez souvent en Analyse et en Mécanique. Nous aurons à écrire, d'après (24),

$$\sqrt{A+x^2} = t - x$$

ou, en élevant au carré et simplifiant, $A = t^2 - 2\,tx$, c'est-à-dire

$$x = \frac{t^2 - A}{2t} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{A}{t}\right); \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{t^2}\right) dt;$$

et il en résulte aussi

$$\sqrt{A+x^2} = t - x = \frac{1}{2}\left(2t - t + \frac{A}{t}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{t^2}\right) t.$$

Donc la différentielle proposée, quotient de dx par $\sqrt{A+x^2}$, devient simplement $\frac{dt}{t}$, ou a pour intégrale $\log t$. Et il vient, vu la valeur $x+\sqrt{A+x^2}$ de t,

$$(26) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{A+x^2}} = \log\left(x + \sqrt{A+x^2}\right) + \text{const.}$$

On contrôle cette intégration, en calculant la dérivée du résultat $\log\left(x+\sqrt{A+x^2}\right)$, dérivée qu'on trouve, successivement, être

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{A+x^2}\right)}{x+\sqrt{A+x^2}} &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{A+x^2}}}{x+\sqrt{A+x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{A+x^2}+x}{\sqrt{A+x^2}\left(x+\sqrt{A+x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{A+x^2}}, \end{aligned}\right.$$

et en constatant qu'elle égale bien la fonction par laquelle dx est multiplié dans la différentielle qu'il s'agissait d'intégrer.

Observons, à ce propos, qu'il ne faut jamais, après avoir effectué un calcul d'intégrale indéfinie, négliger d'en faire ainsi la preuve, par la différentiation toujours possible et même facile du résultat; car, sans cette vérification, on ne pourrait guère avoir l'assurance de ne s'être pas trompé quelque part dans les transformations, généralement longues, que nécessitent les intégrations.

249*. — Autre type, généralisé des deux précédents : intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ est prise le long d'une courbe unicursale.

(Compléments, p. 24*.)

250. — Troisième type : différentielles qui contiennent deux radicaux carrés, portant sur deux binômes du premier degré.

Considérons, en troisième lieu, les différentielles de la forme

$$f(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{a'x+b'})\,dx,$$

où f désigne une fonction rationnelle quelconque des trois quantités x, $\sqrt{ax+b}$, $\sqrt{a'x+b'}$; en sorte qu'il s'y trouve deux radicaux carrés portant sur deux fonctions linéaires. Prenons l'un de ces radicaux pour nouvelle variable, en posant, par exemple,

$$\sqrt{ax+b}=t;\qquad \text{d'où}\qquad ax+b=t^2,\qquad x=\frac{t^2-b}{a},\qquad dx=\frac{2t\,dt}{a}.$$

L'expression à intégrer, $f\left(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{a'x+b'}\right)dx$, deviendra $f\left[\frac{t^2-b}{a}, t, \sqrt{\frac{a'}{a}(t^2-b)+b'}\right]\frac{2t\,dt}{a}$, différentielle dans laquelle il ne paraît plus qu'un seul radical carré, portant sur l'expression du second degré $\frac{a'}{a}t^2+\left(b'-\frac{a'}{a}b\right)$. Elle rentre par conséquent dans le deuxième type traité ci-dessus; et une nouvelle substitution, empruntée à l'un des trois procédés qui s'y rapportent, la rendra rationnelle ou permettra de l'intégrer.

251. — Quatrième type de différentielles irrationnelles : différentielle binôme $(ax^\alpha+bx^\beta)^p\,dx$.

Passons à un quatrième type assez usuel de différentielles irrationnelles, type se distinguant des précédents en ce qu'on ne sait l'intégrer sous forme finie que dans certains cas spéciaux, dits *cas d'intégrabilité :* c'est celui des *différentielles binômes*. On appelle ainsi les expressions de la forme $(ax^\alpha+bx^\beta)^p\,dx$, où l'exposant p doit être supposé fractionnaire: car, s'il était entier, positif ou négatif, la puissance $p^{\text{ième}}$ du binôme $ax^\alpha+bx^\beta$ se développerait exactement, en numérateur ou en dénominateur, sous la forme d'un polynôme fini contenant des puissances entières de x^α ou x^β; et il ne resterait, tout au plus, que des irrationnelles monômes (pour α ou β fractionnaires), de sorte qu'on serait ramené au premier type.

En mettant le binôme $ax^\alpha+bx^\beta$ sous la forme $x^\alpha(a+bx^{\beta-\alpha})$, la différentielle proposée devient $x^{\alpha p}(a+bx^{\beta-\alpha})^p\,dx$, ou, plus simplement, $x^m(a+bx^n)^p\,dx$ si l'on pose $\alpha p=m$ et $\beta-\alpha=n$. C'est d'ordinaire à cette forme, $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, que l'on réduit les différentielles binômes. On peut même y supposer m et n entiers; car, lorsque

ces exposants sont des fractions $\frac{k}{q}$, $\frac{l}{q}$ (censées réduites à un même dénominateur positif q), en prenant le radical $x^{\frac{1}{q}}$ pour nouvelle variable, ou posant

$$x^{\frac{1}{q}} = t \quad \text{et, par suite,} \quad x = t^q, \quad dx = qt^{q-1}\,dt, \quad x^{\frac{k}{q}} = t^k, \quad x^{\frac{l}{q}} = t^l,$$

on obtient, pour la différentielle proposée, $qt^{k+q-1}(a+bt^l)^p\,dt$; ce qui, abstraction faite du facteur constant q et à part la substitution de t à x, est bien une différentielle binôme de la forme

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

dans laquelle les deux exposants m et n de la variable ont les valeurs entières $k+q-1$ et l. Une remarque dont nous aurons besoin tout à l'heure est que, dans cette transformation, le rapport $\frac{m+1}{n}$ ne change pas : il était d'abord $\frac{\frac{k}{q}+1}{\frac{l}{q}} = \frac{k+q}{l}$, quand on avait $m = \frac{k}{q}$, $n = \frac{l}{q}$; et il est aussi $\frac{k+q}{l}$ maintenant que $m = k+q-1$, $n = l$.

Cela posé, tous les moyens que l'on connaît, pour intégrer en termes finis, quand c'est possible, la différentielle binôme $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, reviennent à mettre cette expression sous l'une des deux formes, évidemment équivalentes, $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, $x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx$, et à prendre pour nouvelle variable la quantité entre parenthèses, qui est $a+bx^n$ dans le premier cas, $b+ax^{-n}$ dans le second.

Posons, par exemple,

$$a+bx^n = t, \quad \text{d'où} \quad x = \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad dx = \frac{1}{n}\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}(t-a)^{\frac{1}{n}-1}\,dt.$$

L'expression proposée, $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, deviendra

$$\frac{1}{n}\frac{1}{b^{\frac{m+1}{n}}}(t-a)^{\frac{m+1}{n}-1}t^p\,dt;$$

et elle ne contiendra que l'irrationnelle monôme t^p si l'exposant, $\frac{m+1}{n}-1$, de $t-a$, est entier, ou, ce qui revient au même, si

$$(28) \qquad \frac{m+1}{n} = \text{un nombre entier.}$$

Cela arrive lorsque l'*exposant de x hors de la parenthèse, m*, accru d'une unité, se trouve être exactement divisible par *l'exposant de x dans la parenthèse, n*. Quand ce cas, dit *premier cas d'intégrabilité*, se présente, la différentielle est donc réduite, par l'introduction de la variable t, au premier type de différentielles irrationnelles étudié plus haut, et, par suite, l'intégration peut se faire en termes finis.

Si l'on prenait la différentielle binôme sous sa deuxième forme, en posant $b + ax^{-n} = t$, des conséquences analogues se produiraient, à cela près que l'exposant de x hors de la parenthèse serait $m + np$, au lieu de m, et, celui de x dans la parenthèse, $-n$, au lieu de n. Ce n'est donc plus pour $\frac{m+1}{n} =$ un nombre entier, mais pour

$$\frac{m+np+1}{-n} = \text{un nomb. entier,} \qquad \text{ou} \qquad \frac{m+np+1}{n} = \text{un nomb. entier,}$$

c'est-à-dire, enfin, pour

(29) $$\frac{m+1}{n} + p = \text{un nombre entier,}$$

que l'intégration aboutirait. Ce *second cas d'intégrabilité* est toujours distinct du premier : en effet, p se trouvant fractionnaire, les deux nombres $\frac{m+1}{n}$ et $\frac{m+1}{n} + p$ ne peuvent pas être entiers à la fois.

Il est bon de remarquer que la transformation indiquée ci-dessus pour rendre entiers les exposants m et n n'a nullement comme résultat de faire entrer la différentielle binôme dans un des cas d'intégrabilité, ni de l'en faire sortir. Car nous avons vu que cette transformation, qui laisse l'exposant p le même, ne change pas non plus le rapport $\frac{m+1}{n}$. Donc celui-ci, soit pris seul, soit joint à p, donnera ou ne donnera pas un nombre entier autant après qu'avant la transformation.

Citons, comme exemple simple d'une différentielle binôme comprise dans les cas d'intégrabilité, et que nous avons même déjà intégrée (pp. 26 et 31), l'expression $\sin^m x \cos^n x \, dx$, lorsque les exposants m, n y sont entiers. En effet, cette expression, écrite

$$\sin^m x \cos^{n-1} x \, d\sin x \qquad \text{ou} \qquad \sin^m x (1 - \sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \, d\sin x,$$

devient, en y posant $\sin x = t$, la différentielle binôme

$$t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dt.$$

Elle n'est irrationnelle que dans le cas de n pair, sans quoi l'exposant $p = \frac{n-1}{2}$ de la parenthèse y a une valeur entière. Or, d'autre part, si n est pair, l'un des deux quotients appelés tout à l'heure $\frac{m+1}{n}$ et $\frac{m+1}{n}+p$, qui valent ici $\frac{m+1}{2}$ et $\frac{m+n}{2}$, y sera entier, savoir, le premier ou le second, suivant que m, de son côté, se trouvera impair ou pair; en sorte que la différentielle binôme rentrera soit dans le premier cas d'intégrabilité, soit dans le second. Et c'est pourquoi nous avons réussi, même sans y introduire explicitement la variable auxiliaire t, à en effectuer l'intégration.

En dehors des deux cas d'intégrabilité, on peut, sinon intégrer exactement la différentielle binôme $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, du moins y réduire la valeur absolue de l'exposant m d'autant de fois $\pm n$ unités qu'on le veut, et aussi l'exposant p d'un nombre quelconque d'unités. Les procédés employés pour cela présentent une complète analogie avec ceux qui nous ont permis (p. 31) de réduire les exposants m et n dans $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, analogie toute naturelle, puisque l'expression $\sin^m x \cos^n x\,dx$ est, au fond, une différentielle binôme.

252*. — Réduction de l'exposant hors de la parenthèse et de l'exposant de la parenthèse, dans l'intégration des différentielles binômes et polynômes.

(Compléments, p. 27*.)

253*. — Application à certaines intégrales, réductibles aux intégrales elliptiques des deux premières espèces.

(Compléments, p. 30*.)

VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

DES INTÉGRALES DÉFINIES : NOTIONS FONDAMENTALES ET EXEMPLES DIVERS ; * FONCTION Γ.

254. — Définitions, notations et considérations générales concernant les intégrales définies.

D'après ce que nous avons vu dès la XXI[ième] Leçon (p. 5), on appelle *intégrale définie* la somme des valeurs que reçoit successivement une différentielle $f(x)\,dx$, quand on y fait varier avec continuité x depuis une valeur initiale donnée a jusqu'à une autre valeur quelconque, b par exemple; et cette somme, parfaitement déterminée, égale la différence, $F(b) - F(a)$, des deux valeurs, *finale* et *initiale*, que prend l'intégrale indéfinie correspondante $\int f(x)\,dx$, désignée ici par $F(x)$ ou par $F(x) +$ const. La première et la dernière valeur de x sont dites les *deux limites* de l'intégrale définie : la première valeur, a, est la *limite inférieure*, la dernière, b, la *limite supérieure*. Leur différence, $b - a$, constitue l'*intervalle des limites* ou encore l'*étendue* de l'intégrale : elle mesure le *champ d'intégration*, compris entre a et b.

Chacune des valeurs successives de la différentielle $f(x)\,dx$ est un *élément* de l'intégrale, tandis que leur expression commune, $f(x)\,dx$, s'appelle l'*élément* général. Par exemple, si n désigne le nombre (extrêmement grand, infini même, à la limite) des variations éprouvées par x depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, et si, de plus, x_0 exprimant la première valeur, a, on représente les valeurs suivantes par $x_1, x_2, \ldots$, jusqu'à la dernière, x_n, qui n'est autre que b, les divers éléments de l'intégrale définie seront les produits $f(x_0)\,dx_0, f(x_1)\,dx_1, f(x_2)\,dx_2, \ldots$, $f(x_{n-1})\,dx_{n-1}$, où les facteurs dx_0, dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_{n-1} seront les accroissements infiniment petits successifs de x, savoir, respectivement, $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, $\ldots$, $x_n - x_{n-1}$, accroissements d'ailleurs arbitraires quant à leurs signes et à leurs rapports mutuels. La somme de tous ces éléments, c'est-à-dire l'intégrale définie, constituera bien l'augmentation totale, $F(b) - F(a)$, de la fonction $F(x)$, vu que, d'après la définition de celle-ci, on a sans cesse $f(x)\,dx = d\,F(x)$.

Ainsi, de quelque manière *continue* que varie, à partir de a et jusqu'à b, la quantité x, soit en augmentant ou en diminuant toujours, soit en passant par plusieurs alternatives d'accroissement et de décroissement, il viendra

$$(1)\quad f(x_0)\,dx_0 + f(x_1)\,dx_1 + \ldots + f(x_{n-1})\,dx_{n-1} \text{ ou } \int f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Longtemps on a représenté une telle intégrale définie par $\int f(x)\,dx$, sans y faire figurer les limites, inférieure et supérieure, qui en fixent l'étendue et rendent sa signification déterminée. Fourier, géomètre éminent du commencement de ce siècle, a très heureusement complété cette notation en inscrivant, au bas du signe $\int$, la limite inférieure et, au haut du même signe, la limite supérieure. Par exemple, l'intégrale ci-dessus s'écrira $\int_a^b f(x)\,dx$ et s'énoncera *somme* (ou *intégrale*), *depuis a jusqu'à b, de $f(x)\,dx$*. On a eu de même, plus récemment, l'idée d'exprimer la différence, $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, des deux valeurs que prend une fonction $\mathrm{F}(x)$ à deux limites b et a, en mettant entre crochets ou entre parenthèses l'expression considérée et en inscrivant, à la suite, les deux limites, l'une a, au bas, l'autre b, en haut. Grâce à ces notations, la relation (1) se mettra donc sous la forme très condensée

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b.$$

255. — Propriétés diverses qui en résultent.

Plusieurs remarques importantes découlent immédiatement des considérations qui précèdent.

1° *On peut partager la suite des éléments de l'intégrale en un nombre quelconque de groupes, contenant chacun une infinité d'éléments consécutifs, et constituant tout autant d'intégrales partielles.* On fera, par exemple, varier x non pas, d'un seul coup, de a à b, mais de a à une valeur quelconque c, puis de c à une autre valeur quelconque h, et ainsi de suite, pourvu que, finalement, x s'arrête à la valeur b : c'est ce qu'exprimera, par exemple, l'égalité

$$(3)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^h f(x)\,dx + \int_h^b f(x)\,dx.$$

Et rien n'obligera même à prendre, pour les limites auxiliaires c, h, ..., des quantités comprises entre les limites données a, b; car

nous avons vu que x n'est pas astreint à varier toujours dans un même sens, c'est-à-dire de a vers b. Toutefois, pour plus de simplicité et *pour éviter parfois certaines difficultés, provenant de ce que la fonction $f(x)$ pourrait devenir infinie ou mal déterminée en dehors de l'intervalle des limites a, b,* on suppose, à moins d'avis contraire, que x varie constamment de a vers b, en grandissant sans cesse ou diminuant sans cesse, de sorte que tous les dx aient le même signe.

2° *Quand on échange entre elles les deux limites, l'intégrale conserve la même valeur absolue, mais prend signe contraire.* En d'autres termes, $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Effectivement, on a, d'après la remarque précédente,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx.$$

Or l'intégrale $\int_a^a f(x)\,dx$ est identiquement nulle, vu qu'elle ne contient point d'éléments, son champ $a-a$ se trouvant réduit à zéro.

On pourra donc toujours, en changeant, s'il le faut, le signe de l'intégrale, avoir une limite supérieure plus grande que la limite inférieure. Comme, de plus, la *variable d'intégration, x,* sera censée aller constamment de sa limite inférieure vers sa limite supérieure, elle croîtra, et *toutes ses différentielles dx seront positives.* C'est ce que nous supposerons désormais à moins d'avis contraire.

3° *Quand, pour toute valeur de x intermédiaire entre les limites a, b, la fonction $f(x)$ se trouve comprise entre deux autres, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, l'intégrale proposée $\int f(x)\,dx$ est aussi comprise entre les deux intégrales $\int \varphi(x)\,dx$ et $\int \psi(x)\,dx$.*

En effet, lorsqu'on a

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x), \tag{4}$$

pour toutes les valeurs considérées de x, il vient, en multipliant les trois membres de cette inégalité par le facteur positif dx,

$$\varphi(x)\,dx < f(x)\,dx < \psi(x)\,dx,$$

et, si l'on fait les sommes des valeurs que reçoivent simultanément les trois membres de celle-ci quand x croît de a à b, la première des trois sommes, $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, est moindre que la deuxième, $\int_a^b f(x)\,dx$, laquelle se trouve, elle-même, plus petite que la troisième, $\int_a^b \psi(x)\,dx$.

Ainsi l'on peut bien écrire

$$(5)\qquad \int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Cette remarque permettra d'obtenir deux valeurs approchées, l'une par défaut, l'autre par excès, d'une intégrale définie que l'on ne saurait pas calculer exactement, quand on pourra former deux fonctions très peu inégales $\varphi(x)$, $\psi(x)$, enfermant entre elles, dans tout le champ de l'intégration, la fonction sous le signe $\int$ proposée $f(x)$, et assez simples d'ailleurs pour que leurs produits par dx soient intégrables.

256. — **Exemples d'intégrales définies dont le calcul est immédiat.**

Après ces aperçus généraux, donnons quelques exemples d'intégrales définies, pour montrer comment leur valeur peut se déduire de l'expression des intégrales indéfinies correspondantes.

1° *Calcul de* $\int_0^1 x^m\,dx$, *où l'exposant* m *est supposé positif.* — On aura, en employant une notation indiquée tout à l'heure,

$$(6)\qquad \int_0^1 x^m\,dx = \left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)_0^1 = \frac{1}{m+1} - \frac{0}{m+1} = \frac{1}{m+1}.$$

2° *Calcul de* $\int_0^x \frac{dx}{1+x}$ (où la limite supérieure est censée plus grande que -1) *et de* $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$. — Il vient

$$(7)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x} = [\log(1+x)]_0^x = \log(1+x) - \log 1 = \log(1+x), \\ \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = (\operatorname{arc\,tang} x)_0^x = \operatorname{arc\,tang} x - \operatorname{arc\,tang} 0 = \operatorname{arc\,tang} x. \end{cases}$$

3° *Calcul de* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ *et de* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$. — La seconde de ces intégrales ne diffère pas de la première; car, si l'on y pose $x = \frac{\pi}{2} - t$ (d'où $dx = -dt$), on voit que $\sin x\,dx$ devient $-\cos t\,dt$, et que, de plus, t décroît de $\frac{\pi}{2}$ à zéro quand x croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$. L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ devient donc $-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos t\,dt$, ou $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt$; ce qui, à

part l'insignifiant changement de nom de la variable, est bien la même chose que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$. On aura

$$(8) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = (\sin x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

257. — Autre exemple, consistant dans $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx$ (avec m entier et positif), où le calcul se fait par réductions successives; formule de Wallis.

Des intégrales un peu moins simples à calculer sont les deux précédentes (3°), quand on y affecte, sous le signe $\int$, la fonction $\cos x$ ou $\sin x$ d'un exposant entier et positif quelconque m. On reconnaîtra d'abord, par la même substitution de $\frac{\pi}{2} - t$ à x, que ces deux intégrales continuent, même alors, à ne pas différer l'une de l'autre. Appelons-les, pour abréger, I_m, ou posons, par exemple, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = I_m$. D'après un résultat établi dans la XXIIième Leçon (p. 32), l'intégrale indéfinie correspondante se réduira au moyen de la formule

$$(9) \qquad \int \sin^m x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x\, dx;$$

et il est clair qu'en indiquant la différence des deux valeurs prises par chaque terme du second membre aux limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, on obtiendra, pour I_m, l'expression

$$-\frac{1}{m}(\sin^{m-1} x \cos x)_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\, dx.$$

Or le premier terme de celle-ci (appelé, dans tous les cas analogues, *terme intégré* ou *terme aux limites*) s'annule, à cause du facteur $\sin^{m-1} x$, à la limite inférieure $x = 0$; et il s'annule aussi, à cause du facteur $\cos x$, à la limite supérieure $x = \frac{\pi}{2}$. Ce terme ne donne donc rien dans l'intégrale définie considérée; et il vient simplement

$$(10) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x\, dx, \qquad \text{ou} \qquad I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Cette relation, en y faisant successivement $m=2$, $m=4$, $m=6$, ..., permettra de trouver I_2, I_4, I_6, ..., à partir de l'intégrale I_0, qui n'est autre que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = (x)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$. On obtiendra ainsi, pour toutes les valeurs de l'exposant m qui sont paires, ou de la forme $2n$, les intégrales proposées. Il viendra successivement

$$\left\{\begin{array}{lll} & I_0 = \frac{\pi}{2}, & I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}, \\ I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{\pi}{2}, & \ldots, & I_{2n} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

On aura donc

$$(11)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx \quad \text{ou} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{\pi}{2}.$$

La même relation (10), en y posant $m=3$, $m=5$, ..., $m=2n+1$, donnera pareillement I_3, I_5, ..., I_{2n+1}, à partir de l'intégrale

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx,$$

qui, d'après (8), a pour valeur l'unité. On trouvera ainsi

$$I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}, \qquad I_5 = \frac{4}{5} I_3 = \frac{2}{3}\frac{4}{5}, \qquad \ldots, \qquad I_{2n+1} = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1},$$

ou bien

$$(12)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}.$$

L'intégrale I_m est donc, alternativement, commensurable et puis affectée de la même irrationnalité que le nombre π, quand la valeur entière de l'exposant positif m, après avoir initialement égalé 1, croît sans cesse d'une unité. Or deux valeurs commensurables consécutives, I_{2n-1} et I_{2n+1} par exemple, comprennent entre elles la valeur incommensurable I_{2n} correspondant à l'indice pair intermédiaire $2n$: car, pour x plus grand que zéro et inférieur à $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ est un nombre positif moindre que 1, dont les puissances successives sont de plus en plus petites ; de

sorte que l'on a $\sin^{2n-1}x > \sin^{2n}x > \sin^{2n+1}x$, et, par suite,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx$$

ou

$$\text{(13)} \qquad I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}.$$

Par conséquent, le rapport incommensurable $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ se trouve, à la fois, supérieur à l'unité et moindre que le rapport commensurable $\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$, égal, d'après la formule générale (12), à la fraction $\frac{2n+1}{2n}$, dont l'excédent $\frac{1}{2n}$ sur l'unité tend vers zéro quand n grandit. Ainsi $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ tend lui-même vers l'unité; car, si l'on appelle $1+\varepsilon$ sa valeur, ε ne pourra être qu'une partie de $\frac{1}{2n}$.

Or de là résulte, pour le nombre π, ou plutôt pour sa moitié $\frac{\pi}{2}$, qui entre dans la formule de I_{2n}, une expression remarquable, due à Wallis, géomètre anglais du XVIIe siècle [1]. En effet, l'égalité

$$I_{2n} = (1+\varepsilon)I_{2n+1},$$

si l'on y remplace I_{2n}, I_{2n+1} par leurs valeurs (11) et (12), puis qu'on isole $\frac{\pi}{2}$, donne, en divisant finalement par $1+\varepsilon$,

$$\text{(14)} \qquad \frac{\pi}{2(1+\varepsilon)} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\,\frac{2n}{2n+1} = \frac{2^2}{2^2-1}\,\frac{4^2}{4^2-1}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n)^2-1}.$$

Faisons croître n indéfiniment, de manière à rendre ε nul, et nous aurons

$$\text{(15)} \qquad \frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\cdots = \frac{2^2}{2^2-1}\,\frac{4^2}{4^2-1}\,\frac{6^2}{6^2-1}\cdots.$$

C'est la formule de Wallis, qui fait, comme on voit, du rapport $\frac{\pi}{2}$ de la demi-circonférence au diamètre, la limite du produit des fractions commensurables ayant pour numérateurs la suite des carrés pairs et pour dénominateurs les nombres impairs immédiatement inférieurs à ces carrés.

---

[1] On a déjà vu dans le *Calcul differentiel* (t. I, p. 28*) que la décomposition de $\sin x$ en facteurs y conduit également.

258. — Des intégrales définies dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ devient infinie soit aux limites, soit entre les limites.

Nous avons implicitement admis jusqu'ici que la fonction sous le signe $\int$, $f(x)$, dans l'intégrale considérée $\int_a^b f(x)\,dx$, recevait, entre les deux limites a, b et à ces limites mêmes, des valeurs toutes bien déterminées, finies par conséquent, et que, de plus, les deux limites a, b étaient, elles aussi, deux quantités finies, non moins bien désignées, marquant la première et la dernière valeur de x. Il y a donc lieu d'examiner spécialement ce que pourra être et signifier l'intégrale soit lorsque la fonction $f(x)$ deviendra infinie entre les limites a et b ou à quelqu'une de ces limites, soit lorsque les limites elles-mêmes varieront et tendront à acquérir des valeurs absolues infinies.

Supposons d'abord que la fonction $f(x)$ devienne infinie à une limite, par exemple, à la limite inférieure a. On ne peut pas voir alors directement ce qu'égalent ensemble les éléments $f(x)dx$ correspondant aux valeurs de x infiniment voisines de a, puisque, si le facteur $f(x)$ y croît indéfiniment, l'autre facteur dx, par contre, y tend vers zéro, en sorte que le produit se présente sous une forme indéterminée. Il faudra donc, comme dans toutes les questions d'analyse où surgit une difficulté analogue, éviter la *valeur critique* de x pour laquelle les données et définitions dont on dispose deviennent illusoires, et se contenter d'approcher de plus en plus de cette valeur critique, en cherchant si le résultat que l'on a en vue tend alors vers une limite. S'il y tend en effet, c'est cette limite qui sera naturellement, par raison d'uniformité ou de continuité (t. I, p. 5), la valeur demandée. Si, au contraire, le résultat croît indéfiniment en valeur absolue ou, encore, oscille une infinité de fois sans s'approcher d'aucune quantité fixe, on y verra la preuve que l'expression proposée devient soit infinie, soit indéterminée, et que, n'existant plus en tant que grandeur précise, elle est impropre à définir une quantité.

Par conséquent, dans la question spéciale dont il s'agit, et en admettant, pour fixer les idées, que b soit supérieur à a, on fera varier x à partir non pas de la limite inférieure a, mais d'une autre un peu plus grande, $a+\varepsilon$, où ε désigne une quantité positive très petite; et l'on considérera ainsi l'intégrale $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, dans laquelle la valeur critique $x=a$, pour laquelle $f(x)$ devient infinie, est évitée. Ensuite on imaginera que ε s'approche de zéro, ou prenne une nouvelle va-

leur ε_1, plus faible que la première ε; ce qui ajoutera évidemment à l'intégrale un groupe d'éléments ayant pour somme $\int_{a+\varepsilon_1}^{a+\varepsilon} f(x)dx$; et, si l'on reconnaît que, lorsque ε est déjà fort petit, cette somme reste au-dessous de toute quantité très voisine de zéro assignée à l'avance, quelle que soit entre o et ε la valeur de ε_1, on sera évidemment assuré que l'intégrale $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$ tend, pour $\varepsilon = 0$, vers une limite, vraie valeur cherchée de $\int_a^b f(x)dx$. Au contraire, dans le cas où la fonction $f(x)$, indéfiniment grandissante à l'approche de $x = a$, et y gardant toujours le même signe par raison de continuité, serait telle, que la somme $\int_{a+\varepsilon_1}^{a+\varepsilon} f(x)dx$, du groupe d'éléments gagné à raison du décroissement de ε, pût acquérir une certaine valeur finie K quelque petit que fût ε, on obtiendrait évidemment, en faisant décroître ainsi de plus en plus, vers a, la limite inférieure, ou en ajoutant toujours de nouveaux groupes ayant chacun la somme K, un nombre aussi grand qu'on le voudrait d'accroissements égaux à K; et, par suite, l'intégrale proposée $\int_a^b f(x)dx$ serait infinie, c'est-à-dire impropre à exprimer aucune quantité déterminée.

Soit, comme exemple, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^m}$ (avec $m > 0$), où la fonction sous le signe $\int$, x^{-m}, devient infinie à la limite inférieure $x = 0$. On remplacera provisoirement cette limite par une autre très peu supérieure ε, et l'on aura :

$$(16)\quad \begin{cases} \text{Pour } m < 1, \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^m} = \left(\frac{x^{1-m}}{1-m}\right)_\varepsilon^1 = \frac{1-\varepsilon^{1-m}}{1-m} = \frac{1}{1-m} \text{ (à la limite } \varepsilon = 0), \\ \text{Pour } m = 1, \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^m} = (\log x)_\varepsilon^1 = \log 1 - \log\varepsilon = \log\frac{1}{\varepsilon} = \infty \text{ (à la limite } \varepsilon = 0), \\ \text{Pour } m > 1, \displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^m} = \left(\frac{x^{-m+1}}{-m+1}\right)_\varepsilon^1 = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{m-1}} - 1\right) = \infty \text{ (à la limite } \varepsilon = 0). \end{cases}$$

C'est dire qu'une fonction, $f(x)$, inversement proportionnelle à une puissance x^m de la variable ayant son exposant m inférieur à l'unité, croît assez peu vite, à l'approche de $x = 0$, pour laisser, même à cette limite, une valeur finie et déterminée à l'intégrale $\int f(x)dx$; mais

qu'elle y rend, au contraire, l'intégrale $\int f(x)dx$ infinie, dès que l'exposant m atteint l'unité. Donc, *lorsqu'une fonction $f(x)$ ne grandira pas plus vite, à l'approche de la valeur critique considérée, que ne le fait près de $x=0$ une puissance de $\frac{1}{x}$ moins rapidement croissante que la première, l'intégrale restera finie et déterminée à l'instant où sa limite atteindra la valeur critique; mais lorsque, au contraire, la fonction $f(x)$ grandira aussi vite ou plus vite, près de la valeur critique, que la fonction $\frac{1}{x}$ à l'approche de $x=0$, l'intégrale $\int f(x)dx$ deviendra infinie à l'instant où l'une de ses deux limites atteindra la valeur critique dont il s'agit.*

Par exemple, dans l'intégrale $\int_0^1 (1-u^2)^{-m}dx$, avec m compris entre zéro et 1, la fonction sous le signe $\int$,

$$(1-u^2)^{-m} \quad \text{ou} \quad (1+u)^{-m}(1-u)^{-m},$$

exprimée, en posant $1-u=x$, par $(2-x)^{-m}x^{-m}$, varie sensiblement, près de la limite $u=1$, comme son facteur $(1-u)^{-m}$, c'est-à-dire comme x^{-m} à l'approche de $x=0$; car son rapport, $(1+u)^{-m}$, à ce facteur $(1-u)^{-m}$ ou x^{-m}, y égale à fort peu près la constante 2^{-m}. Or je dis qu'il résulte de là, pour $\int(1-u^2)^{-m}du$, une valeur finie. En effet, dans les deux intégrales

$$\int_0^1 (1-u^2)^{-m}du \quad \text{et} \quad \int_0^1 (1-u)^{-m}du,$$

le rapport, $(1+u)^{-m}$ ou, très sensiblement, 2^{-m}, de deux éléments voisins de la limite supérieure, et d'ailleurs quelconques mais correspondant tant à une même valeur de u qu'à un même intervalle du, ne variera qu'extrêmement peu avec u; d'où il suit qu'il ne différera pas, d'une manière appréciable, du rapport même des deux sommes respectives, qu'il s'agit d'examiner ici, formées avec ces éléments, depuis une première valeur de u, déjà très peu différente de 1, jusqu'à une autre tendant vers 1. Et comme, dans $\int(1-u)^{-m}du = \int x^{-m}dx$, la somme en question, relative aux très petites valeurs positives de x, a été reconnue évanouissante, elle le sera aussi dans $\int(1-u^2)^{-m}du$.

Si la fonction $f(x)$ est infinie aux deux limites a, b, on ne prendra l'intégrale, provisoirement, qu'entre deux limites, $a+\varepsilon$ et $b-\varepsilon_1$, voisines de a et b, dans l'intervalle desquelles $f(x)$ restera finie; et l'on verra ensuite ce qui arrivera quand, ε et ε_1 s'annulant, les deux limites proposées a, b se trouveront atteintes. Par exemple, la discus-

sion précédente sur l'intégrale $\int_0^1 (1-u^2)^{-m} du$ montrera de même que $\int_{-1}^1 (1-u^2)^{-m} du$ est finie pour les valeurs de m comprises entre zéro et 1. C'est ce que donne immédiatement, dans le cas $m=\frac{1}{2}$, l'intégration effective; car on a

$$(17) \quad \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = (\arcsin u)_{-1}^1 = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Enfin, si la fonction $f(x)$ devient infinie pour certaines valeurs de x, c par exemple, intermédiaires entre les limites a et b, on décomposera l'intégrale en intégrales partielles, telles que $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ et $\int_{c+\varepsilon_1}^b f(x)dx$, se terminant ou commençant à ces valeurs critiques, et dont on exclura même provisoirement les éléments qui en sont voisins, sauf à les restituer peu à peu pour voir ce que l'annulation de ε et ε_1 fera des intégrales partielles. Si ces dernières restent finies même à la limite, l'intégrale proposée, qui est leur somme, sera évidemment finie aussi et bien déterminée. Si, au contraire, quelques-unes deviennent infinies, en étant d'ailleurs toutes positives ou toutes négatives, l'intégrale proposée le sera de même. Enfin, celle-ci devient *indéterminée,* quand les intégrales partielles infinies qui la composent ont des signes divers et, *en l'absence de toute condition réglant leurs différences mutuelles,* se neutralisent dans une mesure arbitraire.

Considérons, par exemple, l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$, dont les éléments sont négatifs de $x=-1$ à $x=0$, positifs de $x=0$ à $x=1$, et où la fonction sous le signe $\int$, $\frac{1}{x}$, devient infinie pour $x=0$. On dédoublera l'intégrale en

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = [\log(-x)]_{-1}^{-\varepsilon} = \log\varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon_1}^1 \frac{dx}{x} = (\log x)_{\varepsilon_1}^1 = -\log\varepsilon_1,$$

dont la somme, $\log\varepsilon - \log\varepsilon_1$ ou $\log\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$, prend telle valeur qu'on veut si petits que soient ε et ε_1, puisque rien n'oblige à faire tendre le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$ vers aucune limite. Ainsi l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ est indéterminée,

à moins que la nature de la question où elle se présentera n'impose une certaine manière de faire évanouir ε et ε_1, en déterminant leur rapport limite.

259. — Des intégrales définies à champ d'intégration infini.

Considérons actuellement une intégrale définie, $\int_a^b f(x)\,dx$, dans laquelle on fait grandir indéfiniment en valeur absolue une des limites a, b, ou toutes les deux. S'il arrive que l'intégrale tende en même temps vers une quantité déterminée, celle-ci sera dite sa valeur pour le cas où les limites qu'on a fait varier seraient infinies. Si, au contraire, l'intégrale grandit indéfiniment en valeur absolue, ou se maintient finie sans tendre vers aucune valeur spéciale, on dira qu'elle devient soit infinie, soit indéterminée. Par exemple, ces derniers cas se présentent, respectivement, pour $\int_1^x \frac{dx}{x}$ et $\int_0^x \cos x\,dx$, qui ont leurs valeurs, $\log x$ et $\sin x$, la première, infinie, la deuxième, arbitraire entre -1 et $+1$, quand on y rend infinie la limite supérieure x. Au contraire, l'intégrale $\int_1^x \frac{dx}{x^2}$, exprimée par

$$\left(\frac{-1}{x}\right)_1^x = 1 - \frac{1}{x},$$

tend vers l'unité lorsque sa limite supérieure croît indéfiniment : on aura donc $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = 1$.

Le cas le plus intéressant est évidemment celui où l'intégrale tend de la sorte vers une valeur déterminée, puisqu'elle conserve, même à la limite, une signification précise. Si, dans les éléments qu'elle gagne à mesure que grandit le champ d'intégration, la fonction $f(x)$ finit par changer de plus en plus fréquemment de signe, de manière que ces éléments forment des groupes ayant leurs sommes partielles de signes alternés aussi, et décroissantes jusqu'à l'infiniment petit quand on passe d'un groupe aux suivants, l'intégrale constituera, comme on voit, à la limite, une série de termes décroissants successivement positifs et négatifs, série qu'on sait être toujours convergente. Il est clair qu'alors, pour que l'intégrale reste finie et déterminée, la fonction $f(x)$ ne sera nullement tenue de tendre vers zéro à mesure que la valeur absolue de sa variable grandira. Et elle n'y sera pas tenue davantage si, sans changer de signe, elle présente indéfiniment des

alternatives d'accroissement et de décroissement, assez inégales pour que les valeurs *sensibles* de $f(x)$ aient de moins en moins *de champ*, au point de rendre négligeables les groupes infiniment éloignés d'éléments. Mais *si*, au contraire, $f(x)$ *conserve le même signe et varie sans cesse dans un même sens, sa valeur absolue devra finir par décroître, et même par décroître plus vite que ne le fait celle de la fonction* $\frac{1}{x}$, *sans quoi l'intégrale deviendrait infinie à la limite.*

En effet, quand, par exemple, pour $x > k$ (k étant une très grande constante positive), $f(x)$ décroît aussi lentement ou plus lentement que $\frac{1}{x}$, le rapport de $f(x)$ à $\frac{1}{x}$ ne tend pas vers zéro, et reste supérieur, en valeur absolue, à un certain nombre M. On a donc

$$\int_k^x f(x)\,dx > \int_k^x \frac{M}{x}\,dx = M \log \frac{x}{k} = \infty \quad (\text{pour } x \text{ infini}),$$

de sorte que la somme $\int_k^\infty f(x)\,dx$ est alors infinie. Mais l'intégrale reste finie dès que, pour les grandes valeurs absolues de x, la fonction $f(x)$ est comparable à une puissance de $\frac{1}{x}$ plus rapidement décroissante que la première, c'est-à-dire dont l'exposant soit supérieur à l'unité. En effet, pour $m > 1$ et k positif, on a

$$\int_k^\infty \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{x^{m-1}}\right)_k^\infty = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{k^{m-1}} - \frac{1}{\infty^{m-1}}\right) = \frac{1}{(m-1)k^{m-1}}.$$

Si donc $f(x)$ conserve, pour $x > k$, un rapport fini, moindre qu'un nombre assignable M, à une telle puissance x^{-m} de x, la somme $\int_k^\infty f(x)dx$, se trouvant inférieure à $M\int_k^\infty \frac{dx}{x^m} = \frac{M}{(m-1)k^{m-1}}$, sera évanouissante pour k très grand; et l'intégrale $\int f(x)dx$ ne cessera pas d'être finie et déterminée, quand on rendra infinie sa limite supérieure.

On raisonnerait de même dans le cas où la limite inférieure reculerait jusqu'à $-\infty$.

260. — Exemples d'intégrales qui restent finies quand l'intervalle des limites devient infini.

Voici quelques exemples importants d'intégrales qui restent finies quand une de leurs limites, ou toutes les deux, deviennent infinies.

1° Commençons par l'intégrale $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$, prise soit entre les limites zéro et ∞, soit entre les limites $\pm\infty$, et où a désigne une constante *positive* quelconque. Il viendra immédiatement

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}\right)_0^\infty = \frac{\operatorname{arc\,tang}\infty - \operatorname{arc\,tang} 0}{a} = \frac{\pi}{2a}, \\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a}\right)_{-\infty}^\infty = \frac{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)}{a} = \frac{\pi}{a}. \end{aligned} \right.$$

2° Évaluons maintenant, entre les mêmes limites 0 et ∞ ou $-\infty$ et ∞, l'intégrale de l'expression $\frac{dx}{\left[\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\right]^2}$ ou $\frac{dx}{\operatorname{coh}^2 x}$, qui a pour intégrale indéfinie $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ ou $\operatorname{tah} x$, comme on le reconnaît de suite par la différentiation ([1]). — La fraction $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ pouvant aussi s'écrire $\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ et $-\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$, expressions qui deviennent respectivement la première, 1, pour $x=\infty$, et la deuxième, -1, pour $x=-\infty$, on aura

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{dx}{\operatorname{coh}^2 x} = (\operatorname{tah} x)_0^\infty = 1, \\ &\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\operatorname{coh}^2 x} = (\operatorname{tah} x)_{-\infty}^{+\infty} = 1-(-1) = 2. \end{aligned} \right.$$

3° Considérons enfin, entre les limites 0 et ∞, les trois expressions $e^{-ax}dx$, $e^{-ax}\cos bx\,dx$, $e^{-ax}\sin bx\,dx$, où a désigne un nombre constant *positif*, et dont les intégrales indéfinies sont respectivement (pp. 32 et 33)

$$-\frac{1}{a}e^{-ax}, \quad -e^{-ax}\frac{a\cos bx - b\sin bx}{a^2+b^2}, \quad -e^{-ax}\frac{b\cos bx + a\sin bx}{a^2+b^2}.$$

Il viendra aisément, en observant que e^{-ax} s'annule pour $x=\infty$,

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \\ &\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \\ &\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}. \end{aligned} \right.$$

([1]) Je désignerai les sinus, cosinus et tangentes hyperboliques par les notations sih, coh, tah, bien suffisamment explicites, et plus brèves que celles dont j'ai fait usage dans le Tome I, savoir sinh, cosh, tangh.

On remarquera que, lorsqu'on change b en $-b$, tous les éléments de la deuxième de ces intégrales restent les mêmes (car $\cos bx$ ne change pas), tandis que ($\sin bx$ changeant de signe) tous les éléments de la troisième prennent signe contraire. Par suite, des deux expressions simples $\frac{a}{a^2+b^2}$, $\frac{b}{a^2+b^2}$, celle qui a le numérateur a, conservant son signe, pouvait seule convenir à l'intégrale dont l'élément contient le facteur $\cos bx$, et celle qui a le numérateur b, changeant de signe, pouvait seule convenir à l'intégrale dont l'élément contient le facteur $\sin bx$. Enfin, la première intégrale, $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$, se déduit de la deuxième en posant $b=0$, ce qui réduit $\cos bx$ à l'unité et $\frac{a}{a^2+b^2}$ à $\frac{1}{a}$.

261*. — Autre exemple d'intégrales finies quoique prises dans un intervalle infini : fonction Γ.

(Compléments, p. 35*.)

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

CALCUL APPROCHÉ DES INTÉGRALES DÉFINIES; IDÉE DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES ET DES *FONCTIONS ELLIPTIQUES; APPLICATIONS ANALYTIQUES DES INTÉGRALES DÉFINIES.

262. — **Calcul approché d'une intégrale définie; méthode la plus simple et procédé de Thomas Simpson.**

Il arrive souvent qu'une différentielle $f(x)dx$ ne peut pas s'intégrer sous forme finie. Alors on a recours à divers procédés d'approximation. Les uns ont pour but unique d'obtenir des valeurs numériques, et non des expressions générales, des intégrales définies proposées, tandis que l'objet principal des autres est de fournir des développements convergents en série, propres à représenter analytiquement l'intégrale dans la totalité ou dans une partie notable de l'étendue où varient ses limites.

Disons d'abord quelques mots des premiers, destinés aux calculs numériques. Ils consistent, d'ordinaire, à partager le champ d'intégration en intervalles, h, assez petits, pour que les changements de la fonction $f(x)$, de part et d'autre de la valeur x_0 de x correspondant au milieu de chacun d'eux, y soient suffisamment bien exprimés au moyen des deux ou trois premiers termes de leurs développements par la série de Taylor, et à évaluer séparément par l'emploi de ces termes les groupes d'éléments de l'intégrale compris dans chaque intervalle, en fonction de celui-ci, h, et des deux valeurs extrêmes $f\left(x_0 \pm \frac{h}{2}\right)$ qu'y acquiert $f(x)$, quelquefois aussi, quand plus d'exactitude est nécessaire, en fonction de la valeur $f(x_0)$ relative au milieu de l'intervalle.

La formule de Taylor donnant, pour une valeur quelconque $x = x_0 + u$ comprise entre $x_0 - \frac{h}{2}$ et $x_0 + \frac{h}{2}$,

$$f(x_0 + u) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1} u + \frac{f''(x_0)}{1.2} u^2 + \frac{f'''(x_0)}{1.2.3} u^3,$$

avec une erreur ε par défaut égale à $\frac{f^{\text{IV}}(x_0+\theta u)}{1.2.3.4}u^4$ ou dont le rapport à $\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{1.2.3.4}u^4$ diffère généralement peu de 1, il viendra, en multipliant par $dx = d(x_0+u) = du$, puis intégrant de $x = x_0 - \frac{h}{2}$ à $x = x_0 + \frac{h}{2}$, c'est-à-dire entre les limites $u = -\frac{h}{2}$ et $u = \frac{h}{2}$,

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_0+u)\,du = f(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3,$$

sauf une erreur par défaut composée d'éléments $\varepsilon\,du$ ayant presque le rapport 1 avec $\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{1.2.3.4}u^4\,du$ et, par suite, relativement peu différente elle-même de

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{1.2.3.4}u^4\,du = \frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{3.4.5}\left(\frac{h}{2}\right)^5.$$

On peut donc écrire, en somme, sous la réserve de l'hypothèse que $f^{\text{IV}}(x)$ soit ou insensible ou relativement peu variable dans l'intervalle considéré h,

$$(1)\qquad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_0+u)\,du = f(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{3.4.5}\left(\frac{h}{2}\right)^5.$$

Il reste, à remplacer, dans (1), $f(x_0)$ par son expression en fonction des valeurs extrêmes $f\left(x_0 \pm \frac{h}{2}\right)$, si l'on ne veut employer que celles-ci; et, dans le cas contraire où l'on voudrait utiliser également la valeur moyenne $f(x_0)$, il faut éliminer $f''(x_0)$ de (1), ce qu'il est alors possible de faire. Pour atteindre ce double but, on aura très sensiblement, d'après la formule de Taylor,

$$\left\{\begin{aligned} f\left(x_0 \pm \frac{h}{2}\right) = f(x_0) \pm f'(x_0)\frac{h}{2} + \frac{f''(x_0)}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ \pm \frac{f'''(x_0)}{2.3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + \frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{2.3.4}\left(\frac{h}{2}\right)^4, \end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$\frac{1}{2}\left[f\left(x_0 - \frac{h}{2}\right) + f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right] = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{2.3.4}\left(\frac{h}{2}\right)^4;$$

ce qui donne, en résolvant soit par rapport à $f(x_0)$, soit par rapport au terme $\frac{f''(x_0)}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2$, puis multipliant ou par h, ou par $\frac{h}{3}$,

$$(2)\quad \begin{cases} f(x_0)h = \frac{h}{2}\left[f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)+f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right]-f''(x_0)\left(\frac{h}{2}\right)^3-\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{3.4}\left(\frac{h}{2}\right)^5, \\ \frac{f''(x_0)}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3=\frac{h}{6}\left[f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)+f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)-2f(x_0)\right]-\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{4.9}\left(\frac{h}{2}\right)^5. \end{cases}$$

Donc la formule (1) devient :

1° Si l'on élimine $f(x_0)$, au moyen de la première (2),

$$(3)\qquad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_0+u)\,du = (\text{sensiblement})\ \frac{h}{2}\left[f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)+f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right],$$

avec une erreur absolue par excès valant généralement, à fort peu près, $\frac{2}{3}f''(x_0)\left(\frac{h}{2}\right)^3$, ou, par suite, avec une erreur relative sensiblement égale au quotient, $\frac{f''(x_0)}{3f(x_0)}\left(\frac{h}{2}\right)^2$, de cette erreur absolue par $hf(x_0)$;

2° Si l'on élimine, au contraire, $f''(x_0)$, par la seconde (2),

$$(4)\quad \begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(x_0+u)\,dx \\ \quad = (\text{très sensiblement})\ \frac{h}{6}\left[f\left(x_0-\frac{h}{2}\right)+4f(x_0)+f\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\right], \end{cases}$$

avec l'erreur absolue, encore par excès, mais beaucoup plus faible, $\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^5$ à fort peu près, ou, par conséquent, avec une erreur relative sensiblement égale à $\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{180f(x_0)}\left(\frac{h}{2}\right)^4$.

La première évaluation, (3), qui revient évidemment à supposer la fonction $f(x)$ linéaire dans chaque intervalle h, ou à raisonner comme si l'on y avait $f''(x)=0$, consiste donc à *multiplier l'intervalle considéré h par la moyenne arithmétique des deux valeurs de la fonction aux deux extrémités de cet intervalle,* ou à opérer comme si la fonction était, dans tout l'intervalle, constante, et égale à cette moyenne arithmétique. La seconde évaluation, (4), beaucoup plus précise, mais aussi moins simple, remplace, comme on voit, cette moyenne par une autre, dans laquelle la valeur $f(x_0)$ de la fonction au milieu de l'in-

tervalle intervient concurremment avec les deux valeurs extrêmes, et a même *deux* fois plus d'importance que celles-ci prises *ensemble* ou se trouve affectée du coefficient 4 dans la somme, dont il y a lieu par suite de prendre le sixième. Ce procédé, dû au géomètre anglais Thomas Simpson, revient à supposer du troisième degré seulement la fonction $f(x)$, entre les limites de chaque intervalle; car on voit que l'erreur y serait nulle si l'on avait $f^{\text{IV}}(x) = 0$.

Pour faciliter le calcul et l'addition des valeurs approchées (3) ou (4) des intégrales partielles composant l'intégrale définie proposée, on partage d'ordinaire le champ d'intégration en intervalles h égaux; ce qui permet de mettre $\frac{h}{2}$ ou $\frac{h}{6}$ en facteur commun dans la somme totale et y porte à 2 le coefficient des valeurs de la fonction, $f\left(x_0 \mp \frac{h}{2}\right)$, communes à deux intervalles h successifs. Toutefois, aux endroits du champ d'intégration où les dérivées $f''(x), f^{\text{IV}}(x)$ seraient assez fortes pour rendre beaucoup plus sensibles qu'ailleurs, dans l'hypothèse de h constant, les erreurs, exprimées à peu près par $-\frac{2}{3}f''(x_0)\left(\frac{h}{2}\right)^3$ et par $-\frac{f^{\text{IV}}(x_0)}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^5$, il y aura lieu de resserrer les intervalles, pour obtenir les parties correspondantes de l'intégrale avec la même précision que les autres.

263. — Intégration par les séries.

Passons maintenant à l'intégration en série. On dédouble parfois ([1]), au moyen de l'intégration par parties, l'intégrale proposée en un terme de forme finie, algébrique par exemple, et une intégrale analogue à la proposée, mais d'indice plus élevé ou affectée sous le signe $\int$ d'un exposant plus fort, et s'approchant néanmoins autant qu'on le veut, après un nombre suffisant de dédoublements pareils, d'une intégrale définie connue. La proposée se ramène donc à la série convergente formée par tous les termes (algébriques) qu'en a distraits l'application indéfiniment répétée du dédoublement, et à l'intégrale *résidue,* pour ainsi dire, subsistant encore à la limite et supposée évaluable autrement. Mais les exemples de ce procédé sont assez difficiles, à cause de la dernière opération (le calcul de l'intégrale résidue), et nous nous contenterons de voir ici la méthode la plus usuelle, qui est aussi la plus féconde en résultats simples.

([1]) Comme nous verrons plus loin, n° 336* (dans le fascicule II).

Elle consiste à développer, quand on le peut, la fonction placée sous le signe $\int$, en une série convergente dans tout le champ d'intégration et dont les termes soient assez peu compliqués pour qu'on puisse trouver leurs fonctions primitives. Alors il suffit de multiplier tous ces termes par la différentielle de la variable et de les intégrer, pour que la somme des résultats forme une nouvelle série convergente, exprimant l'intégrale cherchée.

Supposons, en effet, qu'il s'agisse de calculer, entre deux limites a et x, l'intégrale $\int f(x)\,dx$, et que l'on ait, dans tout l'intervalle de ces limites,

$$(5) \qquad f(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \mathrm{R}_n,$$

$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant certaines fonctions de x, en nombre aussi grand que l'on voudra, et R_n désignant un terme complémentaire qui, lorsque n est assez grand, et pour toutes les valeurs de la variable comprises entre les deux limites a et x, reste inférieur à toute quantité donnée ε, quelque petite qu'on la prenne. Si nous multiplions l'égalité précédente par dx et que nous intégrions chaque terme entre les limites désignées, il viendra

$$(6) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x u_0\,dx + \int_a^x u_1\,dx + \int_a^x u_2\,dx + \ldots \\ \displaystyle\qquad\qquad + \int_a^x u_n\,dx + \int_a^x \mathrm{R}_n\,dx. \end{cases}$$

Or, d'après l'hypothèse $\mathrm{R}_n < \varepsilon$ (en valeur absolue), chaque élément $\mathrm{R}_n dx$ de la dernière intégrale est moindre que εdx, et, par suite, leur somme, $\int_a^x \mathrm{R}_n\,dx$, sera inférieure à $\int_a^x \varepsilon\,dx = \varepsilon(x-a)$. Mais, pour une valeur donnée de l'intervalle $x-a$ des limites, ce produit $\varepsilon(x-a)$ tend vers zéro avec ε. Si donc on fait croître n indéfiniment, le terme $\int_a^x \mathrm{R}_n\,dx$ s'effacera de plus en plus du second membre de (6) et il viendra bien, à la limite,

$$(7) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x u_0\,dx + \int_a^x u_1\,dx \\ \displaystyle\qquad\qquad + \int_a^x u_2\,dx + \ldots + \int_a^x u_n\,dx + \ldots. \end{cases}$$

Il importe même de remarquer que, si la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$,

convergente entre les limites a et x, commençait à devenir divergente à l'instant où x, en s'éloignant de a, atteint une certaine valeur b, et si, par conséquent, pour $x=b$, la valeur du terme R_n, dans (5), ne tendait plus vers zéro quelque grand qu'on prît n, l'intégrale $\int_a^x R_n dx$ pourrait encore, à ce moment, ne pas cesser de tendre vers zéro, ou, autrement dit, la série constituant le second membre de (7) pourrait être encore convergente et représenter l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$. En effet, lorsque la limite supérieure x, supposée déjà très voisine de b, atteint cette valeur extrême b, l'intégrale $\int_a^x R_n dx$, d'abord insensible (comme on vient de voir), ne s'accroît que d'un nombre relativement minime d'éléments, dont la somme peut bien s'annuler à la limite $n=\infty$ quand même le facteur R_n y dépasserait toute grandeur.

Si, par exemple, $f(x)$ reste fini pour $x=b$, et que, à cet instant, la somme $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$, sans être convergente, ne grandisse pas indéfiniment avec n, en sorte que l'excès R_n de $f(x)$ sur cette somme soit constamment inférieur, en valeur absolue, à un certain nombre K quelque grand qu'on prenne n, tous les éléments $R_n dx$ dont il s'agit ici seront moindres que $K dx$ et auront leur somme plus faible que la somme $\int K dx$, laquelle s'évanouit à la limite, l'accroissement total $\int dx$ éprouvé par x y étant aussi faible que l'on veut lorsque n devient assez grand. Ainsi, dans ce cas, qui se présente quand, pour $x=b$, la somme $u_0+u_1+u_2+\ldots$ devient divergente sans croître indéfiniment, la série intégrale (7) reste encore applicable à l'instant précis où la série différentielle commence à ne l'être plus, et sa valeur finie égale $\int_a^b f(x)dx$.

On peut en dire autant, pourvu que l'intégrale à évaluer $\int_a^x f(x)dx$ reste finie à la limite $x=b$, dans la plupart des cas où la série $u_0+u_1+u_2+\ldots$ devient infinie à cette limite. Tel est, notamment, celui où les intégrales partielles $\int_a^x u_0 dx$, $\int_a^x u_1 dx$, ... ont toutes même signe et grandissent (en valeur absolue) à mesure que x s'éloigne de a pour s'approcher de b. Alors, en effet, leur somme grandit aussi, mais dans un rapport restreint, puisqu'elle admet la limite supérieure constamment finie $\int_a^x f(x)dx$; et l'on

peut, d'une part, prendre x assez voisin de b pour que $\int_a^x f(x)dx$ ne soit inférieur à $\int_a^b f(x)dx$ que d'une très petite quantité ε, d'autre part, choisir en même temps n assez grand pour que la somme $\int_a^x u_0 dx + \int_a^x u_1 dx + \ldots + \int_a^x u_n dx$ atteigne presque sa valeur limite $\int_a^x f(x)dx$, correspondant à n infini. Cela posé, si l'on fait tendre x vers b sans que n varie, cette somme de $n+1$ termes grandira, mais en se maintenant constamment plus petite que $\int_a^x f(x)dx$, c'est-à-dire d'une fraction seulement de l'intervalle, comparable à ε, existant entre sa valeur primitive et $\int_a^b f(x)dx$. Donc, pourvu qu'on ait pris n assez grand, la somme considérée $\int_a^x u_0 dx + \ldots + \int_a^x u_n dx$ diffère aussi peu qu'on veut de $\int_a^x f(x)dx$, même à la limite $x = b$. C'est dire qu'à ce moment la série (7) est encore convergente et a pour valeur totale $\int_a^b f(x)dx$.

264. — Cas d'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable.

Supposons, par exemple, que l'intégrale à calculer soit $\int_0^x f(x)dx$, et que, dans tout le champ d'intégration, $f(x)$ puisse être développée, par la formule de Maclaurin, en une série de la forme

$$(8) \qquad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n + \ldots,$$

où nous admettrons que le rapport de deux coefficients consécutifs, $\frac{A_n}{A_{n-1}}$, tende vers une certaine limite λ à mesure que n grandit. Le rapport, dans la série, d'un terme au précédent tendra en même temps vers la limite λx, plus petite que l'unité (en valeur absolue) toutes les fois que x se trouvera compris entre les deux valeurs extrêmes $\mp \frac{1}{\lambda}$. Par suite, dans l'intervalle de ces deux valeurs, le développe-

ment sera convergent; et l'on pourra y intégrer chaque terme après l'avoir multiplié par dx. Il viendra, pour l'intégrale demandée,

$$(9)\quad \int_0^x f(x)\,dx = A_0\frac{x}{1} + A_1\frac{x^2}{2} + A_2\frac{x^3}{3} + \ldots + A_{n-1}\frac{x^n}{n} + A_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots.$$

On voit que le rapport d'un terme au précédent, du $n+1^{\text{ième}}$ au $n^{\text{ième}}$, est, dans cette série intégrale, $\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}x\right)\frac{n}{n+1}$, c'est-à-dire, égal au produit de la valeur $\frac{A_n}{A_{n-1}}x$, qu'il avait dans la série différentielle, par la fraction proprement dite $\frac{n}{n+1}\cdot$ Ainsi, la série intégrale a ses termes un peu plus rapidement décroissants que la série différentielle, ou est un peu plus convergente; ce qu'il était aisé de prévoir, puisqu'on savait déjà qu'elle devait rester convergente pour $x = \mp\frac{1}{\lambda}$ dans bien des cas où la série différentielle commencerait à y diverger. Mais on remarquera qu'elle diverge, elle aussi, dès que la limite considérée $\mp\frac{1}{\lambda}$ est dépassée. En effet, $\frac{n}{n+1}$ tendant vers l'unité quand n grandit, la limite du rapport d'un terme au précédent est également λx dans les deux séries; et elles deviennent toutes les deux divergentes pour $\lambda x > 1$ (en valeur absolue), c'est-à-dire hors de l'intervalle compris entre $x = -\frac{1}{\lambda}$ et $x = \frac{1}{\lambda}\cdot$

265. — **Application au développement de $\log(1 \pm x)$ et de $\log\frac{1+x}{1-x}$ pour x compris entre -1 et $+1$; emploi de ces développements dans le calcul des logarithmes.**

Voyons, par exemple, à quel développement conduira l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{1+x}$, dont la valeur sous forme finie est

$$[\log(1+x)]_0^x = \log(1+x) - \log 1,$$

c'est-à-dire $\log(1+x)$. Nous avons ici $f(x) = (1+x)^{-1}$, expression que nous savons être développable par la formule de Mac Laurin ou, simplement, par celle du binôme, pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$. Il viendra

$$(10)\qquad (1+x)^{-1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots,$$

comme on le vérifie du reste en observant que les termes 1, $-x$, x^2, ..., constituent une progression par quotient dont la raison est $-x$, et dont la somme limite vaut par suite $\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$, pourvu que la progression soit décroissante, c'est-à-dire pourvu que la raison $-x$ n'atteigne pas l'unité en valeur absolue.

Multiplions les deux membres de (10) par dx et intégrons tous les termes entre les limites zéro, x. Nous obtiendrons la formule cherchée, qui paraît due à Mercator, géomètre du XVII[e] siècle :

$$(11)\quad \begin{cases} \text{(pour } x \text{ compris entre } -1 \text{ et } 1) \\ \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \end{cases}$$

A la limite $x = 1$, la série (10) cesse d'être convergente, mais sans croître indéfiniment, puisqu'elle se réduit alors à $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ et vaut alternativement 1 et zéro. Donc, d'après ce que nous avons vu tout à l'heure (p. 75), la série intégrale (11) y sera encore convergente et donnera

$$(12)\qquad \log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots.$$

En changeant, dans (11), x en $-x$, il vient le développement de $\log(1-x)$:

$$(13)\quad \begin{cases} \text{(pour } x \text{ compris entre } -1 \text{ et } +1) \\ \log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \end{cases}$$

Enfin, retranchons celui-ci de l'expression (11) de $\log(1+x)$, et nous aurons comme valeur de la différence $\log(1+x) - \log(1-x)$, ou de $\log\frac{1+x}{1-x}$, la série, contenant seulement les puissances impaires de x et, par suite, beaucoup plus convergente que les précédentes :

$$(14)\quad \begin{cases} \text{(pour } x \text{ compris entre } -1 \text{ et } +1) \\ \log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right). \end{cases}$$

Cette dernière formule sert, étant donné le logarithme népérien d'un nombre quelconque N, à trouver ce qu'il faut lui ajouter pour avoir celui de tout autre nombre plus grand $N + h$. Comme l'excédent dont il s'agit, $\log(N+h) - \log N$, égale $\log\frac{N+h}{N}$, on le mettra sous

la forme $\log \frac{1+x}{1-x}$ en posant $\frac{N+h}{N} = \frac{1+x}{1-x}$, proportion qui devient aisément

$$\frac{(N+h)-N}{(N+h)+N} = \frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)+(1-x)}, \text{ ou } \frac{h}{2N+h} = \frac{2x}{2}, \text{ ou enfin } x = \frac{h}{2N+h};$$

et cette valeur de x sera bien inférieure à l'unité. Ainsi la relation (14) donnera

$$(15) \quad \begin{cases} \log(N+h) - \log N \\ \quad = 2\left[\frac{1}{1}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2N+h}\right)^5 + \dots\right]. \end{cases}$$

En prenant, par exemple, $h=1$ et N égal à l'un quelconque des nombres entiers 1, 2, 3, 4, ..., la formule (15) permettra de calculer, par une série d'une convergence toujours rapide, la différence $\log(N+1) - \log N$, qu'il faudra ajouter au logarithme népérien de ce nombre N pour avoir le logarithme naturel du nombre entier suivant $N+1$. Comme le logarithme de 1 est zéro, on fera successivement $N=1$, $=2$, $=3$, ... et l'on obtiendra rapidement, de proche en proche, les logarithmes népériens des nombres entiers, ou, du moins, de ceux qui sont premiers, les logarithmes des nombres composés s'évaluant encore plus vite par l'addition des logarithmes de leurs facteurs. Enfin, l'on divisera tous ces logarithmes naturels par celui de 10, qu'on trouve être 2,302585..., ou, plus simplement, on les multipliera par son inverse 0,434294..., appelé, comme on sait, *module* des logarithmes *décimaux;* et l'on aura de la sorte ces logarithmes décimaux ou *vulgaires,* puisque les premiers obtenus auront été réduits dans le rapport justement propre à rendre celui de 10 égal à l'unité.

Telle est la méthode la plus simple, en principe, pour calculer une Table de logarithmes, quoiqu'on ait déduit aussi de la formule (15) des procédés particuliers plus expéditifs, permettant, dès que l'on connaît avec une très grande approximation les logarithmes d'une série un peu étendue de nombres entiers, de former successivement ceux de tous les autres par de simples additions ou soustractions.

266. — Autre exemple : développement de arc tang x; application au calcul du nombre π.

Appliquons maintenant à l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$, dont la valeur sous forme finie est évidemment $(\text{arc tang}\, x)_0^x = \text{arc tang}\, x$, la même mé-

thode qu'à l'intégrale $\int_0^x \frac{dx}{1+x}$. La fonction sous le signe $\int$ étant actuellement $(1+x^2)^{-1}$, au lieu de $(1+x)^{-1}$, il suffira de remplacer x par x^2 dans (10), pour avoir le développement

$$(16)\qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots;$$

et ce développement ne convergera qu'autant que x^2 sera inférieur à 1, ou qu'autant que x n'atteindra pas l'unité en valeur absolue. Entre ces limites $x=-1$ et $x=+1$, la relation (16), multipliée par dx et intégrée de $x=0$ à $x=x$, donnera la formule cherchée, due au géomètre anglais James Gregory et à Leibnitz :

$$(17)\quad \operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{ (pour } x \text{ compris entre } -1 \text{ et } 1\text{)},$$

La série (16) diverge, sans devenir infinie, à la limite $x^2=1$, comme il arrivait dans l'exemple précédent à la limite $x=1$: par suite, et pour la même raison que tout à l'heure, la formule (17) de l'intégrale subsistera même à cette limite $x^2=1$, ou pour $x=\pm 1$; et, en y faisant, par exemple, $x=1$, valeur qui est la tangente de l'arc $\frac{\pi}{4}$, on aura l'expression suivante, très remarquable, du quart du nombre π :

$$(18)\qquad \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Dès que x^2 dépasse l'unité, la formule (17) devient divergente, comme celle, (16), d'où l'on est parti. Mais, alors, le complément $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} x$ de l'arc dont la tangente est x se trouve inférieur à $\frac{\pi}{4}$ et a évidemment la cotangente x ou, par suite, la tangente inverse, $\frac{1}{x}$. La formule (17) est donc applicable à ce complément $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} x$, avec changement de x en $\frac{1}{x}$; et il vient

$$(19)\qquad \operatorname{arc\,tang} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots \quad \text{(pour } x > 1\text{)}.$$

L'expression (17) de $\operatorname{arc\,tang} x$, pour les valeurs absolues de x ne dépassant pas l'unité, nous a déjà fourni la série numérique (18), qui représente $\frac{\pi}{4}$. Mais le calcul de cette série, avec une certaine approximation, ne serait guère praticable, à cause de la faible convergence

qu'elle offre. Aussi préfère-t-on, pour évaluer le nombre π, obtenir $\frac{\pi}{4}$ par une combinaison d'arcs beaucoup plus petits, dont les tangentes, substituées à x dans la formule (17), puissent conduire à des séries rapidement convergentes.

La combinaison que l'on adopte d'ordinaire est celle qu'exprime la relation

(20) $$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc tang} \frac{1}{5} - \operatorname{arc tang} \frac{1}{239}.$$

On démontre aisément celle-ci en considérant, entre les deux limites $u = 0$, $u = \frac{\pi}{4}$, l'arc positif u dont la tangente vaut $\frac{1}{5}$, et en évaluant $\operatorname{tang} 2u$, puis tangente $4u$, par la formule classique de la tangente du double d'un arc. Il vient d'abord

$$\operatorname{tang} 2u = \frac{2 \operatorname{tang} u}{1 - \operatorname{tang}^2 u} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12};$$

ce qui montre que l'arc $2u$, évidemment compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, se trouve encore au-dessous de $\frac{\pi}{4}$, dont la tangente égale 1. Mais, $\operatorname{tang} 4u$ étant

$$\frac{2 \operatorname{tang} 2u}{1 - \operatorname{tang}^2 2u} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119},$$

il est clair que $4u$, ou $4 \operatorname{arc tang} \frac{1}{5}$, dépasse légèrement $\frac{\pi}{4}$, comme l'indique (20); et, si l'on appelle V son petit excédent sur $\frac{\pi}{4}$, excédent qui, d'après (20), doit avoir $\frac{1}{239}$ pour tangente, il viendra bien, en effet,

$$\operatorname{tang} V = \operatorname{tang}\left(4u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tang} 4u - \operatorname{tang} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tang} 4u \operatorname{tang} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{119}}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

En conséquence, la substitution, dans (20), à $\operatorname{arc tang} \frac{1}{5}$ et à

$\operatorname{arc\,tang} \frac{1}{239}$, de leurs développements fournis par (17), donnera

$$(21) \quad \frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \ldots\right).$$

Les deux séries du second membre convergent très rapidement et permettent d'obtenir en quelques pages de calcul, avec un grand nombre de décimales, la valeur $\pi = 3,14159265\ldots$ du rapport de la circonférence au diamètre.

267. — Troisième exemple d'intégration en série : développement de arc sin x.

Proposons-nous encore de développer suivant les puissances ascendantes de x l'intégrale définie $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = (\arcsin x)_0^x = \arcsin x$, où la différentielle est censée réelle et où, par suite, x ne varie, sous le signe $\int$, que dans une partie de l'intervalle compris entre ± 1. Le second terme, $-x^2$, sous le radical, se trouvant moindre en valeur absolue que le premier, 1, si ce n'est quand la limite supérieure devient ± 1 et que la variable d'intégration l'atteint, on peut, dans tout l'intérieur du champ de l'intégrale, exprimer en série la fonction sous le signe $\int$, $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, par la formule du binôme, qui nous a donné (t. I, p. 159) le développement de $(1-u)^{-\frac{1}{2}}$. En faisant, dans celui-ci, $u = x^2$, puis multipliant par dx et intégrant chaque terme de zéro à x, il vient la formule cherchée, due à Newton,

$$(22) \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

On remarquera que l'intégrale $\arcsin x$ reste finie quand x atteint ses valeurs extrêmes ± 1 $\left(\text{puisque sa valeur absolue est alors } \frac{\pi}{2}\right)$, que, de plus, les termes du second membre de (22) croissent en valeur absolue quand x s'éloigne de zéro pour s'approcher de ces limites, et sont tous de même signe. Donc, d'après la remarque qui termine le n° 263 (p. 76), le second membre de (22) sera encore convergent, et égal à $\arcsin x$, même à ces limites, quoique sa dérivée y devienne infinie. On peut ainsi poser $x = 1$ dans (22), et si l'on s'en sert, en outre, pour évaluer $\frac{\pi}{2}$ considéré comme étant le triple de $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2}$,

on aura les deux expressions suivantes, dont la seconde converge assez vite, du demi-rapport $\frac{\pi}{2}$ de la circonférence au diamètre :

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{2n+1} + \ldots, \\ \frac{\pi}{2} &= 3\left[\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{5.2^5} + \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} + \ldots\right]. \end{aligned} \right.$$

268. — **Quatrième exemple : développement des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce; table abrégée de leurs valeurs complètes.**

Les exemples précédents étaient relatifs à des fonctions inverses d'exponentielles et de tangentes ou sinus, c'est-à-dire aux fonctions transcendantes les plus simples, considérées comme intégrales de certaines différentielles algébriques. Étudions maintenant deux intégrales plus complexes, n'ayant pas eu antérieurement de définition empruntée à quelque fait algébrique ou géométrique élémentaire, et ne devant ainsi leur existence comme fonctions qu'à leur propriété même d'intégrales. Ce sont les deux expressions, dépendantes d'un paramètre positif k supposé moindre que 1 et de la limite supérieure φ de l'intégration :

$$(24)\qquad F(k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad E(k,\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\; d\varphi.$$

Les notations $F(k,\varphi)$, $E(k,\varphi)$, adoptées pour les désigner, sont dues au géomètre français Legendre, qui a considéré ensemble ces deux fonctions à cause de l'analogie de leurs différentielles, et qui leur a donné [1] le nom d'*intégrales elliptiques*, parce que la seconde, $E(k,\varphi)$, permet, ainsi que nous le reconnaîtrons bientôt, d'évaluer les arcs des ellipses d'excentricité k. La première $F(k,\varphi)$ n'est pas moins utile; car, par exemple, elle exprime le temps dans le problème du mouvement d'un pendule simple dont les angles d'oscillation sont considérables. Legendre appelle, de plus, *module* le paramètre k, et *amplitude* la limite supérieure φ, qui mesure le champ même de l'intégration.

Enfin, il qualifie les intégrales de *complètes*, et les représente par $F^1(k)$, $E^1(k)$, ou même simplement par F^1, E^1, quand l'amplitude φ y

---

[1] Comme on a déjà vu dans le fascicule II, p. 33*.

a la valeur, $\frac{\pi}{2}$, pour laquelle le radical $\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$ prend une fois et une seule, sous le signe $\int$, toutes ses valeurs, allant de 1 à $\sqrt{1-k^2}$, par lesquelles il repasserait dans l'ordre inverse si φ excédait $\frac{\pi}{2}$ pour atteindre π, puis, dans l'ordre direct, entre $\varphi = \pi$ et $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, ... Les mêmes éléments se reproduisent évidemment dans tous les champs partiels d'intégration $\frac{\pi}{2}$, comptés à la suite les uns des autres en partant de $\varphi = 0$. Donc les fonctions F, E croissent de $2F^1$ et de $2E^1$ chaque fois que leur variable φ augmente de π; et, de plus, elles prennent deux valeurs équidistantes de part et d'autre de F_1 ou de E_1, pour deux valeurs de φ équidistantes elles-mêmes de part et d'autre de $\frac{\pi}{2}$; en sorte qu'il suffit de les calculer directement dans l'intervalle compris entre $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

A cet effet, développons, comme dans l'exemple précédent, par la formule du binôme ou mieux par celles de $(1-u)^{\mp\frac{1}{2}}$ que nous en avons déduites (t. I, p. 159), les deux fonctions sous le signe $\int$, $(1-k^2\sin^2\varphi)^{\mp\frac{1}{2}}$; ce qui est possible puisque la valeur absolue de $u = k^2\sin^2\varphi$ sera, comme ses facteurs k et $\sin\varphi$, inférieure à l'unité. Puis multiplions par $d\varphi$ et, en indiquant l'intégration de chaque terme, il viendra

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} F(k,\varphi) &= \varphi + \frac{1}{2}k^2\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,d\varphi + \frac{1}{2}\frac{3}{4}k^4\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi + \ldots \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}k^{2n}\int_0^\varphi \sin^{2n}\varphi\,d\varphi + \ldots, \\ E(k,\varphi) &= \varphi - \frac{1}{2}\frac{k^2}{1}\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{k^4}{3}\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,d\varphi - \ldots \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\frac{k^{2n}}{2n-1}\int_0^\varphi \sin^{2n}\varphi\,d\varphi - \ldots. \end{aligned}\right.$$

Or nous savons (pp. 32 et 60) que les intégrales, de la forme $\int_0^\varphi \sin^{2n}\varphi\,d\varphi$, figurant dans ces développements, se dédoublent au moyen de l'intégration par parties, en termes fonctions entières des deux facteurs $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ et en d'autres intégrales analogues, réductibles finalement à $\int_0^\varphi \sin^0\varphi\,d\varphi = \varphi$. Donc les seconds membres de (25)

pourront être entièrement débarrassés des signes $\int$ et deviendront des séries convergentes à termes simplement trigonométriques ou algébriques.

Les termes trigonométriques s'évanouissent même, quand il s'agit d'évaluer les intégrales complètes F^1, E^1, c'est-à-dire quand l'amplitude (ou limite supérieure) φ devient $\frac{\pi}{2}$. Alors, en effet, les intégrales qui paraissent aux seconds membres de (25) deviennent celles que nous appelions $I_2, I_4, \ldots, I_{2n}, \ldots$ dans la dernière Leçon (p. 60), et dont l'expression générale est $\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{\pi}{2}$; de sorte qu'on a

$$(26)\quad \begin{cases} F^1(k) = \dfrac{\pi}{2}\left[1 + \left(\dfrac{1}{2}k\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{4}k^2\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}k^n\right)^2 + \ldots\right], \\ E^1(k) = \dfrac{\pi}{2}\left[1 - \dfrac{1}{1}\left(\dfrac{1}{2}k\right)^2 - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{4}k^2\right)^2 - \ldots - \dfrac{1}{2n-1}\left(\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}k^n\right)^2 - \ldots\right]. \end{cases}$$

On voit que $F^1(k)$ présente, dans son développement, un peu moins de complication que $E^1(k)$. Une étude approfondie des deux intégrales E, F a permis de généraliser cette remarque et de reconnaître que la fonction $F(k, \varphi)$ est bien, effectivement, d'une nature plus simple que la fonction $E(k, \varphi)$. Aussi Legendre a-t-il distingué ces deux intégrales elliptiques en qualifiant l'une, $F(k, \varphi)$, d'intégrale de *première espèce,* et l'autre, $E(k, \varphi)$, plus compliquée, d'intégrale de *seconde espèce,* bien que ce fût celle-ci, et non la première, qui eût fourni la dénomination commune d'*intégrale elliptique*.

Les formules (25) et surtout (26) sont peu convergentes quand le module k est voisin de l'unité. Alors il y a lieu de recourir à un développement différent, en introduisant, dans les deux différentielles à intégrer, un module k', égal à $\sqrt{1-k^2}$, que Legendre appelle le *module complémentaire* de k. La fonction sous le signe $\int$, $(1-k^2\sin^2\varphi)^{\mp\frac{1}{2}}$, devient, par la substitution de $1-k'^2$ à k^2,

$$(\cos^2\varphi + k'^2\sin^2\varphi)^{\mp\frac{1}{2}} = (\cos\varphi)^{\mp 1}(1 + k'^2\tang^2\varphi)^{\mp\frac{1}{2}};$$

et, pour k voisin de 1 ou k' assez petit, la quantité $(1 + k'^2\tang^2\varphi)^{\mp\frac{1}{2}}$ est développable en une série très convergente procédant suivant les puissances de $k'^2\tang^2\varphi$, sauf pour les valeurs de φ voisines de $\frac{\pi}{2}$ (s'il y a lieu d'en considérer de telles ou que l'amplitude φ approche elle-même de $\frac{\pi}{2}$). Or, en adoptant ce développement, les divers termes à intégrer

sont de la forme $\sin^{2n}\varphi\cos^{-(2n\pm1)}\varphi\, d\varphi$, que nous savons être exactement intégrable (pp. 26 et 31). Toutefois, quand, sous le signe $\int$, le terme $k'^2\tan^2\varphi$ du binôme, à l'approche de la limite supérieure, dépassera le premier, 1, c'est suivant les puissances ascendantes du premier terme que se fera, par la formule du binôme, dans la petite partie correspondante du champ de l'intégrale, le développement convergent de la fonction sous le signe $\int$; et les termes à y intégrer, à partir de la valeur de φ pour laquelle $k'\tan\varphi = 1$, seront encore de la même forme générale ou se traiteront d'une manière semblable.

Ces procédés, rendus au besoin plus rapides, pour les valeurs de k qui ne sont ni très petites ni très voisines de l'unité, par d'ingénieuses transformations dues aux plus profonds géomètres du dernier siècle et surtout de celui-ci, ont permis à Legendre, avant même la découverte des meilleures méthodes propres à ces calculs, de construire des Tables *à double entrée* donnant les valeurs de E et de F (ou parfois de leurs logarithmes décimaux), pour un grand nombre de couples de valeurs de k et de φ, très rapprochés les uns des autres.

On peut en extraire, et c'est d'ailleurs ce qu'il a fait aussi, une Table à simple entrée, utile dans quelques questions de Mécanique physique, où soient inscrits les logarithmes décimaux des intégrales complètes E^1, F^1, pour des modules k s'échelonnant, depuis zéro jusqu'à 1, à de petits intervalles, que comblera, s'il le faut, l'interpolation par parties proportionnelles. Voici, réduits à cinq décimales, quelques uns de ces logarithmes, avec les valeurs correspondantes k du module, assimilées au sinus d'un arc θ croissant de zéro à $\frac{\pi}{2}$. Les valeurs de θ y sont exprimées en degrés sexagésimaux, au nombre de 90 dans le quadrant, et chaque module k y vaut par conséquent $\sin\theta$.

θ	log déc. $E^1(\sin\theta)$.	log déc. $F^1(\sin\theta)$.	θ	log déc. $E^1(\sin\theta)$.	log déc. $F^1(\sin\theta)$.
0°...	0,19612	0,19612	65°...	0,06589	0,36338
5...	0,19529	0,19695	70...	0,04859	0,39873
10...	0,19281	0,19944	75...	0,03198	0,44218
15...	0,18869	0,20362	80...	0,01708	0,49878
20...	0,18293	0,20952	85...	0,00547	0,58340
25...	0,17555	0,21722	86...	0,00374	0,60775
30...	0,16657	0,22679	87...	0,00228	0,63736
35...	0,15603	0,23836	88...	0,00112	0,67603
40...	0,14399	0,25207	89...	0,00033	0,73519
45...	0,13054	0,26813	89,5.	0,00009	0,78730
50...	0,11579	0,28681	89,8.	0,00002	0,84782
55...	0,09992	0,30850	89,9.	0,00000	0,88858
60...	0,08316	0,33375	90...	zéro	l'infini

269*. — Transformation montrant la proportionnalité inverse de l'intégrale elliptique complète de première espèce à la moyenne arithmético-géométrique de l'unité et du module complémentaire.

(Compléments, p. 37*.)

270* — Des fonctions elliptiques; théorème d'Euler sur les sinus et cosinus elliptiques d'une somme.

(Compléments, p. 41*.)

271*. — De la double périodicité des fonctions elliptiques.

(Compléments, p. 45*).

272. — Applications analytiques des calculs d'intégrales définies : valeur moyenne (arithmétique) d'une fonction.

On a déjà vu, par la formule de Wallis, et par les développements de $\log(1 \pm x)$, de $\operatorname{arc\,tang} x$, $\operatorname{arc\,sin} x$, etc., que le calcul des intégrales définies comporte d'importantes applications analytiques. Mais il y a encore, même sans entrer dans les domaines de la Géométrie et de la Mécanique ou de la Physique, d'autres applications non moins intéressantes de ce calcul. Telle est, par exemple, la détermination de la valeur moyenne d'une fonction.

Étant donnée une fonction, $f(x)$, d'une variable x que l'on fait croître depuis une certaine limite $x = a$ jusqu'à une autre limite $x = b$, on appelle *valeur moyenne* de cette fonction, dans l'intervalle $b - a$ considéré, la moyenne des valeurs qu'elle prend pour des valeurs de la variable se succédant à intervalles égaux infiniment petits depuis a jusqu'à b. Pour l'exprimer, nommons x_0 la valeur initiale a de x, x_n sa valeur finale b, et, ayant partagé la différence $b - a$ en un nombre très grand n de petits intervalles égaux, $\frac{b-a}{n}$, que nous pourrons désigner par Δx, intercalons entre a et b les valeurs successives $x_1 = x_0 + \Delta x$, $x_2 = x_0 + 2\Delta x, \ldots$, $x_{n-1} = x_0 + (n-1)\Delta x$, qui forment, avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, une série de termes équidistants. Les n valeurs de la fonction correspondant aux n premiers de ces termes ont évidemment pour moyenne $\frac{f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})}{n}$ ou bien, en multipliant haut et bas par Δx et observant, d'une part, que Δx est l'accroissement commun $\Delta x_0 = x_1 - x_0$, $\Delta x_1 = x_2 - x_1, \ldots$, d'autre part, que $n\Delta x$ égale l'ac-

croissement total, $x_n - x_0$ ou $b - a$, de x,

$$\frac{f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}}{b-a}.$$

Si, actuellement, nous rapprochons les valeurs de $f(x)$ considérées, en faisant croître à l'infini leur nombre n, la limite vers laquelle tendra cette fraction sera justement la valeur moyenne demandée; et, comme la somme $f(x_0)\Delta x_0 + f(x_1)\Delta x_1 + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1}$ deviendra l'intégrale définie $f(x_0)dx_0 + f(x_1)dx_1 + \ldots + f(x_{n-1})dx_{n-1}$ ou $\int_a^b f(x)dx$, parfaitement déterminée, on aura

$$\text{(45)} \qquad \text{Valeur moyenne de } f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Le calcul de la valeur moyenne de $f(x)$ dans un certain intervalle se ramène donc à celui de l'intégrale $\int f(x)dx$ prise dans le même intervalle; et celle-ci, à l'inverse, est elle-même le produit de l'intervalle $b-a$ des limites par la valeur moyenne de $f(x)$. En d'autres termes, *la fonction figurant sous un signe $\int$ peut y être remplacée par sa valeur moyenne entre les limites de l'intégration.*

273. — Exemple : valeurs moyennes de $\sin^m x$ et de $\cos^m x$, où l'exposant m est supposé entier et positif.

Cherchons, par exemple, la valeur moyenne des fonctions $\sin^m x$, $\cos^m x$, où nous admettrons que m soit un exposant entier positif et où nous supposerons x variable de $-\infty$ à ∞. Comme $\sin x$ et $\cos x$ reprennent leurs valeurs primitives lorsque x croît de 2π, en sorte que leurs valeurs individuelles se retrouvent les mêmes dans tous les intervalles d'étendue 2π commençant par n'importe quelle valeur de x, leurs valeurs moyennes seront aussi, évidemment, les mêmes pour toutes ces périodes 2π, et, par suite, pour un intervalle $b-a$ composé d'un nombre indéfiniment croissant de périodes. On pourra même, à cet intervalle $b-a$ très grand, ajouter une fraction quelconque de période sans modifier sensiblement le résultat; car le quotient, par $b-a$, des intégrales $\int \sin^m x\,dx$, $\int \cos^m x\,dx$, prises pour la fraction proposée de période, sera infiniment petit. Donc la moyenne générale des valeurs de $\sin^m x$ et de $\cos^m x$, ou moyenne calculée pour toutes les valeurs réelles de x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, pourra s'évaluer en ne considérant qu'un intervalle égal à 2π. Et comme même la fonction $\cos x$, identique à $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, prend à chaque instant la valeur

que recevra le sinus, un quart de période après ou quand x aura grandi de $\frac{\pi}{2}$, les mêmes éléments entreront dans l'expression des deux moyennes, qui, dès lors, ne peuvent différer l'une de l'autre. Il suffit donc d'évaluer celle de $\sin^m x$, en y faisant varier x de zéro à 2π.

Or, si l'exposant m est impair, la fonction $\sin^m x$ recevra, dans la seconde moitié de l'intervalle, c'est-à-dire de $x = \pi$ à $x = 2\pi$, des valeurs égales et contraires à celles qu'elle avait eues dans la première moitié, puisque $\sin x$ et, par suite, $\sin^m x$ changent de signe quand x croît de π. Donc l'expression de la moyenne contiendra des éléments négatifs en même nombre et de même valeur absolue que ses éléments positifs : elle sera nulle. Si, au contraire, l'exposant m est pair, $\sin^m x$ aura toujours le signe *plus;* et la seconde moitié de l'intervalle total, comprise entre $x = \pi$ et $x = 2\pi$, reproduira exactement les mêmes valeurs que la première moitié; en sorte qu'il suffira de considérer celle-ci, c'est-à-dire de prendre la moyenne de $\sin^m x$ pour x croissant de zéro à π. Mais la fonction $\sin^m x$ y recevra encore deux fois les mêmes valeurs; car, de $x = \frac{\pi}{2}$ à $x = \pi$, elle redevient symétriquement ce qu'elle était entre $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = 0$. Donc, en définitive, il suffira de faire varier x depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$; et l'on posera, dans la formule générale (45), $f(x) = \sin^m x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$. Il en résultera, pour la moyenne cherchée, l'expression $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx$, égale au produit $\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{m-1}{m}$, d'après la formule (11) [p. 60] de la dernière Leçon.

En résumé, *la moyenne des valeurs de* $\sin^m x$ *ou de* $\cos^m x$, m *désignant un exposant positif et entier, est toujours commensurable : nulle, quand cet exposant se trouve impair, égale à* $\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{m-1}{m}$, *quand il est pair.*

Dans le cas particulier $m = 2$, elle se réduit à $\frac{1}{2}$. Donc, *la valeur moyenne des carrés* $\sin^2 x$ *ou* $\cos^2 x$ *est* $\frac{1}{2}$, simple moyenne arithmétique de leurs valeurs extrêmes zéro et 1. C'est ce qu'on aurait pu prévoir, en observant que $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$, exprimés en fonction de $\cos 2x$, deviennent respectivement $\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\cos 2x$ et se réduisent, en moyenne, au terme constant $\frac{1}{2}$, car leur autre terme, proportionnel à $\cos 2x$, est aussi souvent et autant négatif que positif. On l'aurait

trouvé aussi, et même encore plus simplement, en observant que, vu l'égalité des deux moyennes de $\sin^2 x$ et de $\cos^2 x$, chacune d'elles est la moitié de la somme constante $\sin^2 x + \cos^2 x$, qui vaut 1.

274*. — Valeur moyenne géométrique d'une fonction.

(Compléments, p. 48*).

275*. — Application des intégrales définies au calcul approché du reste de certaines séries.

(Compléments, p. 50*.)

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES INTÉGRALES DÉFINIES : QUADRATURE DES AIRES PLANES ET RECTIFICATION DES COURBES.

276. — Expression générale d'une aire plane.

Passons actuellement aux nombreuses et importantes applications des intégrales définies à la Géométrie : la plus simple est la *quadrature* des surfaces planes, c'est-à-dire l'évaluation de leur *aire* [1] ou

---

[1] *Note sur la notion d'aire.*

Jusqu'à ces derniers temps, les auteurs d'Analyse ne paraissaient pas avoir senti le besoin d'éclaircir, en la dégageant de son fond obscur, cette notion d'*aire*, dans laquelle se résout et s'exprime notre sentiment presque instinctif de la *contenance* ou de l'étendue des figures à deux dimensions, quoiqu'ils eussent, cependant, jugé nécessaire d'analyser l'idée, bien moins complexe, de la longueur des courbes, ou celle de la mesure analogue des surfaces courbes en unités planes. Voilà pourquoi je me propose de suppléer ici, du moins par une note que l'on pourra, si l'on veut, laisser de côté, à cette lacune réellement assez grave, en montrant que l'aire d'une figure plane limitée en tous sens est une quantité déterminée, indépendante de l'orientation de la figure par rapport aux côtés du réseau de carrés que l'on y trace.

J'aurai : 1° à définir l'aire d'une surface; 2° à montrer qu'il est possible d'obtenir cette aire par décomposition de la surface en éléments de forme quelconque, dont il suffit d'ajouter les aires partielles évaluées comme pour des figures de même forme et de dimensions finies; 3° à prouver l'invariabilité de l'aire totale, lors de déplacements quelconques de la surface par rapport aux axes coordonnés.

1. *Définition de l'aire.* — Imaginons que la figure plane proposée AMBM'A (p. 92) soit rapportée à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, et qu'on divise son plan, par des parallèles indéfinies aux axes coordonnés, en carrés ayant pour côté l'unité de longueur, puis, tous ces carrés eux-mêmes, au moyen de parallèles équidistantes de plus en plus rapprochées, en carrés incomparablement plus petits. Le rapport du nombre de ceux-ci compris dans la figure proposée, au nombre des carrés pareils que contiendra un carré de côté égal à 1, tend vers une limite à mesure que les parallèles se rapprochent de plus en plus; et c'est justement cette limite, dont nous allons démontrer l'existence, qui est dite l'*aire* de la figure.

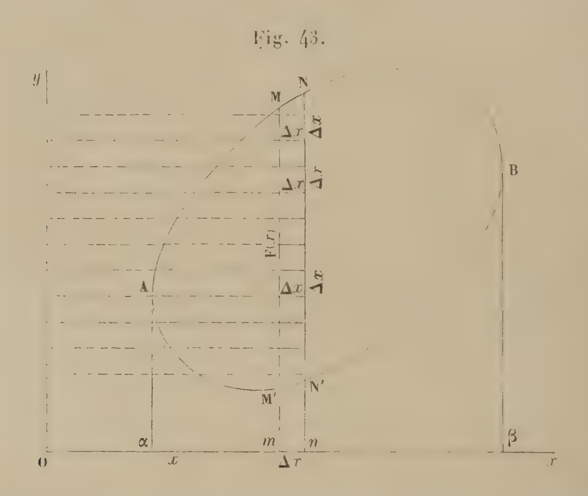
Soit Δx le côté des petits carrés considérés; et, si x est l'abscisse d'une quel-

du rapport qui existe entre l'*étendue* de ces surfaces et celle d'un carré ayant pour côté l'unité de longueur. Cette opération s'appelle

---

conque mM des parallèles à l'axe Oy qui coupent la figure proposée, appelons F(x) la partie de cette parallèle, M'M, qu'intercepte la figure et qui, variant en général d'une ordonnée mM à la suivante nN, est bien une certaine fonction de x. Le nombre des petits carrés compris entre les deux ordonnées mM, nN, et enfermés dans le contour donné, égalera évidemment, à une très petite erreur relative près (négligeable à la limite), le quotient $\frac{F(x)}{\Delta x}$ qui indique combien de fois M'M contient le côté des petits carrés. Et le nombre total de ces carrés tracés

Fig. 43.



dans la figure sera évidemment, lui-même, sauf une erreur *relative* également très petite et finalement négligeable, la somme des valeurs que prend ce quotient, $\frac{F(x)}{\Delta x}$ ou $\frac{F(x)\,\Delta x}{(\Delta x)^2}$, lorsque x y croît, par petits intervalles Δx, depuis une limite très peu différente de l'abscisse, O$\alpha = a$, du point A de la figure qui a l'abscisse la plus petite, jusqu'à une autre très peu différente de l'abscisse, O$\beta = b$, du point B qui a, au contraire, l'abscisse la plus grande. Or, plus Δx est supposé petit, et plus la somme dont il s'agit, $\frac{\Sigma F(x)\,\Delta x}{(\Delta x)^2}$, a son numérateur voisin de l'intégrale définie $\int_a^b F(x)\,dx$. On peut donc, avec une erreur relative évanouissante, prendre pour nombre des petits carrés de la figure, $\frac{1}{(\Delta x)^2}\int_a^b F(x)\,dx$. Et comme il est évident que chaque grand carré de côté 1 comprend $\frac{1}{\Delta x}$ files de petits carrés se composant chacune de $\frac{1}{\Delta x}$ carrés, en sorte qu'il contient un nombre de ceux-ci

quadrature (de *quadratum,* carré), soit parce qu'on y rapporte les surfaces à un carré déterminé pris pour unité d'aire, soit parce que

---

égal à $\frac{1}{(\Delta x)^2}$, le rapport du nombre précédent à ce dernier tendra vers le quotient de $\frac{1}{(\Delta x)^2}\int_a^b F(x)\,dx$ par $\frac{1}{(\Delta x)^2}$, ou vaudra, finalement, l'intégrale $\int_a^b F(x)\,dx$.

Ainsi le rapport-limite appelé *aire* de la surface AMBM'A est la quantité $\int_a^b F(x)\,dx$, parfaitement déterminée dans le système des axes coordonnés choisis.

On voit, d'ailleurs, que cette intégrale resterait la même, si, imprimant une *translation* quelconque à la surface proposée, on augmentait les coordonnées x, y de tous ses points, de deux quantités constantes : car cela reviendrait à faire parcourir à tous ces points des droites égales et parallèles, ou à transporter parallèlement à elles-mêmes les droites M'M, N'N, ..., sans changer leurs distances respectives dx; de sorte que l'intégrale $\int_a^b F(x)\,dx$ conserverait en définitive les mêmes éléments, malgré l'augmentation commune éprouvée par ses deux limites a, b. Et cette intégrale ne serait pas altérée davantage, si, faisant tourner la figure autour d'un des axes coordonnés, qu'on peut choisir pour celui, Ox, des abscisses, on l'amenait par retournement dans une position symétrique de la première; vu que chaque partie d'ordonnée, $MM' = F(x)$, interceptée par la courbe, deviendrait, dans la courbe symétrique, la partie analogue d'ordonnée correspondant à la même abscisse x.

Il ressort donc, presque immédiatement, de la définition de l'aire, que cette quantité est la même pour toutes les surfaces égales et pareillement orientées dans le plan, ainsi que pour leurs symétriques par rapport aux axes coordonnés.

2. *Possibilité d'obtenir l'aire par décomposition de la surface en éléments de forme quelconque.* — En dénombrant les carrés infiniment petits, de côté dx, compris à l'intérieur de la figure, et qui comptent individuellement dans l'aire totale pour la fraction $(dx)^2$, rien n'empêchera évidemment de les grouper, à volonté, en assemblages quelconques, dont chacun comprendrait une infinité de petits carrés contigus. Et il sera permis, dans ce cas, de négliger les carrés qui se trouveront sur le contour de chaque groupe; car leur nombre disparaîtra devant celui des carrés intérieurs. Autrement dit, l'aire de la surface considérée égale la somme des aires qu'on obtiendrait en découpant cette surface, par des lignes quelconques, en parties aussi petites que l'on voudra, puis, en évaluant chaque partie comme si elle était seule. Rien n'empêchera même de supposer ensuite ces parties indéfiniment décroissantes, de manière à pouvoir négliger une portion relativement infiniment petite de leur totalité (toutes celles, par exemple, qui seront contiguës au contour général), et à pouvoir également remplacer les autres par des éléments différents, ayant avec elles des rapports infiniment voisins de l'unité.

On remarquera que c'est par de telles décompositions, d'une figure, en fragments dont on change d'ailleurs parfois la disposition, que la Géométrie élémen-

les anciens avaient l'habitude de ramener un tel problème à celui où l'on demanderait de changer la surface proposée en un carré équiva-

---

taire parvient à ramener au rectangle, seul évaluable immédiatement, le parallélogramme, le triangle, le trapèze et, même, le secteur circulaire, avec le cercle. Dans les parties plus élevées des Mathématiques, le même principe s'applique à des cas assez nombreux où, pour faciliter les calculs, on divise une surface en éléments (autres que des carrés rectilignes) appropriés à la forme du contour de cette surface.

3. *Invariabilité de l'aire d'une surface dans toutes les positions possibles de celle-ci.* — Nous avons montré que l'aire d'une surface plane AMBM'A (p. 92) est une quantité déterminée dans chaque position de la surface par rapport aux axes et qui, de plus, reçoit la même valeur pour cette surface que pour toute autre surface égale orientée pareillement (c'est-à-dire ayant tous ses côtés parallèles aux côtés pareils de la proposée). Mais, pour que la notion d'aire se trouve éclaircie en ce qu'elle a d'essentiel, il nous reste à faire voir que cette quantité est bien propre à la surface et ne tient nullement aux axes rectangulaires choisis, ou, en d'autres termes, qu'elle ne changera pas, si l'on enlève la figure AMBM'A du plan des xy, et qu'on l'y reporte ensuite dans telle position qu'on voudra.

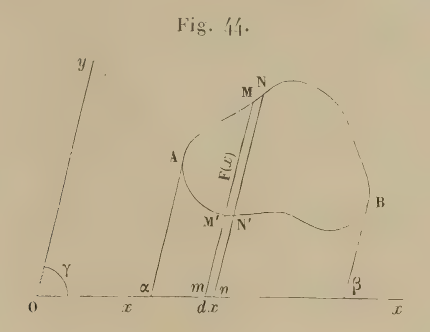
Pour le démontrer, observons d'abord qu'il existe une figure, le cercle, dont l'équation reste la même quand, laissant son centre fixe, on la fait tourner d'une manière quelconque dans le plan, et même lorsqu'on la retourne sens dessus dessous. Donc, pour cette figure, tout déplacement équivaut à une simple translation quant aux circonstances de forme qu'elle présente par rapport aux axes, et son aire sera invariable, d'après ce qui a été démontré.

Or, comparons la surface donnée AMBM'A à un cercle que nous lui supposerons lié et que nous tracerons dans son plan. La comparaison se fera en menant un double système de parallèles équidistantes, liées également à ces deux figures et propres à découper leur plan, par exemple, en carrés très petits égaux (ne se confondant pas, bien entendu, avec ceux, dx^2, *d'orientation invariable,* au moyen desquels s'évaluerait à chaque instant leur aire incomparablement plus grande). Soient m le nombre des carrés qu'entourera le contour de la surface AMBM'A, n le nombre de ceux qui se trouveront de même compris entièrement dans le cercle. Il est évident que, si les parallèles sont assez rapprochées, la figure AMBM'A égalera sensiblement la somme des m carrés contenus à son intérieur; de même, le cercle sera, sauf erreur négligeable, la somme des n carrés qu'il comprendra. Or, quelque position qu'on donne sur le plan des xy à la figure proposée, soit en la déplaçant à volonté sans lui faire quitter ce plan, soit en la retournant, tous ces carrés, qu'elle entraînera dans ses mouvements en même temps que le cercle, ne cesseront pas d'avoir leurs côtés respectivement égaux et parallèles chacun à chacun, ou, en d'autres termes, d'être des figures égales, pareillement orientées et, par suite, d'aires équivalentes. Ainsi, la surface proposée et le cercle ne cesseront pas d'égaler, l'une, m fois, l'autre, n fois, l'un des carrés; en sorte que l'aire de la figure AMBA, restant toujours le produit de celle du cercle, qui est invariable, par un rapport constant $\frac{m}{n}$, sera invariable elle-même. C'est justement ce qu'il fallait démontrer.

lent, opération constituant bien, à proprement parler, la *quadrature* de cette surface.

Soient AMBM'A (*fig.* 44) la figure plane, limitée en tout sens, dont on demande d'évaluer la surface, et Ox, Oy les axes rectilignes,

Fig. 44.



faisant entre eux un angle donné γ, auxquels on la rapporte. Menons une quelconque, mM, des ordonnées qui la coupent et que définira, en position, leur abscisse, $Om = x$. Nous aurons, ici, à considérer spécialement la partie, M'M, de cette ordonnée, qui sera comprise à l'intérieur de la surface AMBM'A ; car cette partie M'M *jaugera,* en quelque sorte, la surface dans le sens de mM, et c'est d'elle que dépendra l'étendue à évaluer, du moins pour l'abscisse x ou vis-à-vis du point m. Sa longueur M'M sera évidemment une fonction de x, parfaitement déterminée, et que l'on pourra calculer dans chaque cas si toutes les parties du contour AMBM'A sont bien définies. Nous appellerons $F(x)$ cette fonction. Elle s'obtiendra, par exemple, en menant les deux ordonnées extrêmes Aα, Bβ, entre lesquelles est comprise la surface, et dont nous appellerons respectivement a, b les abscisses $O\alpha$, $O\beta$, puis en prenant, pour chaque abscisse intermédiaire $Om = x$, la différence mM — mM' des deux ordonnées correspondantes de la partie supérieure AMB du contour et de la partie inférieure AM'B, ordonnées qu'on pourra connaître en fonction de x quand la forme et la situation de la figure par rapport aux axes seront désignées.

Cela posé, observons que des ordonnées infiniment voisines, mM, nN, ..., menées depuis αA jusqu'à βB, découpent la surface en bandes étroites, dont l'une, MM'N'N, par exemple, est comprise entre l'ordonnée mM, d'abscisse x, et l'ordonnée nN, qui a pour abscisse $x + dx$. Or cette bande M'MNN' peut être assimilée à un parallélogramme qui aurait pour un de ses côtés la droite $M'M = F(x)$,

pour côtés contigus à celui-là deux éléments rectilignes égaux et parallèles à $mn = dx$, inclinés, par suite, comme l'axe des x, de l'angle γ par rapport à l'ordonnée mM, enfin, dont le quatrième côté serait situé sur nN. Effectivement, les deux petites parties, en forme de triangles mixtilignes, qu'il faudrait ajouter ou retrancher, l'une, en MN, l'autre, en M'N', pour faire de la bande M'MNN' le parallélogramme en question, ont une dimension, dx, qui leur est commune avec celui-ci, mais l'autre dimension (suivant N'N), infiniment petite en comparaison de la dimension analogue M'M du parallélogramme; de sorte que leur aire se trouve bien négligeable devant l'aire du parallélogramme. Celle-ci égalant, comme on sait, le produit de deux côtés contigus, $F(x)$, dx, par le sinus de l'angle γ qu'ils comprennent, l'expression de la bande M'MNN', c'est-à-dire d'un élément de la surface à évaluer, sera $(\sin\gamma) F(x) dx$.

Par suite, l'aire totale AMBM'A, composée des aires de toutes les bandes pareilles entre αA et βB, sera la somme des valeurs prises successivement par le produit $(\sin\gamma) F(x) dx$ quand x y varie avec continuité depuis l'abscisse, a, du point A jusqu'à celle, b, du point B; ce qui constitue l'intégrale définie $\int_a^b (\sin\gamma) F(x) dx$. En faisant sortir du signe $\int$ le facteur constant $\sin\gamma$, on aura donc, pour l'expression cherchée de la surface AMBM'A,

$$\text{(1)} \qquad \text{Aire} = (\sin\gamma) \int_a^b F(x) dx :$$

c'est dire que son évaluation reviendra au calcul de l'intégrale définie $\int_a^b F(x) dx$.

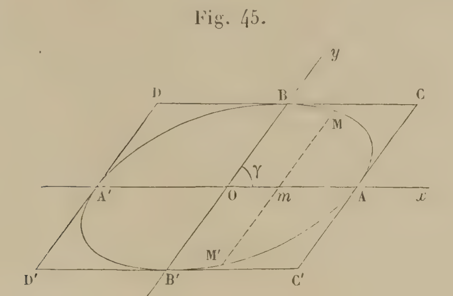
277. — Premier exemple : Aires de l'ellipse et des parallélogrammes (à côtés conjugués) qu'on lui circonscrit.

Comme premier exemple, cherchons la surface que comprend une ellipse ABA'B'A, rapportée à un système de demi-diamètres conjugués $OA = a$, $OB = b$, choisis, le premier, pour axe des x, le second, pour axe des y.

L'équation de la courbe étant, comme on sait, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, les deux ordonnées mM, mM' qui correspondent à une abscisse quelconque $Om = x$, ont respectivement pour valeurs $\pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Leur diffé-

rence algébrique M′M, que nous désignons, en général, par $F(x)$, vaudra donc le double de mM, c'est-à-dire $2\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. D'ailleurs,

Fig. 45.



l'abscisse la plus petite est, pour toute la courbe, celle, $-a$, du point A′, symétrique de A par rapport à l'origine O ; et la plus grande est celle, a, du point A. La formule générale (1) deviendra donc

$$(2) \qquad \text{Aire de l'ellipse} = (\sin\gamma)\int_{-a}^{a} 2\,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Pour simplifier cette expression, observons que, x variant de $-a$ à a, le rapport $\frac{x}{a}$ croît de -1 à 1 et égale, par conséquent, le sinus d'un angle qui grandirait de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Appelons u cet angle, et prenons-le pour variable indépendante. Nous aurons $x = a\sin u$; d'où

$$dx = a\cos u\,du,\quad \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du = a^2\cos^2 u\,du;$$

et, comme u varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, la formule (2) deviendra

$$\text{Aire de l'ellipse} = 2ab\sin\gamma\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,du.$$

Or nous pouvons (p. 88) remplacer la fonction sous le signe $\int$, $\cos^2 u$, par sa valeur moyenne dans l'intervalle π des deux limites, valeur que nous avons trouvée (p. 90) être $\frac{1}{2}$; et, l'intégrale se réduisant alors à $\int\frac{du}{2} = \frac{\pi}{2}$, la formule cherchée sera

$$(3) \qquad \text{Aire de l'ellipse} = \pi ab\sin\gamma.$$

Comparons cette surface à celle du parallélogramme circonscrit

CDD'C', dont les côtés CD, CC' sont respectivement égaux et parallèles aux deux diamètres conjugués, $AA' = 2a$, $BB' = 2b$, qui ont servi d'axes coordonnés. Son aire est le produit $(2a)(2b)\sin\gamma$, et l'on voit que la formule (3) équivaut à la proportion

$$(4) \qquad \frac{\text{Aire de l'ellipse}}{\text{Aire du parallélogramme circonscrit}} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc, *l'aire d'une ellipse est le produit, par le facteur constant* $\frac{\pi}{4}$, *de l'aire de tout parallélogramme circonscrit, à côtés orientés suivant deux diamètres conjugués;* d'où il suit évidemment que *tous les parallélogrammes circonscrits à une même ellipse, et qui ont leurs côtés parallèles à deux diamètres conjugués de la courbe, sont équivalents.*

Supposons, en particulier, qu'on ait choisi pour demi-diamètres conjugués OA, OB les demi-axes (rectangulaires) de l'ellipse, dont nous appellerons A le plus grand et B le plus petit. Alors il faudra faire, dans (3), $a = A$, $b = B$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, et il viendra

$$(5) \qquad \text{Aire de l'ellipse} = \pi AB.$$

On remarquera que si, A restant constant, B grandissait *jusqu'à la valeur* A, l'ellipse finirait par se confondre avec son cercle circonscrit, de rayon A, et que, en même temps, son aire πAB deviendrait πA^2, expression bien d'accord avec celle que donne la Géométrie élémentaire, où, cependant, les éléments de surface choisis étaient délimités par des rayons divergents et non, comme ici, par des cordes parallèles à l'axe des y. De même, si B était invariable, mais que A décrût jusqu'à la valeur B, l'ellipse se réduirait au cercle, de rayon B, qui lui est inscrit; quant à son aire, elle deviendrait πB^2. Et comme on a $\pi AB = \sqrt{(\pi A^2)(\pi B^2)}$, la formule (5) équivaut à l'énoncé suivant, en langage ordinaire :

Une ellipse a pour aire la moyenne proportionnelle entre l'aire de son cercle inscrit et celle de son cercle circonscrit.

278. — **Deuxième exemple : aires limitées par des courbes paraboliques.**

On appelle quelquefois *parabole de degré n* une courbe dans laquelle l'ordonnée y a pour expression, en fonction de l'abscisse x, un polynôme $f(x)$ du degré n, courbe telle, par suite, que toute droite parallèle à l'axe des y la coupe *à une distance finie* de l'axe des x et *en un seul point.* Mais, dans un sens un peu différent, qui ne com-

prend le précédent que lorsque le polynôme $f(x)$ se réduit à un monôme, on appelle courbe du genre *parabole* toute ligne où l'ordonnée est proportionnelle à la puissance de l'abscisse marquée par un exposant *n positif,* d'ailleurs entier ou fractionnaire à volonté; ce qui donne des ordonnées toujours finies avec x, mais en donne, pour chaque valeur de x, ou deux égales et contraires, ou aucune (au lieu d'une et une seule), dans le cas de n fraction irréductible à numérateur impair et à dénominateur pair. La parabole ordinaire du second degré rentre dans ces deux définitions, savoir : 1° dans la première, quand on y compte les x suivant une tangente quelconque (la tangente au sommet, par exemple) et les y, suivant la parallèle à l'axe menée par le point de contact, d'où résulte pour son équation la forme $y = ax^2$; et, 2°, dans la seconde, avec n fractionnaire, quand ces axes coordonnés échangent leurs rôles ou que, l'équation devenant ainsi $x = ay^2$, y se trouve proportionnel à $\pm x^{\frac{1}{2}}$.

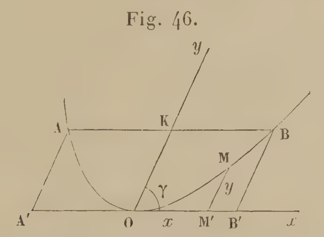
L'aire comprise entre une quelconque de ces courbes, l'axe des x et deux ordonnées fixes s'évalue immédiatement, à cause de la facilité que présente l'intégration d'un polynôme, même quand il n'est pas rationnel ou que les exposants des divers termes y sont fractionnaires.

Considérons, par exemple, la parabole ayant pour équation

$$(6) \qquad y = ax^n,$$

et proposons-nous d'évaluer l'aire contenue entre cette courbe OB, l'axe des x et une ordonnée quelconque B′B. Ici la portion M′M

Fig. 46.



d'ordonnée qui est comprise dans la surface se confond avec l'ordonnée même y de la courbe, et l'on a $F(x) = ax^n$. D'ailleurs, l'abscisse x croît, dans cette surface, depuis la valeur zéro, qu'elle a au point de départ supposé O, jusqu'à la valeur OB′, que nous pourrons, sans inconvénient, désigner par x. La formule générale (1) (p. 96) donnera donc

$$\text{Aire parabolique OBB}' = (\sin\gamma)\int_0^x ax^n\,dx = \frac{ax^{n+1}\sin\gamma}{n+1} = \frac{x(ax^n)\sin\gamma}{n+1}.$$

Mais on remarquera que, d'après l'équation (6) de la courbe, le produit ax^n, pris à la limite supérieure ou pour $x = \text{OB}'$, représente l'ordonnée correspondante $y = \text{B}'\text{B}$. L'expression trouvée pour l'aire égale donc $\frac{xy \sin\gamma}{n+1}$. Or, si nous construisons sur OB′ et B′B le parallélogramme OB′BK, le produit $xy \sin\gamma$, ou $\text{OB}' \times \text{OK} \times \sin \text{B}'\text{OK}$, ne sera autre que sa surface. Par suite, la formule ci-dessus revient à celle-ci

$$(7) \qquad \text{Aire OBB}' = \frac{\text{Aire OB}'\text{BK}}{n+1};$$

et elle exprime que *l'aire comprise entre une parabole de degré n (à équation binôme), une ordonnée et l'axe des abscisses, égale la $n+1^{\text{ième}}$ partie du parallélogramme construit sur les deux côtés rectilignes qui la délimitent.*

Dans le cas de la parabole ordinaire $y = ax^2$, on a $n = 2$, et l'aire OBB′ vaut le tiers du parallélogramme OB′BK. Ce résultat, remarquable par sa simplicité, est dû à Archimède. Comme il en serait évidemment de même en deçà de l'origine, ou vers les x négatifs que rien n'aurait empêché de choisir pour x positifs, une aire parabolique telle que OA′A, limitée par l'ordonnée A′A égale à B′B et d'une abscisse négative OA′ égale à OA, vaudra aussi le tiers du parallélogramme OKAA′. Par suite, la parabole découpe le parallélogramme total ABB′A′ en deux parties, dont l'une, A′AOBB′, est le tiers de cette figure, et l'autre, AOBK, les deux tiers. Donc, en observant que la distance des deux parallèles A′B′, AB, hauteur du parallélogramme, mesure l'écart maximum de l'arc AOB d'avec sa corde AB, on pourra formuler la règle suivante :

La surface d'un segment AOB *de parabole (ordinaire) s'évalue en multipliant sa base par les deux tiers de sa hauteur.*

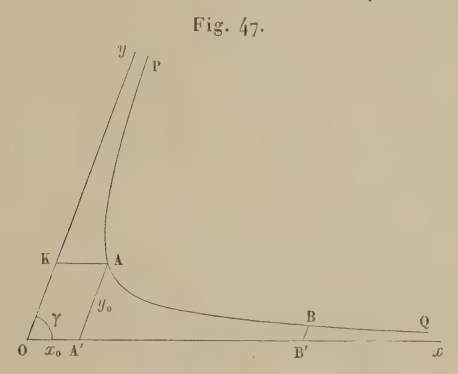
Remarquons enfin que l'aire comprise entre l'axe des abscisses, deux ordonnées quelconques et une parabole d'un degré entier ne dépassant pas le troisième, ou représentée par une équation de la forme $y = f(x) = \text{A} + \text{B}x + \text{C}x^2 + \text{D}x^3$, s'exprimera exactement, en fonction de ces deux ordonnées, de leur intervalle h (différence de leurs abscisses) et d'une ordonnée intermédiaire le divisant en deux intervalles égaux, au moyen de la formule de Simpson (4) [p. 72], qu'il suffira de multiplier par le sinus de l'angle γ des axes s'ils ne sont pas rectangulaires. Nous avons vu, en effet, que la formule d'intégration de Simpson est rigoureuse quand, sous le signe $\int$, la fonction $f(x)$

ne dépasse pas le troisième degré. Cette formule revient donc à assimiler l'intégrale cherchée, $\int_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} f(x)\,dx$, à la surface comprise entre un axe des x, les deux perpendiculaires à cet axe définies par les abscisses $x_0 \pm \frac{h}{2}$, et la parabole du *second* degré ayant son axe normal à celui des x avec trois ordonnées, pour $x = x_0$ et $x = x_0 \pm \frac{h}{2}$, égales respectivement aux valeurs correspondantes, $f(x_0)$, $f\left(x_0 \pm \frac{h}{2}\right)$, de la fonction placée sous le signe $\int$.

279. — Troisième exemple : aires hyperboliques.

On sait qu'une hyperbole ordinaire, rapportée à ses asymptotes pour axes coordonnés, a son équation de la forme $xy = c$. Par extension, on nomme *hyperbole,* en général, toute courbe dont l'équation est de la forme analogue $x^\alpha y^\beta = c$, α et β désignant deux exposants entiers et positifs. Pour fixer les idées, nous admettrons qu'on ait appelé y la coordonnée dont l'exposant est le moindre ; de sorte qu'on ait $\beta < \alpha$, à l'exception du cas de l'hyperbole ordinaire, où $\beta = \alpha$. La relation $x^\alpha y^\beta = c$, résolue par rapport à y, donnera évidemment y proportionnel à x^{-n}, si n désigne le nombre $\frac{\alpha}{\beta}$, généralement plus

Fig. 47.



grand que 1, mais égal à 1 pour l'hyperbole ordinaire. Donc l'équation de la courbe prendra la forme

$$(8) \qquad y = \frac{a}{x^n},$$

où nous pourrons de plus, en choisissant convenablement les sens des

coordonnées positives, supposer la branche PABQ, qu'il s'agit de considérer, située du côté des x positifs, et avoir aussi $y > 0$ pour $x > 0$, c'est-à-dire a positif. L'ordonnée y décroissant, d'après (8), depuis l'infini jusqu'à zéro, quand x grandit de zéro à l'infini, la branche PABQ de courbe se raccorde asymptotiquement, ou à une distance infinie de l'origine, aux deux axes des x et des y positifs.

Cela posé, soit à évaluer l'aire comprise entre la courbe, l'axe des x et deux ordonnées, A′A, B′B, ayant respectivement les abscisses x_0, x. La formule générale (1) deviendra

$$(9) \qquad \text{Aire} = (\sin\gamma)\int_{x_0}^{x} y\,dx = a\sin\gamma\int_{x_0}^{x} x^{-n}\,dx.$$

S'il ne s'agit pas d'une hyperbole ordinaire et qu'on ait, par suite, vu l'axe des y choisi, $n > 1$, l'intégrale $\int_{x_0}^{x} x^{-n}\,dx$ vaudra $\frac{1}{n-1}\left(\frac{-1}{x^{n-1}}\right)_{x_0}^{x}$ ou $\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{x_0^{n-1}} - \frac{1}{x^{n-1}}\right)$; et l'aire restera finie, pour devenir finalement $\frac{a\sin\gamma}{(n-1)x_0^{n-1}}$, quand on rendra infinie l'abscisse x de B′B, en rejetant ainsi l'ordonnée B′B à l'infini où elle s'annule. Or cette valeur limite, si l'on appelle y_0 l'ordonnée initiale A′A, quotient de a, d'après (8), par x_0^n, pourra s'écrire plus simplement $\frac{x_0 y_0 \sin\gamma}{n-1}$. Elle égalera donc la $(n-1)^{\text{ième}}$ partie du parallélogramme OA′AK construit sur les côtés $\text{OA}' = x_0$, $\text{A}'\text{A} = y_0$; et l'on aura

$$(10) \qquad \text{Aire AA}'x\,(\text{de longueur infinie}) = \frac{\text{Aire OA}'\text{AK}}{n-1} \quad (\text{pour } n > 1).$$

Donc, *quand l'exposant n est supérieur à l'unité, la surface de longueur infinie comprise, au delà d'une ordonnée* AA′, *entre la courbe* AQ *et son asymptote choisie pour axe des abscisses, égale seulement le produit, par le facteur constant* $\frac{1}{n-1}$, *du parallélogramme* OA′AK *qui a pour un de ses côtés cette ordonnée et dont le côté opposé est sur l'asymptote parallèle.*

S'il s'agit, au contraire, d'une hyperbole du second degré, la formule (9), où il faudra faire $n = 1$, donnera de suite

$$(11) \qquad \text{Aire AA}'\text{B}'\text{B} = a\sin\gamma(\log x)_{x_0}^{x} = a\sin\gamma\log\frac{x}{x_0} \quad (\text{pour } n = 1).$$

L'expression de l'aire n'est plus algébrique, mais transcendante, et sa valeur se trouve proportionnelle au logarithme népérien du rapport des deux abscisses extrêmes OB′, OA′.

C'est parce que les logarithmes népériens sont ainsi représentés graphiquement par des aires hyperboliques, qu'on leur donne quelquefois le nom de *logarithmes hyperboliques*.

Si l'on fait croître x indéfiniment, le logarithme de son rapport à x_0 devient infini, et la surface AA′B′B ne tend plus vers une limite à mesure que sa longueur augmente. La raison en est que, pour $n = 1$, les ordonnées telles que B′B, étant inversement proportionnelles à la première puissance seulement de l'abscisse et non à une puissance plus élevée, finissent par décroître, à mesure que leur abscisse augmente, infiniment moins qu'elles ne faisaient tant que n était supérieur à l'unité : la hauteur des parties de la surface infiniment éloignées de l'origine et, par suite, ces parties mêmes ont donc crû, comparativement, dans un rapport infini.

280. — **Quatrième exemple : aire comprise entre un arceau de cycloïde et sa base.**

Une décomposition en bandes par les normales successives de la courbe, comme on le fait pour le cercle dans la Géométrie élémentaire, nous a déjà (T. I, p. 225) fait très simplement connaître la surface comprise entre un arceau de cycloïde et sa base. Mais il est bon de la déduire aussi, par la formule (1) [p. 96], d'une décomposition en bandes parallèles $y\,dx$ de largeur uniforme.

Adoptons pour axe des x la base de l'arceau et comme axe des y la tangente au point de départ de celui-ci, de manière à avoir pour la moitié de l'aire proposée l'expression $\int_0^{\pi r} y\,dx$, r désignant le rayon du cercle générateur, et l'intégration s'étendant depuis l'abscisse $x = 0$ de l'origine jusqu'à celle $x = \pi r$ du sommet. Cette expression, si l'on y remplace dx par sa valeur tirée de l'équation différentielle de la courbe [t. I, p, 225, formule (4)] $dx = \frac{\sqrt{y}\,dy}{\sqrt{2r-y}}$, et si l'on prend pour variable indépendante l'ordonnée y, qui y croît de zéro à $2r$, devient $\int_0^{2r} \frac{y^{\frac{3}{2}}\,dy}{\sqrt{2r-y}}$. Après l'avoir doublée, intégrons-la par parties,

en observant que

$$\begin{aligned}\int y^{\frac{3}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2r-y}} &= -2\int y^{\frac{3}{2}}\, d\sqrt{2r-y} \\ &= -2y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2r-y} + 3\int \sqrt{2r-y}\, y^{\frac{1}{2}}\, dy \\ &= -2y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2r-y} + 3\int \sqrt{2ry-y^2}\, dy,\end{aligned}$$

et que le terme intégré $-2y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2r-y}$ s'annule aux deux limites. Nous aurons

$$\text{(12)} \qquad \text{Aire de la cycloïde} = 6\int_0^{2r} \sqrt{2ry-y^2}\, dy.$$

Or $\sqrt{2ry-y^2}$, ou $\sqrt{r^2-(y-r)^2}$, exprime les ordonnées d'un demi-cercle, décrit sur la hauteur $2r$ de la cycloïde comme diamètre, et dans lequel on prendrait pour abscisses les y comptés de zéro à $2r$, depuis le milieu de la base jusqu'au sommet de l'arceau. Par suite, l'intégrale $\int_0^{2r} \sqrt{2ry-y^2}\, dy$ représente l'aire $\frac{1}{2}\pi r^2$ de ce demi-cercle; et il vient bien, pour la surface d'un arceau de cycloïde, la valeur $3\pi r^2$, ou trois fois l'aire du cercle générateur de la cycloïde, comme on a vu (t. I, p. 226).

281*. — Cinquième exemple : aire comprise sous le profil longitudinal d'une onde solitaire; relation entre l'ordonnée de ce profil et les deux aires partielles qu'elle délimite.

(Compléments, p. 54*.)

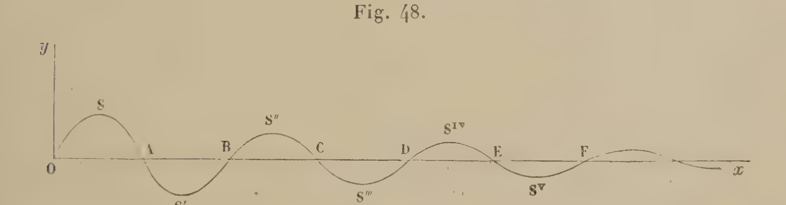
282. — Représentation des intégrales définies, par des aires.

Si l'évaluation d'une aire plane revient à calculer une certaine intégrale définie, à l'inverse, toute intégrale définie, $\int_a^b f(x)\,dx$, sera graphiquement représentée par la surface plane comprise entre un axe horizontal des x, deux ordonnées verticales ayant pour abscisses respectives $x=a$, $x=b$, et la courbe dont l'équation est, en coordonnées rectangulaires, $y=f(x)$. En effet, les ordonnées successives de cette courbe découperont l'aire considérée en bandes étroites, ayant pour longueur ces ordonnées $y=f(x)$, pour largeur la distance dx de deux d'entre elles et, par suite, pour surface, le produit [pris en valeur absolue] $f(x)\,dx$, c'est-à-dire les divers éléments de l'in-

tégrale donnée. On voit seulement que, pour la parité de signe de ceux-ci aux bandes élémentaires, et, en conséquence, pour l'exactitude complète de la représentation de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ par la surface totale comprise, depuis l'abscisse a jusqu'à l'abscisse b, entre la courbe et l'axe des x, il faudra convenir de regarder comme négatives les aires qui correspondront à des éléments $f(x)\,dx$ négatifs. Si donc x grandit sans cesse en allant de a à b, comme il arrive presque toujours, les aires élémentaires $f(x)\,dx$ devront être comptées positivement ou négativement, suivant que les ordonnées correspondantes $y = f(x)$ seront elles-mêmes positives ou négatives; et, par conséquent, en admettant, pour fixer les idées, que l'axe vertical des y soit dirigé vers le haut, l'intégrale égalera l'excédent des parties de l'aire comprise entre la courbe et l'axe horizontal des x, qui se trouveront au-dessus de cet axe, sur celles qui seront au-dessous.

Voyons, par exemple, quelle est la surface propre à représenter l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\,dx$, où a est une constante positive et où nous supposerons le coefficient b également positif. Ici, x grandit de zéro à l'infini et, d'autre part, la courbe $y = e^{-ax} \sin bx$, qui serait une sinusoïde sans la présence du facteur positif décroissant e^{-ax}, ne différera d'une sinusoïde qu'en ce que les ordonnées successives y seront réduites de plus en plus, dans le rapport finalement évanouissant e^{-ax}. Il est évident que, sans cette réduction, tous les arceaux, OSA, AS'B, BS''C, ..., qui ont bases égales, auraient aussi même hauteur, même forme et même aire absolue (comprise entre eux et

Fig. 48.



l'axe des x); de sorte que, leur signe se trouvant alternativement positif et négatif, comme celui de leurs ordonnées, l'intégrale exprimerait une somme d'aires égales et *contraires*, qui ne tendrait vers aucune limite déterminée. Mais, comme les hauteurs des arceaux vont en décroissant et que, par suite, de deux bandes $y\,dx$ ayant même largeur dx avec des abscisses différant d'une longueur d'arceau, la pre-

mière a toujours une plus grande hauteur absolue $\pm y$ que la seconde, l'intégrale définie proposée

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \text{aire OSA} - \text{aire AS}'\text{B} + \text{aire BS}''\text{C} - \ldots$$

sera une série de termes décroissants alternativement positifs et négatifs, série qu'on sait être toujours convergente et du signe affectant son premier terme. Nous avons (p. 68) calculé sa valeur $\frac{b}{a^2+b^2}$, positive, en effet, quand b l'est.

Si, au lieu de $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx$, nous considérons maintenant l'intégrale $\int_0^\infty e^{-ax^2} \sin bx^2 dx$, la courbe $y = e^{-ax^2} \sin bx^2$ exigera, pour se déduire d'une sinusoïde, non seulement qu'on y rapetisse les ordonnées dans le rapport e^{-ax^2}, plus rapidement décroissant encore que e^{-ax}, mais aussi qu'on les rapproche de plus en plus. L'on devra, en d'autres termes, y prendre dx de plus en plus petit pour que, d'une ordonnée à la suivante, l'arc bx^2 éprouve l'accroissement constant que reçoit l'abscisse dans une sinusoïde où l'on suppose les ordonnées équidistantes. Donc, par le fait de cette double transformation, les arceaux diminueront à la fois de largeur et de hauteur; en sorte que l'intégrale sera toujours une série convergente, positive, de termes décroissants à signes alternés. Cette série restera même convergente si l'on pose $a = 0$ ou $y = \sin bx^2$, vu qu'alors les arceaux, sans décroître en hauteur, se rétréciront de plus en plus et indéfiniment à mesure qu'on s'éloignera de l'origine. L'expression $\int_0^\infty \sin bx^2 dx$ (¹) offre donc un exemple du premier des cas, indiqués plus haut (p. 66), où la fonction sous le signe $\int$ n'a pas besoin de tendre vers zéro pour que l'intégrale reste finie et déterminée quand le champ d'intégration devient infini.

L'usage de représenter les intégrales par des aires est si familier aux géomètres, que les mots « *effectuer une quadrature* » et « *évaluer une intégrale* » sont devenus synonymes. On dit, par exemple, qu'un problème est *ramené aux quadratures,* quand on a prouvé que sa solution dépend du calcul d'une intégrale définie.

(¹) Nous l'évaluerons, au n° 327*, dans le Fascicule II.

283*. — Expressions générales d'une aire plane, en fonction des coordonnées successives d'un point mobile qui en décrit le contour, et de leurs différentielles.

(Compléments, p. 56*.)

284*. — Application à une orbite unicursale; aire du folium de Descartes.

(Compléments, p. 59*.)

285*. — Évaluation des secteurs plans; signification des cosinus et sinus hyperboliques d'un double secteur d'hyperbole équilatère.

(Compléments, p. 61*.)

286. — De la rectification des courbes : formule générale.

La *rectification* d'une courbe, c'est-à-dire son déroulement ou sa transformation en une droite équivalente, consiste, au point de vue analytique, à calculer la longueur d'un arc quelconque de cette courbe.

Après avoir choisi trois axes rectangulaires des x, y, z, donnons-nous, sous la forme $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, les deux équations de la branche déterminée de courbe dont il s'agira d'évaluer un arc, et soient a, b les abscisses des deux extrémités, ou supposons que x croisse, le long de l'arc, depuis a jusqu'à b. Nous savons que les éléments ds de l'arc admettront l'expression générale $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, c'est-à-dire $\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx$ ou $\sqrt{1 + f'(x)^2 + \varphi'(x)^2}\,dx$. Donc l'arc cherché lui-même sera évidemment donné par la formule

$$\text{(22)} \qquad \text{Arc} = \int_{x=a}^{x=b} ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2 + \varphi'(x)^2}\,dx;$$

et il y aura, pour l'obtenir, à effectuer la même intégration que si l'on demandait la surface comprise, dans l'intervalle des deux abscisses a, b, entre l'axe de ces abscisses x et la ligne plane dont l'ordonnée égalerait $\sqrt{1 + f'(x)^2 + \varphi'(x)^2}$.

Quand la courbe proposée se trouve dans le plan des xy ou seulement parallèle à ce plan, la fonction $z = \varphi(x)$ est constante et l'expression à intégrer devient simplement $\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$.

Comme nous avons déjà, dans le Tome I, en appliquant la deuxième propriété générale des développées, rectifié plusieurs courbes importantes qui sont les développées d'autres courbes connues, et, notam-

ment, trouvé ainsi, au moyen de constructions géométriques aisées à traduire en formules, la longueur d'un arc quelconque soit de seconde parabole cubique (p. 212), soit de cycloïde (p. 222), soit même de spirale logarithmique (Fascicule II, p. 205*), nous pourrons nous contenter ici d'appliquer la formule (22), prise avec $z' = 0$ ou $\varphi'(x) = 0$, à des arcs de parabole ordinaire et d'ellipse.

287. — Rectification de la parabole.

Rapportons la parabole considérée à sa tangente au sommet pour axe des x et à son axe de symétrie pour celui des y. Si p désigne le demi-paramètre (distance du foyer à la directrice), l'équation de la courbe sera, comme on sait, $x^2 = 2py$, c'est-à-dire $y = \frac{x^2}{2p}$; et l'on en déduira $y' = \frac{x}{p}$, d'où résultera, pour un arc élémentaire $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$, la valeur $\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\,dx$. Si donc nous admettons que l'arc s à évaluer doive partir du sommet $x = 0$ et arriver ainsi jusqu'au point quelconque dont l'abscisse est x, nous aurons

$$(23) \qquad s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^x \sqrt{p^2 + x^2}\,dx.$$

La différentielle $\sqrt{p^2 + x^2}\,dx$, à intégrer, rentre dans le deuxième type des différentielles irrationnelles étudiées plus haut (p. 48), et, par suite, la quadrature demandée est effectuable sous forme finie. Le plus simple, pour la faire, consiste à intégrer par parties, en écrivant successivement

$$\int \sqrt{p^2 + x^2}\,dx = x\sqrt{p^2 + x^2} - \int x\,d\sqrt{p^2 + x^2} = x\sqrt{p^2 + x^2} - \int x \frac{x\,dx}{\sqrt{p^2 + x^2}},$$

et à observer que le dernier terme, $-\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{p^2 + x^2}}$, équivaut à

$$\left\{ \begin{aligned} -\int \frac{(p^2 + x^2) - p^2}{\sqrt{p^2 + x^2}}\,dx &= -\int \frac{p^2 + x^2}{\sqrt{p^2 + x^2}}\,dx + p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}} \\ &= -\int \sqrt{p^2 + x^2}\,dx + p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}}; \end{aligned} \right.$$

ce qui donne

$$\int \sqrt{p^2 + x^2}\,dx = x\sqrt{p^2 + x^2} - \int \sqrt{p^2 + x^2}\,dx + p^2 \int \frac{dx}{\sqrt{p^2 + x^2}} + \text{const.}$$

Transposons le troisième terme dans le premier membre, pour le réduire avec celui qui s'y trouve déjà, et rappelons-nous que l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{p^2+x^2}}$, de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{A+x^2}}$, a été obtenue (p. 50). En divisant par 2 et intégrant enfin à partir de la limite zéro, il viendra

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^x \sqrt{p^2+x^2}\,dx &= \frac{x\sqrt{p^2+x^2}}{2} + \frac{p^2}{2}\left[\log\left(x+\sqrt{p^2+x^2}\right) - \log p\right] \\ &= \frac{x\sqrt{p^2+x^2}}{2} + \frac{p^2}{2}\log\frac{x+\sqrt{p^2+x^2}}{p}. \end{aligned}\right.$$

Cette valeur, substituée dans la formule (23), donnera donc, pour l'expression cherchée d'un arc de parabole,

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} s &= \frac{x\sqrt{p^2+x^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\frac{x+\sqrt{p^2+x^2}}{p} \\ &= \frac{p}{2}\left[\frac{x}{p}\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}} + \log\left(\frac{x}{p}+\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

On voit que la parabole ordinaire n'est rectifiable sous forme finie que par l'emploi de la fonction logarithmique, et non algébriquement.

288. — Rectification de l'ellipse.

Soit actuellement à évaluer, dans une ellipse rapportée à son grand axe $2a$ et à son petit axe $2b$ pour axes respectifs des abscisses x et des ordonnées y, un arc s inférieur à un quart du périmètre total, et compté à partir d'une extrémité du petit axe, jusqu'à un point dont on donne, entre $-a$ et a, l'abscisse x. De l'équation de la courbe $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, différentiée, il résultera $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$ et, par suite, $\sqrt{1+y'^2}$ ou $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}}$. Substituons à a^2y^2, sous le radical, la valeur $b^2(a^2-x^2)$ tirée de l'équation de la courbe, ce qui, après suppression de b^2 *haut* et *bas*, donne $\frac{ds}{dx}=\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}$; et rappelons-nous que $\sqrt{a^2-b^2}$ exprime la demi-distance focale c, produit du demi grand axe a par l'*excentricité* e de l'ellipse. On peut donc remplacer a^2-b^2 par a^2e^2; et la valeur du rapport $\frac{ds}{dx}$ est enfin, après la suppression, haut et bas, du facteur commun a^2, $\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}$. Donc, chaque élément ds de l'arc égale le produit de cette dernière

expression, prise pour l'abscisse x d'un point de l'élément, par la projection dx de celui-ci sur l'axe des abscisses; et, l'arc commençant d'ailleurs pour $x = 0$, il vient

$$(25) \qquad s = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}\, dx.$$

Introduisons à la place de x, comme dans la question analogue sur la surface de l'ellipse (p. 97), l'angle u, variable de zéro à $\pm\frac{\pi}{2}$, dont le sinus égale le rapport $\frac{x}{a}$; ou posons, en d'autres termes, $x = a \sin u$ et, par suite, $dx = a \cos u\, du$. Le second membre de (25) aura encore, sous le radical, un facteur commun a^2 qui disparaîtra des deux termes de la fraction; et, en observant de plus que le quotient de $\cos u$ par $\sqrt{1 - \sin^2 u}$ est l'unité, il viendra

$$(26) \qquad s = a \int_0^{\arcsin \frac{x}{a}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 u}\, du.$$

On reconnaît, au deuxième membre, l'intégrale elliptique de seconde espèce $E(k, \varphi)$, dont le développement en série a été étudié dans la dernière Leçon (p. 83), et où il faudra poser ici $k = e$, $\varphi = \arcsin \frac{x}{a}$.

Donc l'expression de l'arc d'ellipse est, au moyen de cette fonction transcendante $E(k, \varphi)$,

$$(27) \qquad s = a E\left(e, \arcsin \frac{x}{a}\right).$$

Évaluons, par exemple, le périmètre entier, que nous appellerons S, de l'ellipse, c'est-à-dire quatre fois ce que devient le second membre de (27) quand la projection x de l'arc s sur le grand axe atteint son maximum a, ou quand l'arc u devient $\frac{\pi}{2}$. Alors le second membre de (27) acquiert la valeur $aE\left(e, \frac{\pi}{2}\right)$, produit du demi grand axe a par l'intégrale complète $E^1(e)$; et, si l'on substitue, dans $S = 4aE^1(e)$, la valeur en série que donne la seconde formule (26) de la dernière Leçon (p. 85), on aura

$$(28) \quad S = 2\pi a \left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2} e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4} e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6} e^3\right)^2 - \dots\right].$$

Le contour de l'ellipse vaut donc le produit de la circonférence cir-

conscrite $2\pi a$ par la série $1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \ldots$, essentiellement inférieure à l'unité. Il devait bien en être ainsi, puisque l'ellipse, ligne convexe enveloppée par la circonférence $2\pi a$, se trouve nécessairement plus courte qu'elle.

Comme d'ailleurs, pour la même raison, ce périmètre S dépasse celui, $2\pi b$, du cercle inscrit, la question se pose de savoir s'il ne serait pas, jusqu'à un certain degré d'approximation, la moyenne soit arithmétique, soit géométrique, des deux circonférences circonscrite et inscrite $2\pi a$, $2\pi b$; question d'autant plus naturelle, que l'aire de l'ellipse est déjà exactement la moyenne géométrique des surfaces contenues dans les deux circonférences. Il y a donc lieu, d'après l'égalité $a^2 - b^2 = a^2e^2$ qui donne $b = a\sqrt{1-e^2}$, d'évaluer en série l'expression $2\pi a\sqrt{1-e^2}$ de la circonférence inscrite, en y développant le radical par la seconde formule (28) [T. I, p. 159]. Il vient

$$2\pi b = 2\pi a\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}e^2\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}e^4\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}e^6\right) - \ldots\right];$$

d'où, pour la moyenne arithmétique de cette expression et de $2\pi a$,

$$(29)\quad \begin{cases} \pi(a+b) = 2\pi a\left[1 - \frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^2}\frac{3}{4}e^4\right)\right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}e^6\right) - \ldots\right], \end{cases}$$

série dont tous les termes entre crochets, sauf les deux premiers, sont, à la fois, négatifs et d'une valeur absolue visiblement plus forte que celle des termes analogues de (28).

Ainsi, le contour de l'ellipse dépasse la moyenne arithmétique des deux circonférences inscrite et circonscrite, et, à plus forte raison, leur moyenne géométrique [1], $2\pi\sqrt{ab}$ ou $2\pi a(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$, qui serait, en développant $(1-e^2)^{\frac{1}{4}}$ par la formule du binôme,

$$(30)\qquad 2\pi\sqrt{ab} = 2\pi a\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{32} - \frac{7e^6}{128} - \frac{77e^8}{2048} - \ldots\right).$$

---

[1] La moyenne arithmétique de deux nombres positifs donnés x, y dépasse toujours leur moyenne géométrique, car son carré $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ excède le carré, xy, de la moyenne géométrique, leur différence étant la quantité $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$, essentiellement positive. On peut voir d'ailleurs, sur ce sujet, le deuxième Fascicule, p. 50*.

Toutefois, si l'on suppose le carré e^2 de l'excentricité assez petit pour que sa quatrième puissance e^8 soit insensible à côté de l'unité, ou pour que les séries, dans (28), (29) et (30), puissent être réduites à leurs quatre premiers termes, ces formules donneront

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} & S - \pi(a+b) = \frac{\pi a e^4}{32}\left(1 + \frac{3e^2}{4}\right), \\ & S - 2\pi\sqrt{ab} = 3\,\frac{\pi a e^4}{32}\left(1 + \frac{3e^2}{4}\right); \end{aligned} \right.$$

d'où l'on conclura

$$3[S - \pi(a+b)] = S - 2\pi\sqrt{ab} \text{ (sensiblement)}$$

et, par suite,

$$(32) \qquad S = \pi\left[3\,\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right] \text{ (à fort peu près).}$$

Si même on pouvait négliger une erreur absolue par défaut égale à $\frac{\pi a e^4}{32}\left(1 + \frac{3e^2}{4}\right)$, ou (vu que S ne diffère pas beaucoup de $2\pi a$) une erreur relative valant à peu près le quotient de $\frac{\pi a e^4}{32}$ par $2\pi a$, c'est-à-dire la soixante-quatrième partie de la quatrième puissance de l'excentricité, le contour de l'ellipse serait sensiblement, d'après la première formule (31), la moyenne arithmétique des deux circonférences circonscrite et inscrite.

Mais, en s'en tenant à la formule (32) beaucoup plus approchée, quoique encore fort simple, l'erreur (par excès) ne deviendra sensible que dans le cas d'ellipses très excentriques : car, même pour $e = \sin 75^\circ = 0,9659$ ou pour $\frac{b}{a} = \cos 75^\circ = 0,2588$, elle n'atteint pas la cent-cinquantième partie du résultat, comme on le reconnaît par comparaison avec la valeur exacte $4aE^1(e) = 4aE^1(\sin 75^\circ)$ calculée au moyen du Tableau de la page 86 ; et, pour $e = \sin 70^\circ = 0,9397$ ou pour $\frac{b}{a} = 0,3420$, elle n'est que les 0,003 de S. Pour $e = \sin 80^\circ = 0,9848$ $\left(\text{ou } \frac{b}{a} = 0,1736\right)$, l'erreur s'élève au soixante-huitième environ de S et commence, on le voit, à n'être plus négligeable dans des applications ordinaires. Quand l'excentricité e est petite, on s'y rend compte de l'approximation, en évaluant, jusqu'aux termes affectés de e^8 inclusivement, le second membre de (32), qui n'est autre chose que le demi-excédent de trois fois le second membre de (29) sur le

second membre de (30). On ne trouve ainsi, pour le premier terme de la différence entre ce résultat approché (32) et la vraie valeur (28) de S, que le produit de $2\pi a$ par le très petit rapport positif $\frac{3e^8}{2^{14}} = \frac{3e^8}{16384}$, toujours inférieur à un cinq-millième.

En résumé, la formule (32) suffira généralement *dans la pratique*, et elle permettra d'y regarder le contour de toute ellipse dont l'excentricité n'est pas très forte (ou ne dépasse pas, par exemple, 0,95), comme équivalent à celui d'un cercle *ayant pour diamètre l'excédent de trois fois la moyenne arithmétique des deux demi-axes sur une fois leur moyenne géométrique.*

289*. — Courbe plane dont les arcs sont proportionnels aux surfaces qu'ils limitent au-dessus de l'axe des abscisses; rectification de la chaînette.

(Compléments, p. 63*.)

290*. — Rectification d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires; application à la spirale logarithmique et à la loxodromie.

(Compléments, p. 65*.)

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

CUBATURE DES VOLUMES ET QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

291. — Cubature des volumes : formule générale.

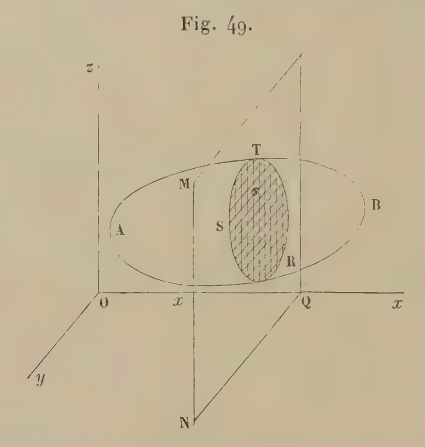
Passons maintenant à une troisième application géométrique des intégrales définies, à la *cubature* des volumes, c'est-à-dire à l'évaluation de l'étendue (ou *volume*) de la portion de l'espace qu'occupe un corps de forme et de dimensions données, comparée à l'étendue analogue d'un cube ayant pour arête l'unité de longueur [1].

---

[1] *Note sur la notion de volume.*

Les auteurs de Calcul intégral ne me paraissent pas avoir, jusqu'ici, d'une manière suffisamment nette, défini la quantité dite *volume* d'un corps et, surtout,

Fig. 49.



montré comment cette quantité est indépendante de l'orientation des plans suivant lesquels se fait la division de l'espace en cubes élémentaires. Il y aura lieu de procéder, à cet égard, comme nous l'avons fait, dans la note du n° 276 (p. 91), pour l'aire d'une surface plane.

On divisera le solide donné ARSTB, par trois familles de plans normaux à des axes coordonnés rectangles Ox, Oy, Oz, en cubes infiniment petits; et l'on se

Soit ARSTB (p. 116) un corps quelconque, rapporté à un système d'axes rectilignes Ox, Oy, Oz, dont le premier, Ox, fait avec le plan yOz des deux autres un angle connu φ, complémentaire de celui,

---

proposera d'évaluer le rapport du nombre de ces cubes au nombre des cubes pareils contenus dans le cube fini qui a son arête égale à l'unité. Chaque petit cube de longueur dx comptera donc, dans le rapport cherché, pour la valeur dx^3, vu que le cube dont l'arête vaut 1 a ses dimensions $\frac{1}{dx}$ fois plus grandes et contient par suite, comme on sait, un nombre de petits cubes exprimé par $\left(\frac{1}{dx}\right)^3 = \frac{1}{dx^3}$. Deux plans consécutifs quelconques perpendiculaires à Ox, tels que le plan MNQ, dont l'abscisse OQ égale x, et celui d'abscisse $x + dx$, comprendront entre eux, à l'intérieur du corps proposé, sensiblement autant de cubes, d'arête dx, qu'il y aura de carrés dx^2 découpés, par les plans normaux aux y et aux z, dans la section RST suivant laquelle le plan MNQ intersecte le solide. Le nombre de ces petits cubes égalera donc, sauf erreur relative négligeable, le quotient de l'aire σ de la section RST par l'aire dx^2 de l'un des carrés; et leur valeur totale, produit de dx^3 par leur nombre $\frac{\sigma}{dx^2}$, sera σdx. Or il est clair que cette section faite dans le solide donné par le plan MNQ se trouve parfaitement déterminée dès que l'on connaît l'abscisse $OQ = x$ du plan, en sorte que son aire σ égale une certaine fonction, $f(x)$, de x. Ainsi, les cubes élémentaires contenus entre les deux plans consécutifs qui ont les abscisses x, $x + dx$, entreront dans la somme à évaluer pour la part $f(x)dx$; et il est clair que, si x_0, x_1 désignent la valeur la plus petite et la valeur la plus grande reçues par l'abscisse x dans tout le corps, l'expression totale indiquant le rapport du nombre des cubes infiniment petits qu'il comprend, au nombre des cubes pareils contenus dans le cube d'arête 1, sera l'intégrale définie

$$\int_{x_0}^{x_1} \sigma\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

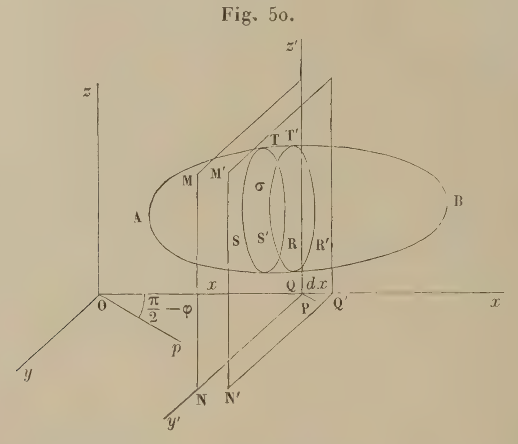
Ce rapport est donc une quantité parfaitement déterminée : on l'appelle le *volume* du corps.

On verra, en procédant comme dans la note citée (p. 93), que le rapport limite ainsi défini s'obtiendrait également par la décomposition du solide donné en parties quelconques, lesquelles s'évalueraient chacune isolément, et dont il suffirait d'ajouter ensuite les valeurs. Enfin, après avoir démontré que des solides égaux, pareillement orientés, ou même leurs symétriques par rapport aux plans coordonnés, s'équivalent, comme ayant leurs volumes exprimés par des intégrales dont les éléments σdx sont en même nombre et respectivement égaux chacun à chacun, on reconnaîtra qu'un déplacement quelconque, imprimé à un corps donné et à une sphère liée à ce corps, ne fait pas varier le rapport de leurs volumes, vu que des assemblages de petits cubes égaux, les remplissant autant que possible et entraînés dans leur mouvement, resteront tous pareillement disposés et toujours en même nombre. D'ailleurs, comme aucun changement d'orientation ne modifie la manière d'être de la sphère par rapport aux plans coordonnés, ni, par suite, l'intégrale appelée son volume, l'intégrale analogue dite *volume du corps proposé* restera, elle aussi, invariable, et sera la même non seulement pour des corps égaux quelconques, mais encore pour leurs symétriques.

xOp, qu'il fait avec une perpendiculaire Op à Oy et Oz. Proposons-nous d'exprimer le volume de ce corps, au moyen d'une intégrale dépendant de quantités explicitement calculables dès qu'on aura défini la situation, par rapport aux axes, de la surface ASB qui le limite, c'est-à-dire dès que l'on connaîtra l'équation des diverses parties de ASB.

A cet effet, de même que nous avons évalué les surfaces planes par une division en bandes étroites ayant la direction des ordonnées, menons ici, par les divers points de l'axe des x, des plans, parallèles à celui des yz, qui partageront le volume en tranches d'une épaisseur infiniment petite. Soit RSTT'S'R' l'une de ces tranches, comprise entre le plan MNQ, qui a l'abscisse $OQ = x$, et le plan suivant M'N'Q',

Fig. 50.



dont l'abscisse OQ' est $x + dx$. Appelons σ l'aire de la première base RST de cette tranche, c'est-à-dire l'aire de la section faite dans le corps par le plan MNQ. Il est évident que si une droite, constamment égale et parallèle à QQ', se mouvait entre les deux plans MNQ, M'N'Q', de manière à suivre le contour de la section σ, cette droite mobile décrirait un cylindre entourant un volume presque identique à celui de la tranche RSTT'S'R'; car il ne s'en distinguerait que le long du bord sur une profondeur comparable à $QQ' = dx$, ou, pour ainsi dire, par de simples rognures, insignifiantes en comparaison de la tranche totale. Donc on pourra prendre comme expression de celle-ci le volume du cylindre, produit de la base σ par sa distance au plan M'N'Q' de l'autre base, c'est-à-dire par la perpendiculaire QP au plan M'N'Q', projection de $QQ' = dx$ sous l'angle $Q'QP = xOp = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Ainsi

la tranche a pour valeur

$$\sigma \times \mathrm{QP} = \sigma\, dx \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = (\sin\varphi)\,\sigma\, dx.$$

Mais observons que, vu les données dont on dispose dans chaque cas et qui expriment la configuration du corps, la section σ déterminée par le plan MNQ se trouve définie dès que l'on connaît l'abscisse $\mathrm{OQ} = x$ de ce plan. Par exemple, si l'équation de la surface limite du corps ASB est $\mathrm{F}(x, y, z) = 0$, le contour RST de σ sera représenté au moyen de cette même équation dans laquelle, seulement, on fera x égal à la valeur constante OQ, et où les seules variables seront les coordonnées y, z, d'ailleurs faciles à construire, sur le plan même de la section, par rapport aux deux axes $\mathrm{Q}y'$, $\mathrm{Q}z'$ parallèles à $\mathrm{O}y$ et à $\mathrm{O}z$. Donc, une quadrature effectuée dans le plan $y'\mathrm{Q}z'$ et revenant, pour toutes les sections analogues σ, à les diviser en bandes minces de largeur dy par un même système de plans $y =$ const. parallèles aux zx, permettra de calculer l'aire σ, qui, généralement variable d'une section à l'autre ou avec l'abcisse x, sera une certaine fonction, désormais connue, de x. Nous l'appellerons $f(x)$ et poserons ainsi

$$\sigma = f(x).$$

Alors l'expression de la tranche quelconque $\mathrm{RSTT'S'R'}$ devient $(\sin\varphi) f(x)\, dx$; et le volume total demandé est la somme d'une infinité de tranches pareilles, c'est-à-dire la somme de toutes les valeurs que prend le produit $(\sin\varphi) f(x)\, dx$ quand x y croît, avec continuité, depuis la plus petite abscisse, que j'appellerai x_0, des diverses régions du corps jusqu'à la plus grande, que j'appellerai x_1. Les deux points A et B ayant respectivement cette plus petite et cette plus grande abscisse seront en général ceux de contact de la surface limite ASB avec deux plans tangents menés parallèlement aux yz. On aura donc, pour la formule cherchée,

$$(1) \qquad \text{Volume} = (\sin\varphi) \int_{x_0}^{x_1} \sigma\, dx = (\sin\varphi) \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

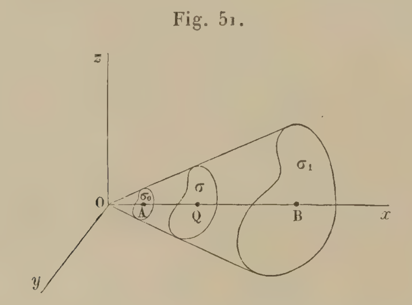
En résumé, le calcul d'un volume exigera deux intégrations, l'une, pour évaluer la section σ mesurant l'étendue du corps dans les régions de l'espace qui ont une abscisse donnée x, étendue proportionnelle au volume partiel, d'épaisseur $dx \sin\varphi$, étalé en quelque sorte sur cette section, l'autre, pour sommer ensuite tous les volumes partiels analogues.

292. — Premier exemple : tronc de cône ou de pyramide.

Prenons comme premier exemple le tronc de cône ou de pyramide à bases quelconques, afin de montrer avec quelle facilité le Calcul intégral atteint des résultats qui avaient demandé à la Géométrie élémentaire d'assez longs raisonnements.

Rapportons le cône donné à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, en choisissant pour origine le sommet O et pour axe des x la perpendiculaire OB menée du sommet O sur le plan de la grande base, σ_1, du tronc de cône, perpendiculaire qui coupe, en A, le plan

Fig. 51.



de la petite base σ_0. Ces bases σ_0, σ_1 sont évidemment les deux sections σ, parallèles aux yz, qui ont la plus petite abscisse, $OA = x_0$, et la plus grande $OB = x_1$. Enfin, la hauteur $AB = h$ du tronc est la différence OB — OA des deux abscisses extrêmes.

Ce qui caractérise les sections σ d'un cône ou d'une pyramide, c'est qu'elles sont toutes semblables et proportionnelles au carré de leurs distances $OQ = x$ au sommet. En d'autres termes, le rapport $\frac{\sigma}{x^2}$ est ici constant, et l'on a, en appelant a sa valeur,

$$\sigma = ax^2. \tag{2}$$

L'application de cette propriété revient évidemment à effectuer, de la première intégration qui doit donner σ, toute la partie concernant la forme du résultat, et nous pourrons nous dispenser de compléter l'intégration dont il s'agit; car cela ne serait nécessaire que pour évaluer le coefficient numérique a convenant à chaque espèce de section. Ainsi, portons la valeur (2) de σ dans (1), où il faudra faire $\varphi = \frac{\pi}{2}$ puisque Ox est normal au plan des yz. Il viendra, par une intégration

immédiate,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_{x_0}^{x_1} ax^2dx = \frac{a}{3}(x^3)_{x_0}^{x_1} = \frac{a}{3}(x_1^3 - x_0^3) \\ &= \frac{a}{3}(x_1 - x_0)(x_1^2 + x_1x_0 + x_0^2) = \frac{h}{3}(ax_1^2 + ax_1x_0 + ax_0^2). \end{aligned}\right.$$

Or l'équation (2), si l'on y prend successivement $x = x_1$, $x = x_0$, donne $ax_1^2 = \sigma_1$, $ax_0^2 = \sigma_0$; d'où $ax_1x_0 = \sqrt{(ax_1^2)(ax_0^2)} = \sqrt{\sigma_1\sigma_0}$. Donc la relation (3) devient la formule classique du volume d'un tronc de cône ou de pyramide,

$$(4)\qquad \text{Volume} = \frac{h}{3}\left(\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1\sigma_0} + \sigma_0\right).$$

Cette formule comprend celle de la pyramide, qui s'en déduit par l'hypothèse $\sigma_0 = 0$, et aussi celle du cylindre ou du prisme, qu'on obtient en supposant le sommet O éloigné à l'infini et en faisant par suite $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma = \sqrt{\sigma_1\sigma_0}$.

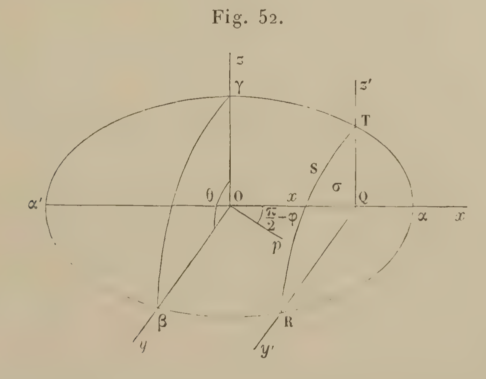
293. — Deuxième exemple : volume de l'ellipsoïde et des parallélépipèdes, à faces conjuguées, qu'on lui circonscrit.

Proposons-nous actuellement d'évaluer le volume de l'ellipsoïde dont l'équation, par rapport à un système donné de diamètres conjugués Ox, Oy, Oz, est

$$(5)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

a, b, c désignant les trois demi-diamètres $O\alpha = a$, $O\beta = b$, $O\gamma = c$

Fig. 52.



dirigés suivant les axes coordonnés positifs. Appelons θ l'angle, yOz,

des deux derniers Oβ, Oγ, et soit toujours φ celui qui exprime l'inclinaison de Oα ou Ox sur le plan des yz.

Ici, la section σ faite, dans le corps, par le plan y'Qz' parallèle aux yz et dont l'abscisse est x, aura pour équation, d'après (5),

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}=1.$$

On voit que cette section, dont RSTQ représente la partie comprise dans l'angle des coordonnées positives, est une ellipse rapportée aux demi-diamètres conjugués $\mathrm{QR}=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $\mathrm{QT}=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ faisant entre eux l'angle θ. La formule (3) de la dernière Leçon (p. 97) donnera donc, pour son aire, $\sigma=\pi\times\mathrm{QR}\times\mathrm{QT}\times\sin\mathrm{RQT}$, c'est-à-dire

$$(6) \qquad \sigma=(\pi bc\sin\theta)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Portons cette valeur dans (1) [p. 117] et observons que, vu l'équation (5), les deux limites x_0 et x_1 entre lesquelles varie l'abscisse x sont $-a$ et $+a$. Il viendra, grâce à une intégration immédiate,

$$(7) \quad \begin{cases} \text{Volume}=(\pi bc\sin\theta\sin\varphi)\displaystyle\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx \\ \qquad =(\pi bc\sin\theta\sin\varphi)\left(x-\dfrac{x^3}{3a^2}\right)_{-a}^{a}=(\pi bc\sin\theta\sin\varphi)\left(\dfrac{4}{3}a\right). \end{cases}$$

Ainsi la formule du volume de l'ellipsoïde est

$$(8) \quad \text{Vol. de l'ellipsoïde}=\frac{4}{3}\pi abc\sin\theta\sin\varphi=\frac{\pi}{6}(2a)(2b)(2c)\sin\theta\sin\varphi.$$

Or le produit $(2a)(2b)(2c)\sin\theta\sin\varphi$ représente le volume qu'on aurait obtenu si, de $x=-a$ à $x=+a$, la section avait été un parallélogramme $(2b)(2c)\sin\theta$ ayant son centre sur le diamètre $\alpha'\alpha$ et ses côtés respectivement égaux et parallèles aux deux autres diamètres conjugués $2b$, $2c$, dirigés suivant Oy et Oz. En d'autres termes, ce produit exprime le volume du parallélépipède, circonscrit à l'ellipsoïde, dont les faces seraient les plans tangents parallèles aux trois plans diamétraux conjugués choisis pour plans coordonnés, et dont, par suite, les arêtes se trouveraient égales et parallèles aux diamètres conjugués suivant lesquels ces plans se coupent. La formule (8) revient donc à dire que l'ellipsoïde est la fraction $\frac{\pi}{6}$ de tous ces parallélépipèdes, ou

que *tous les parallélépipèdes circonscrits à un ellipsoïde, et ayant leurs faces parallèles à un système de plans diamétraux conjugués, ont le même volume, égal au produit du volume de l'ellipsoïde par le facteur* $\frac{6}{\pi}$.

Supposons maintenant qu'on rapporte l'ellipsoïde, non pas à un système quelconque de diamètres conjugués, mais à celui qui est constitué par ses axes, ou pour lequel les angles θ, φ sont droits. Si l'on appelle A, B, C les valeurs que reçoivent alors a, b, c, c'est-à-dire les trois demi-axes de l'ellipsoïde, la formule (8) deviendra

$$(9) \qquad \text{Volume de l'ellipsoïde} = \frac{4}{3}\pi ABC.$$

Elle se réduirait à $\frac{4}{3}\pi A^3$, ou à $\frac{4}{3}\pi B^3$, ou à $\frac{4}{3}\pi C^3$, si deux des axes étaient égaux au troisième, cas où l'équation (5) de l'ellipsoïde serait celle d'une sphère de rayon A, ou B, ou C. La formule (9) donne donc bien, comme cas particulier, le volume classique de la sphère, obtenu pourtant, dans les éléments de Géométrie, d'une manière tout autre, savoir, par décomposition en pyramides élémentaires ayant leur sommet au centre, ou en secteurs engendrés par la rotation de triangles infiniment aigus se réunissant de même au centre. Enfin, observons que $\frac{4}{3}\pi ABC$ égale la racine cubique du produit des trois quantités $\frac{4}{3}\pi A^3$, $\frac{4}{3}\pi B^3$, $\frac{4}{3}\pi C^3$, ou constitue ce qu'on appelle leur *moyenne géométrique,* et nous pourrons énoncer la proposition suivante, analogue à celle qui concerne l'aire de l'ellipse (p. 98) : *Le volume d'un ellipsoïde est la moyenne géométrique des volumes de trois sphères dont les diamètres seraient les axes respectifs de cet ellipsoïde.*

294. — Troisième exemple : volumes d'un segment d'ellipsoïde et d'un segment de paraboloïde elliptique.

Nous choisirons pour troisième exemple le volume d'un *segment* d'ellipsoïde, en appelant ainsi la portion d'un ellipsoïde contenue entre deux plans sécants parallèles ; ce qui comprendra comme cas particulier le segment de la sphère. Les deux sections déterminées par les plans sécants seront dites les *bases* du segment, et leur distance perpendiculaire en sera la *hauteur*.

Si nous adoptons pour axe des x le diamètre qui, dans l'ellipsoïde, est conjugué aux deux bases et, pour axes des y et des z, deux dia-

mètres conjugués de la section diamétrale parallèle à ces bases, l'équation de l'ellipsoïde prendra évidemment la forme (5) ci-dessus; de plus, les deux bases du segment ne seront pas autre chose que deux des sections σ, parallèles aux yz, dont la relation (6) exprime l'aire. Nous appellerons x_0, x_1 leurs abscisses respectives, et σ_0, σ_1 leurs surfaces, qui auront pour valeurs, d'après (6),

$$(10) \qquad \sigma_0 = (\pi bc \sin\theta)\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right), \qquad \sigma_1 = (\pi bc \sin\theta)\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right).$$

D'ailleurs, la distance de ces deux bases, mesurée parallèlement à l'axe des x, égalera évidemment la différence $x_1 - x_0$ de leurs abscisses, et sa projection, $(x_1 - x_0)\sin\varphi$, sur une perpendiculaire Op (p. 119) commune aux deux bases, sera la hauteur h du segment.

Nous aurons donc à effectuer la même intégration que pour l'ellipsoïde, mais seulement entre les limites x_0, x_1, au lieu de $-a$ et $+a$. Il viendra, au lieu de (7),

$$\left\{\begin{aligned} \text{Vol. du segment} &= (\pi bc \sin\theta \sin\varphi)\left[(x_1 - x_0) - \frac{x_1^3 - x_0^3}{3a^2}\right] \\ &= (\pi bc \sin\theta \sin\varphi)(x_1 - x_0)\left(1 - \frac{x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2}{3a^2}\right). \end{aligned}\right.$$

Remplaçons, dans la dernière parenthèse, le terme $-\frac{x_1 x_0}{3a^2}$ par la différence de carrés, évidemment égale, $\frac{(x_1 - x_0)^2}{6a^2} - \frac{x_1^2 + x_0^2}{6a^2}$; ce qui, grâce à quelques réductions évidentes, donnera

$$1 - \frac{x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2}{3a^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right) + \frac{1}{6}\frac{(x_1 - x_0)^2}{a^2}.$$

Alors l'expression du volume, en y remplaçant les binômes $1 - \frac{x_0^2}{a^2}$ et $1 - \frac{x_1^2}{a^2}$ par leurs valeurs tirées de (10) et, au besoin, $(x_1 - x_0)\sin\varphi$ par h, deviendra

$$(11) \quad \left\{\begin{aligned} &\text{Vol. du segment} \\ &\quad = \frac{\sigma_1 + \sigma_0}{2} h + \frac{\pi}{6}(x_1 - x_0)\left(2b\frac{x_1 - x_0}{2a}\right)\left(2c\,\frac{x_1 - x_0}{2a}\right)\sin\theta \sin\varphi. \end{aligned}\right.$$

Le premier terme, $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_0)h$, du second membre, représente le volume d'un cylindre qui aurait pour hauteur la hauteur h du segment et pour base la moyenne arithmétique de ses deux bases σ_1, σ_0. Quant

au terme suivant, si on le compare à la dernière expression (8) du volume d'un ellipsoïde entier, et si l'on observe que, des trois facteurs $x_1 - x_0$, $2b\frac{x_1 - x_0}{2a}$, $2c\frac{x_1 - x_0}{2a}$, proportionnels à $2a$, $2b$, $2c$, le premier est la portion de l'axe des x comprise entre les deux bases du segment, on verra qu'il exprime le volume d'un ellipsoïde dont trois diamètres conjugués seraient parallèles à Ox, Oy, Oz et exprimés par ces trois facteurs, ellipsoïde évidemment semblable au proposé et semblablement placé, mais que l'on peut supposer inscrit entre les deux bases σ_0, σ_1. Donc, *un segment d'ellipsoïde égale, en volume, la somme d'un cylindre ayant sa base moyenne arithmétique des deux bases du segment, avec même hauteur que ce dernier, et d'un ellipsoïde semblable à celui dont le segment fait partie et semblablement disposé, inscrit entre les deux bases du segment.*

Quand l'ellipsoïde devient une sphère, cette proposition se réduit bien à celle que l'on démontre pour le segment sphérique dans les éléments de Géométrie.

Mais considérons l'autre cas extrême où l'ellipsoïde, au contraire, s'allonge indéfiniment dans le sens de l'un de ses diamètres, $2a$ par exemple, tandis que les rapports $\frac{b^2}{a}$, $\frac{c^2}{a}$ conservent deux valeurs finies, p, q, choisies à volonté. On sait qu'alors, dans le voisinage de chacune des extrémités du diamètre $2a$, et jusqu'à toute distance finie de cette extrémité, l'ellipsoïde dégénère en un paraboloïde elliptique quelconque. D'ailleurs, à la limite $a = \infty$, les rapports $\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{c^2}{a^2}$, ou $\frac{p}{a}$, $\frac{q}{a}$, sont nuls, et b, c deviennent infiniment petits par rapport à a; de sorte que l'ellipsoïde semblable inscrit entre les deux bases d'un segment de hauteur finie s'aplatit et s'amincit jusqu'à zéro. Donc le dernier terme de la formule (11) s'évanouit à la limite, et cette formule exprime alors que *le volume d'un segment quelconque de paraboloïde elliptique égale le produit de la demi-somme de ses deux bases par leur distance.*

Une des bases s'annule quand son plan devient tangent au paraboloïde, cas où la distance de ce plan tangent, à l'autre base restée finie, est la hauteur du segment, c'est-à-dire sa plus grande ordonnée abaissée normalement sur le plan qui le limite. Par conséquent, *le volume détaché d'un paraboloïde elliptique par tout plan qui le coupe est égal au produit de sa base par la moitié de sa hauteur.*

On remarquera l'analogie de cet énoncé avec celui, presque aussi simple, qui concerne l'aire d'un segment parabolique (p. 100).

295. — Quatrième exemple : volume d'un solide de révolution.

Considérons enfin le solide, dit *de révolution*, que décrit la surface A′B′BA limitée, dans un plan zOx, par une courbe quelconque A′Q′B′, l'axe des x, et deux ordonnées perpendiculaires A′A, B′B,

Fig. 53.

lorsqu'on fait tourner cette surface autour de la droite même AB choisie comme axe des x.

Nous appellerons toujours x_0, x_1 les deux abscisses OA, OB la plus petite et la plus grande des points du solide considéré; et nous observerons que, si l'on suppose rectangulaires les trois axes Ox, Oy, Oz, les sections σ faites dans le volume parallèlement aux yz ne seront autre chose que les cercles mêmes décrits, lors du mouvement de rotation, par les diverses ordonnées z, comme QQ′, de la courbe génératrice A′B′. Soit donc $z = F(x)$ l'équation de cette courbe, il viendra $\sigma = \pi z^2 = \pi F(x)^2$. Par suite, la formule (1) [p. 117], où il faudra poser en outre $\sin\varphi = 1$, sera ici

$$\text{(12)} \qquad \text{Volume} = \int_{x_0}^{x_1} \pi z^2\, dx = \pi \int_{x_0}^{x_1} F(x)^2\, dx.$$

Prenons comme exemple le volume qui est engendré par la surface AA′x comprise entre un arc A′M d'hyperbole équilatère prolongé à l'infini, son asymptote Ox et l'ordonnée A′A normale à celle-ci, lorsqu'on fait tourner cette surface autour de l'asymptote. Alors l'équation de la courbe a la forme $z = \frac{a}{x}$ et, la limite supérieure x_1 étant d'ailleurs infinie, il vient

$$\text{Volume} = \pi a^2 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi a^2 \left(\frac{-1}{x}\right)_{x_0}^{\infty} = \pi \frac{a^2}{x_0} = \pi \left(\frac{a}{x_0}\right)^2 x_0.$$

Or, d'après la formule générale, $\frac{a}{x}$, de l'ordonnée z, le quotient $\frac{a}{x_0}$ exprime l'ordonnée initiale z_0 ou AA′ de l'arc générateur. Le volume cherché égale donc $\pi z_0^2 x_0$, c'est-à-dire $\pi \times \overline{AA'}^2 \times OA$, ou, précisément, le volume du cylindre UA′CV, ayant même base que le volume proposé, et pour hauteur, la distance OA de cette base A′AC au plan engendré par la seconde asymptote Oz de la courbe génératrice. La figure ne représente de ce cylindre, tout comme des cercles engendrés par les ordonnées AA′, QQ′, BB′, que le quart compris dans l'angle des coordonnées positives.

On voit par là que *le volume dont il s'agit a une valeur finie et déterminée,* malgré sa longueur infinie Ax et, même, *malgré la valeur infinie de l'aire* $AA'x$ qui le décrit. Ce paradoxe apparent, d'un volume *fini* engendré par une surface *infinie,* s'explique en observant que les parties de l'aire AA′M, très éloignées, auxquelles est due sa valeur infinie, ne décrivent autour de Ox, vu leur aplatissement contre cet axe, que des cercles infiniment petits. Donc la troisième dimension qui naît du mouvement s'y trouve infiniment réduite; et l'influence du facteur algébrique nul qu'elle introduit l'emporte sur celle du facteur infini exprimant l'aire génératrice, lequel n'est qu'un logarithme, d'un ordre d'infinitude évanouissant (t. I, p. 139).

296. — De la quadrature des surfaces courbes; ce que l'on entend par l'aire d'une telle surface.

Après avoir vu comment on peut cuber un corps, cherchons à évaluer sa surface limite. Celle-ci, généralement courbe, ne sera pas comparable d'une manière directe à l'unité d'aire, qui est plane; et il y aura lieu d'abord de s'en former une idée précise en procédant comme nous l'avons fait dès le commencement du Cours pour la notion de la longueur d'un arc (t. I, p. 14).

La partie quelconque de surface courbe dont on veut considérer l'aire étant bien définie par l'équation de cette surface et par une autre relation propre à fixer son contour, nous imaginerons que l'on construise une surface polyédrique à faces très petites, très voisines partout de la surface proposée et très peu inclinées par rapport aux plans tangents menés à celle-ci en des points voisins, cette surface polyédrique se terminant enfin très près du contour donné. Pour l'obtenir, on pourra, par exemple, comme lorsqu'il s'agissait de former des lignes polygonales tendant vers une courbe, l'inscrire à la surface proposée, c'est-à-dire prendre tous ses sommets sur celle-ci. La construction

réussira, quels que soient les points choisis comme sommets, pourvu qu'on se borne à des faces triangulaires; car il suffira toujours de mener des droites de chacun de ces points à ceux qui en seront les plus proches, pour les relier tous par un réseau de triangles.

Cela posé, démontrons que l'aire totale d'une pareille surface polyédrique, arrêtée à un contour se confondant finalement avec celui que l'on assigne, tend vers une limite déterminée quand ses faces, de plus en plus nombreuses et de plus en plus petites, se rapprochent indéfiniment de la surface courbe, en prenant des directions de moins en moins inclinées par rapport aux plans tangents; et nous pourrons évidemment regarder cette limite, aire de la surface polyédrique au moment où se fait son passage à la surface courbe, comme étant l'aire même de celle-ci. Il suffira, conformément à la règle qui permet de reconnaître les quantités variables pourvues de limites, de prouver que, si la première surface proposée a déjà ses faces assez voisines de la surface courbe, assez peu inclinées sur les plans tangents, etc., toutes celles qui viendront après, ou dont les faces ne seront pas moins petites ni moins voisines de la surface, etc., offriront des aires totales différant aussi peu que l'on voudra de la sienne.

A cet effet, considérant successivement chaque face, que j'appellerai ω, de la première surface polyédrique dont il s'agit, imaginons que, de tous les points de son contour, on mène des normales à la surface courbe donnée, plus courtes distances de ces points à celle-ci, et dont l'ordre de petitesse égalera pour le moins celui des dimensions de ω. Autrement dit, supposons qu'une très courte droite mobile, constamment normale à la surface courbe, fasse le tour de la face en question ω; en la prolongeant, s'il le faut, mais sans changer son ordre de grandeur, elle percera sans cesse toute autre des surfaces polyédriques considérées, de manière à y découper dans son mouvement une certaine partie, que j'appellerai ω' (¹). Or, si l'on projette celle-ci, ω', sur le plan de ω, son contour se projettera très sensiblement sur le contour même de ω; car les normales joignant les points correspondants de ces deux contours se projetteront sous des angles très peu différents d'un droit et auront, par suite, leurs projections d'un ordre

(¹) Au n° 5 (p. 14 du Tome Ier), où il s'agissait pareillement de définir la longueur d'un arc de courbe comme limite de lignes polygonales, la division des lignes polygonales en parties correspondantes aurait pu très simplement se faire de même au moyen de plans normaux à la courbe, menés par les sommets de l'une des lignes polygonales à comparer, au lieu de se faire au moyen de perpendiculaires abaissées de ces sommets sur la seconde ligne polygonale, ce qui donne des directions moins graduellement variables.

de petitesse supérieur au leur ou supérieur, par conséquent, à l'ordre même des dimensions de ω. Ainsi, la projection de ω' sur le plan de ω aura avec ω un rapport sensiblement égal à 1. Comme, d'ailleurs, les faces ou portions de faces dont elle sera composée ne feront, avec tous les plans tangents voisins de ω, ou avec ω, que des angles extrêmement petits, donnant très sensiblement l'unité pour le rapport de chaque partie plane de ω' à sa projection partielle et, par suite, pour celui de ω' à la projection totale, c'est le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ lui-même qui prendra la forme $1+\varepsilon$, où ε désigne une quantité évanouissante. Par conséquent, la seconde surface polyédrique dont il s'agit se trouvera décomposée en parties, ω', correspondant aux faces ω de la première, et ayant avec elles des rapports aussi proches que l'on voudra de l'unité; d'où il suit évidemment que le rapport général de ces deux surfaces totales n'est pas moins voisin de la même limite 1, ou que la différence de leurs aires se réduit à une fraction infiniment petite de l'une d'elles, différence négligeable quand ces aires elles-mêmes, évidemment comparables, en général, à celles qu'entourent les projections de leurs contours sur un plan coordonné, sont finies.

Ainsi, le fait de l'existence d'une limite, aire de la surface courbe, est bien démontré. Et l'on remarquera, de plus, que toute partie, ω', très petite en tous sens, de cette aire, aura, à des infiniment petits près, ses divers éléments (limites des facettes de la seconde surface polyédrique), de même direction que le plan tangent mené en un quelconque de ses points; de telle sorte qu'on obtiendra sa projection sur un plan arbitraire donné en multipliant ω' par le cosinus de l'angle de ce plan avec le plan tangent dont il s'agit, *comme si elle était située sur celui-ci.*

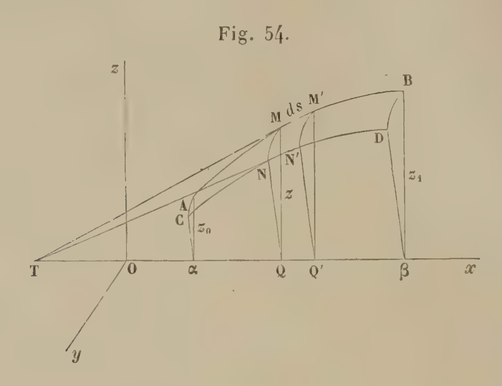
297. — Aire des surfaces de révolution.

Pour mettre sous la forme d'une intégrale définie la valeur de la surface courbe proposée, et en effectuer par là finalement le calcul, continuons à employer le procédé qui nous a déjà conduit aux expressions générales des aires planes, des arcs et des volumes, en divisant la surface en bandes minces, par une famille de plans parallèles aux yz.

Or il est deux cas, particulièrement simples, où, les axes étant supposés rectangulaires, l'une quelconque de ces bandes, comprise par suite entre deux plans normaux aux x et ayant deux abscisses successives x, $x+dx$, s'exprime immédiatement par une différentielle $F(x)dx$, qu'il ne reste plus qu'à intégrer. Le premier, sur lequel nous n'insisterons pas puisqu'il a fait l'objet d'une longue étude (pp. 95 à 107), est

justement le cas extrême ou limite d'une aire plane parallèle aux xy, dont chaque bande égale le produit de sa largeur uniforme, dx, par sa longueur variable d'une abscisse à l'autre, et par conséquent fonction déterminée de x. Le second est le cas de la *surface de révolution* décrite par une courbe plane AMB, tournant autour d'un axe Ox

Fig. 54.



situé dans son plan. On sait que chaque position, AB, CD, ..., de la courbe génératrice, intersection de la surface par un plan mené suivant l'*axe de révolution* Ox, s'appelle, comme ce plan lui-même, un *méridien* de la surface, et que les cercles, perpendiculaires à Ox, décrits par les divers points M, M', ... de la génératrice, ou ayant pour rayons les diverses positions des ordonnées correspondantes $z = \mathrm{MQ}$, $z = \mathrm{M'Q'}$, ... abaissées normalement (dans le plan des zx, par exemple) de la génératrice sur l'axe, sont dits les *parallèles* (c'est-à-dire les cercles parallèles) de la surface; enfin, la portion de celle-ci engendrée, dans une rotation complète, par un segment quelconque de l'arc générateur AMB, et que limitent par conséquent deux cercles parallèles ou deux plans normaux à l'axe de révolution Ox, s'appelle une *zone*.

Il s'agit donc, l'équation $z = f(x)$ de la courbe génératrice étant donnée, de mettre sous la forme $F(x)dx$ l'aire de la zone élémentaire quelconque comprise entre les deux plans consécutifs $x = \text{const.}$, $x + dx = \text{const.}$, et décrite par un élément $\mathrm{MM'} = ds$ de l'arc AMB. A cet effet, considérons d'abord le fragment de zone MM'N'N engendré, par MM', dans une rotation élémentaire $\mathrm{MQN} = d\theta$ du plan méridien $\mathrm{AB}x$, c'est-à-dire entre les deux positions consécutives AB et CD de la courbe génératrice. Les arcs circulaires MN et M'N', normaux à leurs rayons QM et Q'M', QN et Q'N', le sont, par suite, aux plans $\mathrm{AMB}x$, $\mathrm{CND}x$ auxquels les leurs se trouvent perpendicu-

laires; et les quatre angles du quadrilatère légèrement curviligne $MM'N'N$ sont droits. Donc la projection, qui s'effectue très sensiblement en vraie grandeur, de ce quadrilatère ou élément de zone, sur un plan faisant des angles infiniment petits avec ses plans tangents (comme, par exemple, sur le plan TMN des quatre sommets ou des deux positions successives TMM', TNN' de la corde MM' prolongée), pourra être assimilée à un rectangle ayant ses dimensions exprimées, à des infiniment petits près, par $MM' = ds$ et par $MN = QM \times d\theta = z d\theta$. Ainsi, tous les fragments, tels que $MM'N'N$, de la zone engendrée par l'arc ds, auront l'expression $ds(z\,d\theta)$; et, comme le facteur $d\theta$ y variera seul d'un fragment à l'autre, c'est-à-dire quand le plan méridien ABx, en tournant successivement d'une infinité d'angles $d\theta$, aura fait un tour complet mesuré par l'angle total $2\pi = \int d\theta$, la zone entière vaudra évidemment $z\,ds \int d\theta = 2\pi z\,ds$.

Or il suffit de remplacer, dans cette expression, z par sa valeur $f(x)$, et ds par la sienne $\sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$, pour lui donner la forme voulue, $F(x)dx$, d'une simple différentielle en x. Puis une intégration de cette expression entre deux limites quelconques, telles que $O\alpha = x_0$ et $O\beta = x_1$, fera connaître l'aire d'une zone de *hauteur* finie $\alpha\beta$. En résumé, l'on aura

$$(13) \qquad \text{Zone} = 2\pi \int_{x=x_0}^{x=x_1} z\,ds = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx.$$

L'intégration qu'indique cette formule est effectuable en termes finis, par les règles données plus haut (XXIIe et XXIIIe Leçon), dans un certain nombre de cas, notamment quand il s'agit de la surface d'un ellipsoïde de révolution ou *aplati*, ou *allongé*, c'est-à-dire décrit par une demi-ellipse, terminée aux deux extrémités soit du petit axe, soit du grand axe, et tournant autour de cet axe.

298. — Exemples : corps ronds de la Géométrie élémentaire.

Mais bornons-nous aux *corps ronds* étudiés dans la Géométrie élémentaire, pour retrouver les formules de leur surface convexe, difficiles à y bien établir faute d'une démonstration préalable touchant la possibilité de réduire ces surfaces à des aires planes.

Commençons par le *tronc de cône*, où la courbe AB (p. 128) se réduit à une droite. Alors, si l'on appelle z_0, z_1 les deux ordonnées extrêmes $A\alpha$, $B\beta$, c'est-à-dire les rayons des deux bases du tronc, s l'arc compté à partir de A, l sa longueur totale AB, il est évident que z et s varieront proportionnellement le long de AB, en sorte que le rapport

$\frac{z - z_0}{s}$ sera constant et égal à sa valeur finale $\frac{z_1 - z_0}{l}$. On pourra donc écrire

$$\frac{z - z_0}{s} = \frac{z_1 - z_0}{l} \qquad \text{ou} \qquad z = z_0 + \frac{z_1 - z_0}{l} s.$$

Comme, d'ailleurs, les deux valeurs limites de la variable s seront $s = 0$, $s = l$, le second membre de (13) deviendra, en effectuant finalement l'intégration et réduisant,

$$(14) \quad \text{Surf. convexe du tr. de cône} = 2\pi \int_0^l \left[z_0 + \frac{z_1 - z_0}{l} s \right] ds = 2\pi \frac{z_0 + z_1}{2} l.$$

C'est bien la formule classique; d'où l'on déduit, d'une part, la surface convexe du cylindre, en supposant $z_1 = z_0$ et, d'autre part, celle du cône, en faisant $z_0 = 0$.

Reste à examiner le cas d'une zone sphérique. Alors la courbe génératrice AB est un arc de cercle dont la projection sur Ox, $\alpha\beta = x_1 - x_0$, mesure la hauteur h de la zone, tandis que les cercles décrits par les deux ordonnées extrêmes $A\alpha$, $B\beta$ sont ses deux bases. Appelons R le rayon de la sphère dont la zone fait partie, et, l'ordonnée z du demi-cercle générateur de cette sphère étant, en fonction d'une abscisse x comptée à partir du centre, $z = \sqrt{R^2 - x^2}$, nous aurons

$$dz = \frac{-x\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}; \qquad \text{d'où} \quad ds \quad \text{ou} \quad \sqrt{dx^2 + dz^2} = \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{R\,dx}{z}.$$

Donc l'expression $z\,ds$ a pour valeur $R\,dx$; et une zone élémentaire $2\pi z\,ds$ équivaut à $2\pi R\,dx$, produit d'une circonférence $2\pi R$ de grand cercle par la hauteur dx. En conséquence, l'aire d'une zone finie, $2\pi R \int dx = 2\pi R h$, s'obtiendra également en multipliant par sa hauteur h la circonférence $2\pi R$ d'un grand cercle de la sphère; et la surface entière de celle-ci, zone de hauteur $2R$ ou comprise entre deux plans tangents parallèles distants d'un diamètre, vaudra

$$(2\pi R)(2R) = 4\pi R^2,$$

ou le quadruple d'un grand cercle πR^2; en sorte que l'aire $2\pi R^2$ d'un *hémisphère* sera le double de sa projection πR^2 sur son cercle de base.

299. — Réduction, à une intégrale définie, de l'aire d'une surface courbe quelconque.

Passons maintenant au cas général d'une surface quelconque rapportée à un système d'axes rectangles; et voyons comment s'y expri-

mera, sous la forme $F(x)dx$, l'aire de la bande élémentaire comprise entre deux plans consécutifs quelconques normaux aux x, ou ayant les abscisses respectives x, $x+dx$. Nous ne pourrons plus, comme quand la bande était plane, l'évaluer d'un coup, ni, comme lorsqu'elle était de révolution, la partager en rectangles infiniment petits dans les deux sens et ayant tous un côté de même longueur; mais, du moins, son partage en fragments de dimensions infiniment petites donnera des éléments assimilables à des aires planes, ou dont la projection sur un plan quelconque, celui des xy par exemple, se fera en les multipliant par le cosinus de l'angle, γ, d'une de leurs normales avec la normale à ce plan, c'est-à-dire avec l'axe des z dans l'exemple en question. Et, à l'inverse, les éléments d'aire obtenus seront les quotients respectifs de leurs projections sur le plan des xy par ce cosinus.

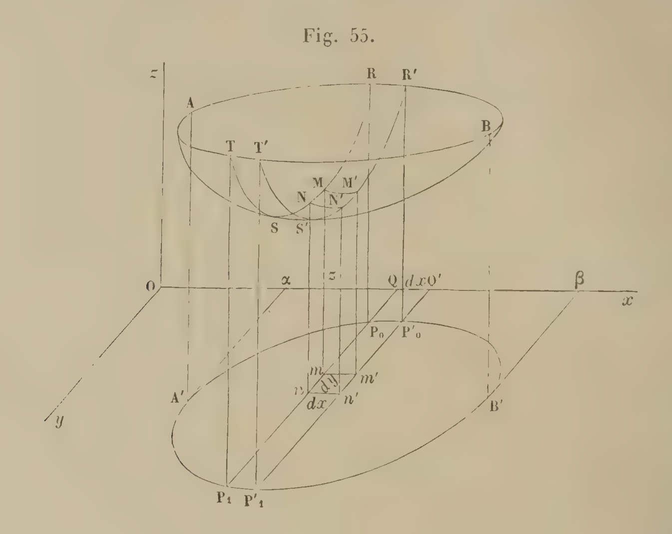
Or, dans le problème analogue de l'évaluation des tranches élémentaires $\sigma\,dx$ composant un volume, l'expression, en intégrale définie, des bases σ des tranches, a été formée en menant le système des plans normaux à l'axe des y, ou dont deux consécutifs ont respectivement y, $y+dy$ pour leur coordonnée constante suivant cet axe. On procédera donc ici de même, c'est-à-dire que l'on partagera la bande considérée de surface en éléments infiniment petits dans les deux sens, au moyen de la famille de plans $y=$ const.; et, en effet, la construction de cette seconde famille $y=$ const. n'est pas moins naturelle que celle de la première $x=$ const., quand l'équation de la surface, mise sous la forme $z=f(x,y)$, attribue aux deux coordonnées x et y un rôle pareil.

Mais, pour plus de clarté, fixons d'une manière précise les données du problème. Supposons qu'on ait partagé la surface courbe en parties, comme ARBTS (p. 132), dont chacune admette au plus une ordonnée z pour un système quelconque de valeurs des deux autres coordonnées x, y, ou ne se trouve percée qu'en un seul point par toute parallèle à l'axe des z; et soient $z=f(x, y)$ l'expression connue de cette ordonnée; p, q, comme à l'ordinaire, ses deux dérivées partielles en x et y. La courbe limite ARBT de la surface qu'il s'agit d'évaluer sera définie au moyen de son *contour apparent* $A'P_0B'P_1$, dont l'équation en x et y, résolue par rapport à y, donnera deux valeurs au moins, comme $y=QP_0$ et $y=QP_1$, pour chaque abscisse $x=OQ$ comprise entre celles, $O\alpha$, $O\beta$, des tangentes $A'\alpha$, $B'\beta$ menées à ce contour apparent parallèlement à l'axe des y. Et si l'on a soin d'ailleurs de ne considérer à la fois qu'une partie assez peu étendue de la surface courbe, il n'y aura évidemment, sur le contour dont il s'agit, pas plus de deux ordonnées y pour une seule abscisse x : j'ap-

pellerai y_0 la plus petite QP_0, y_1 la plus grande QP_1, et, respectivement, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ leurs expressions.

Cela posé, soit RR′T′T la bande de surface à évaluer, comprise

Fig. 55.



entre deux plans consécutifs normaux aux x, QP_0RTP_1, $Q'P'_0R'T'P'_1$, ayant pour abscisses x et $x+dx$. Le système des plans perpendiculaires à Oy la divisera en éléments d'une courbure insensible, comme MM′N′N, qui se projetteront sur le plan des xy suivant des rectangles, tels que $mm'n'n$, d'une largeur constante $mm' = QQ' = dx$, et d'une longueur, mn, variable ou non, mesurant l'espacement dy de deux plans consécutifs de ce second système. On aura donc, si γ désigne l'angle aigu de la normale à la surface, en M, avec l'axe des z, angle dont le cosinus a pour inverse $\sqrt{1+p^2+q^2}$ (t. I, p. 258),

$$\text{Aire } mm'n'n = dx\,dy \quad \text{et} \quad \text{Aire MM'N'N} = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Ainsi se trouve exprimé un élément de bande, en fonction de dx, dy et des coordonnées x, y de son *premier* sommet M, qui est celui pour lequel ces coordonnées sont les moindres. Or, quand on considère successivement, pour en faire la somme, tous les éléments, comme MM′N′N, d'une même bande, les deux quantités $x = OQ$ et $dx = QQ'$ sont invariables, tandis que y varie avec continuité, par accroissements dy, comme mn, uniformes ou non, depuis $y_0 = QP_0 = \varphi_0(x)$ [ou plutôt depuis une valeur infiniment peu supérieure à celle-là, si l'on ne veut

pas compter un élément de surface, insignifiant, ébréché par le contour], jusqu'à $y_1 = \mathrm{QP}_1 = \varphi_1(x)$ [sauf, de même, une erreur négligeable]. Donc la sommation des éléments composant la bande RR′T′T donnera, par le transport du facteur commun dx hors du signe $\int$, la formule cherchée,

$$\text{(15)} \qquad \text{Aire RR}'\text{T}'\text{T} = \left(\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy \right) dx,$$

dans le second membre de laquelle l'intégration indiquée doit se faire uniquement, comme on voit, par rapport à y, c'est-à-dire pour une valeur invariable OQ de la quantité x dont dépend aussi la fonction $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$. Mais, les deux limites $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ de y dépendant de x, le résultat de cette intégration indiquée par $\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy$ devient, en définitive, une certaine fonction F de x seul, comme il arrivait dans le calcul de la base σ d'une tranche élémentaire $\sigma\, dx$ quand il s'agissait d'évaluer un volume. Donc l'expression (15) de l'aire d'une bande sera bien de la forme voulue $\mathrm{F}(x)\,dx$; et une deuxième intégration, par rapport à x, entre les deux abscisses extrêmes $\mathrm{O}\alpha = x_0$, $\mathrm{O}\beta = x_1$, donnera, pour obtenir l'aire demandée de la surface courbe ARBTS, la formule générale

$$\text{(16)} \qquad \text{Aire} = \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dy \right) dx.$$

300. — Exemples : surfaces d'un triangle sphérique trirectangle et de la voûte de Viviani.

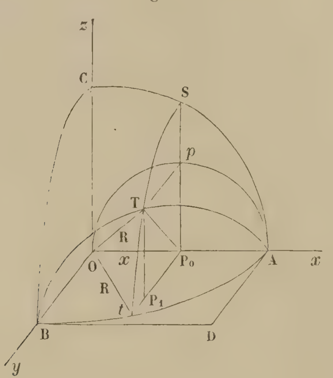
Pour montrer l'usage de cette formule (16), appliquons-la au calcul de l'aire du triangle sphérique trirectangle ABC (p. 134) appartenant à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2$ et compris dans l'angle des coordonnées positives, ainsi qu'à ce qui reste de ce triangle curviligne quand on en ôte toute la partie, ATBt, dont la projection sur le plan des zx est le demi-cercle ApO décrit sur OA comme diamètre. On y aura évidemment $x_0 = 0$, $x_1 = \mathrm{OA} = \mathrm{R}$. De plus, la section de la surface par le plan $\mathrm{SP}_0 t$, d'une abscisse constante $x = \mathrm{OP}_0$ comprise entre zéro et R, sera le quart de petit cercle St pour le triangle, mais seulement sa partie ST, projetée en Sp sur le plan des zx et en $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ sur celui des xy, pour l'aire BTAC que l'on veut évaluer à part : d'où il résultera, dans le premier cas,

$$y_0 \quad \text{ou} \quad \varphi_0(x) = 0, \qquad y_1 \quad \text{ou} \quad \varphi_1(x) = \mathrm{P}_0 t = \sqrt{\overline{\mathrm{O}t}^2 - \overline{\mathrm{OP}_0}^2} = \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2},$$

et, dans le second cas,

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = \mathrm{P_0P_1} = \sqrt{\overline{\mathrm{P_0T}}^2 - \overline{\mathrm{P_0}p}^2} = \sqrt{(\mathrm{R}^2 - x^2) - \overline{\mathrm{P_0O}}\,.\,\overline{\mathrm{P_0A}}} \\ \quad = \sqrt{(\mathrm{R}^2 - x^2) - x(\mathrm{R} - x)} = \sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{R} - x)}. \end{cases}$$

Fig. 56.



L'équation $z = \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}$ donnant d'ailleurs $p = \dfrac{-x}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}}$, $q = \dfrac{-y}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}}$ et, par conséquent, $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \dfrac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}}$, la formule (16), où l'on pourra faire sortir le facteur constant R des signes $\int$, deviendra : 1° pour le triangle sphérique,

$$(17) \qquad \text{Aire sphér. ABC} = \mathrm{R} \int_0^{\mathrm{R}} \left(\int_0^{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}} \right) dx;$$

2°, dans l'autre cas,

$$(18) \qquad \text{Aire sphér. ATBCA} = \mathrm{R} \int_0^{\mathrm{R}} \left(\int_0^{\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{R} - x)}} \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}} \right) dx.$$

Or, quand on intègre $\dfrac{dy}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2 - y^2}}$, la quantité $\mathrm{R}^2 - x^2$ ou $\overline{\mathrm{P_0}t}^2$ joue le rôle d'une constante positive β^2, et la formule (23) de la XXI[e] Leçon (p. 25) donne comme résultat, à partir de la limite $y = 0$, $\arcsin \dfrac{y}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}}$, c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2}$, quand la limite supérieure est $y = \sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}$, et $\arcsin \sqrt{\dfrac{\mathrm{R}}{\mathrm{R} + x}}$, quand elle est $y = \sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{R} - x)}$.

Le second membre de (17) devient donc $R\int_0^R \frac{\pi}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}R^2$, ou le double de la projection $AOB = \frac{\pi}{4}R^2$ du triangle sphérique ABC sur le plan des xy. Il en résulterait bien, pour un hémisphère entier $4(ABC)$, une aire égale à deux fois son cercle de base πR^2.

Quant au second membre de (18), si l'on observe que l'angle aigu dont le sinus est $\sqrt{\frac{R}{R+x}}$ a pour cosinus $\sqrt{\frac{x}{R+x}}$ et pour cotangente $\sqrt{\frac{x}{R}}$, il prend la forme $R^2\int_0^R\left(\operatorname{arc\,cot}\sqrt{\frac{x}{R}}\right)\frac{dx}{R}$, que l'on réduit à $R^2\int_{u=0}^{u=1}(\operatorname{arc\,cot} u)\,d(u^2)$, en appelant u et introduisant comme variable d'intégration, au lieu de x, le rapport $\sqrt{\frac{x}{R}}$, croissant de zéro à 1 pendant que x grandit de zéro à R. Or une intégration par parties, où l'on observera que $-u^2 d\operatorname{arc\,cot} u = \frac{u^2\,du}{1+u^2} = du - \frac{du}{1+u^2}$, donne

$$\left\{\begin{aligned} \int(\operatorname{arc\,cot} u)\,d(u^2) &= u^2\operatorname{arc\,cot} u - \int u^2 d\operatorname{arc\,cot} u \\ &= u^2\operatorname{arc\,cot} u + u - \operatorname{arc\,tang} u + \text{const.}, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire simplement 1, entre la limite $u = 0$, qui annule les trois termes variables du dernier membre, et la limite $u = 1$, qui rend égaux $\operatorname{arc\,tang} u$ et $\operatorname{arc\,cot} u$. Par conséquent, la formule (18) devient

(19) $$\text{Aire sphér. ATBCA} = R^2 = \text{le carré ADBO}.$$

Ce résultat remarquable est dû à Viviani, géomètre italien du XVIIe siècle. Il en déduisit qu'une voûte hémisphérique mince, composée de quatre triangles trirectangles, comme ABC, réunis autour du sommet C, acquiert une surface extérieure commensurable, égale au carré du diamètre $2R$ de sa base, quand on y ouvre quatre fenêtres pareilles à $AtBT$, ou se projetant suivant deux demi-cercles sur le plan diamétral des zx.

On remarquera que, si le triangle sphérique entier ABC est le double de sa projection $AOBt$ sur le plan des xy, la surface partielle ATBCA vaut seulement une fois et demie la sienne. En effet, l'expression de celle-ci, vu la valeur $\sqrt{R(R-x)}$ de l'ordonnée $y = P_0P_1$ du point T, est

$$\int_0^R \sqrt{R(R-x)}\,dx = -\frac{2}{3}\sqrt{R}\left[(R-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R = \frac{2}{3}R^2 = \frac{2}{3}\,\text{aire ATBCA}.$$

Les deux surfaces considérées ABC et ATBCA présentent donc, quoique la seconde seule soit commensurable, ce caractère commun, d'avoir des rapports commensurables et aussi simples que possible avec leurs projections sur le plan des xy ([1]).

301*. — Division d'une surface en bandes de pente uniforme; aire de l'ellipsoïde.

(Compléments, p. 70*.)

302*. — Évaluation des volumes et des aires courbes en coordonnées polaires.

(Compléments, p. 75*.)

([1]) Il est clair qu'une infinité de plans voisins menés suivant l'axe vertical des z découperont le triangle sphérique CAB et sa projection OAB dans les mêmes rapports, et donneront ainsi, à partir du sommet C, des demi-fuseaux élémentaires, encore doubles des secteurs de cercle, rangés autour de O, qui seront leurs projections sur le plan xOy. Or, comme l'un quelconque de ces demi-fuseaux peut évidemment (à des infiniment petits près d'ordre supérieur) être censé appartenir au quart de cylindre circulaire, à génératrices horizontales, qui lui est circonscrit, on voit qu'un tel demi-fuseau ou demi-onglet *cylindrique* élémentaire, contigu à une ligne de plus grande pente du quart de cylindre, vaut également le double du triangle infiniment aigu constituant sa projection horizontale. Enfin, si les deux plans verticaux qui limitent latéralement ce *demi-onglet* ou *demi-coin cylindrique* élémentaire s'écartent, en tournant autour de leur intersection, de manière à comprendre entre eux, dans le même quart de cylindre, un demi-coin d'un angle fini quelconque, tous les éléments soit du demi-onglet, soit de sa projection sur le plan xOy, limités par des génératrices consécutives ou par leurs projections horizontales, grandiront, comme ces génératrices mêmes, dans un rapport commun. Par conséquent, le *demi-onglet ou demi-coin cylindrique ne cessera pas d'être le double de sa projection horizontale triangulaire.*

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

INTÉGRALES MULTIPLES ET LEUR USAGE; CENTRE DE GRAVITÉ DES FIGURES; VOLUME ET SURFACE LATÉRALE DU TRONC DE PRISME; THÉORÈME DE GULDIN.

---

303. — Des intégrales doubles; exemple qu'en donne l'expression générale d'un volume en coordonnées rectangulaires.

Le calcul des volumes et des surfaces courbes nous a conduits, dans la dernière Leçon, à des expressions de la forme

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} F(x,y)\,dy\right]dx,$$

où le produit d'une fonction F de deux variables indépendantes x et y par leurs différentielles dx, dy se trouve intégré une première fois par rapport à l'une de ces variables, y, entre deux limites dépendant de l'autre, x, restée constante ainsi que sa différentielle dx pendant cette intégration, et où le résultat ainsi obtenu, de la forme $f(x)\,dx$, est lui-même intégré ensuite par rapport à cette autre variable x, entre deux limites données. L'on donne à une telle somme le nom d'*intégrale double,* pour la distinguer de celles qui, comme $\int_a^b f(x)\,dx$, impliquent une seule intégration; et les termes élémentaires dont elle se compose, ou qui sont affectés des deux facteurs infiniment petits dx, dy, s'appellent les *éléments* de l'intégrale, tandis que leur expression commune, $F(x,y)\,dx\,dy$, en est dite l'*élément* général. L'intégrale comprend, comme on voit, une double infinité de valeurs successives de celui-ci, $F(x,y)\,dx\,dy$, obtenues en faisant varier x et y, avec continuité, dans tout le *champ* que définissent les limites et qu'entoure, sur le plan des xy (quand x et y sont des coordonnées), la courbe fermée dont les diverses parties ont pour équations $y=\varphi_0(x)$, $y=\varphi_1(x)$, $x=x_0$ et $x=x_1$.

Ces détails ressortent surtout de l'évaluation générale des aires courbes (p. 132); mais, comme la fonction qui s'y présente sous les signes $\int$, savoir $\sqrt{1+p^2+q^2}$, n'a pas des rapports simples avec la

seule, $z = f(x, y)$, donnée alors immédiatement, et qu'elle ne peut même recevoir des valeurs absolues quelconques (puisqu'elle dépasse nécessairement l'unité), il y a lieu de demander aux volumes, plutôt qu'aux surfaces, la représentation purement géométrique générale des intégrales doubles, de même qu'on a eu recours aux aires, et non aux arcs, pour avoir, en géométrie plane, une expression générale et purement géométrique des intégrales simples.

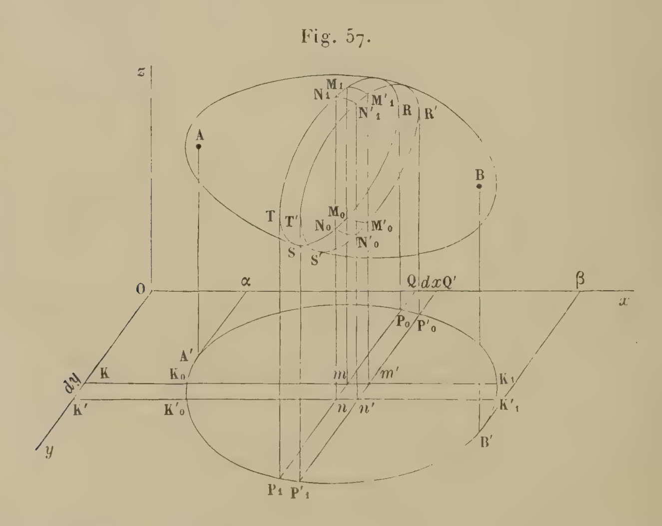
Rappelons-nous donc la manière dont s'évalue un volume, en nous bornant d'ailleurs au cas d'axes rectangulaires, mais en indiquant analytiquement le détail des opérations, ce que nous n'avons pas encore fait.

Soient AB le corps dont il s'agit d'exprimer le volume et A'B' son contour apparent sur le plan des xy. Admettons que, pour tous les points (x, y) intérieurs à ce contour, m par exemple, la surface ait seulement deux ordonnées ou valeurs de z, savoir la plus grande $m\mathrm{M}_1$, que nous appellerons z_1, et la plus petite $m\mathrm{M}_0$, que nous appellerons z_0. L'équation de la surface, résolue par rapport à z, les fera connaître en fonction de x et y : nous les représenterons par $f_1(x, y)$ et par $f_0(x, y)$, c'est-à-dire que nous poserons

(1) $$m\mathrm{M}_1 \text{ ou } z_1 = f_1(x, y), \qquad m\mathrm{M}_0 \text{ ou } z_0 = f_0(x, y).$$

Admettons de même que l'équation en x et y du contour apparent

Fig. 57.



donne seulement, pour chaque valeur $\mathrm{OQ} = x$ de l'abscisse, deux ordonnées $y_0 = \mathrm{QP}_0$, $y_1 = \mathrm{QP}_1$, et désignons-les respectivement par

$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, comme quand il s'agissait du contour apparent d'une portion de surface courbe. Enfin, appelons x_0, x_1 la plus petite, Oα, et la plus grande, Oβ, des abscisses à considérer, savoir, celles des points A, B où le corps est touché par deux plans tangents αA′A, βB′B normaux aux x, et des points A′, B′ de contact du contour apparent avec deux tangentes αA′, βB′ parallèles à l'axe des y.

Cela posé, souvenons-nous que le volume s'obtient en divisant le corps, par des plans normaux aux x, en tranches minces, dont l'une quelconque, RSTT′R′S′, a pour mesure le produit de son épaisseur, espacement $dx = \mathrm{QQ'}$ de deux consécutifs de ces plans, par la section $\mathrm{RST} = \sigma$ que le premier d'entre eux, d'abscisse x, fait dans le corps; et que l'aire σ elle-même s'évalue par un partage en bandes étroites, opéré au moyen d'un second système de plans, normaux aux y ou ayant leur équation de la forme $y = \text{const.}$

L'une quelconque de ces bandes, comprise, par exemple, entre les deux plans $\mathrm{K}m\mathrm{M}_1$, $\mathrm{K}'n\mathrm{N}_1$, que caractérisent les deux valeurs consécutives $\mathrm{OK} = y$ et $\mathrm{OK'} = y + dy$ de leur paramètre, est $\mathrm{M_0M_1N_1N_0}$ et égale le produit de sa longueur $\mathrm{M_0M_1}$ par sa largeur $mn = \mathrm{KK'} = dy$. La partie du produit $\sigma\,dx$, c'est-à-dire de la tranche RSTT′R′S′, qui lui correspond, sera donc, analytiquement,

$$\mathrm{M_0M_1N_1N_0} \times dx = \mathrm{M_0M_1} \times mn \times mm' = \mathrm{M_0M_1} \times dx\,dy,$$

et, géométriquement, le filet adjacent prismatique $\mathrm{M_0N'_1}$ compris entre les deux éléments $\mathrm{M_0M'_0N'_0N_0}$, $\mathrm{M_1M'_1N'_1N_1}$ de la surface, qui se projettent sur le plan des xy suivant le rectangle $mm'n'n = dx\,dy$. Effectivement, ce filet ne diffère du prisme droit compris entre les quatre mêmes faces latérales avec $\mathrm{M_0M_1}$ pour hauteur, que par deux tronçons, évidemment négligeables, en $\mathrm{M_0}$ et $\mathrm{M_1}$, additifs ou soustractifs; de sorte que l'élément cherché de volume est bien

$$\mathrm{M_0M_1} \times mm'n'n = \mathrm{M_0M_1} \times dx\,dy.$$

Or, comme

$$\mathrm{M_0M_1} = m\mathrm{M_1} - m\mathrm{M_0} = z_1 - z_0 = f_1(x,y) - f_0(x,y),$$

cet élément a pour expression

$$(2) \qquad (z_1 - z_0)\,dx\,dy \quad \text{ou} \quad [f_1(x,y) - f_0(x,y)]\,dx\,dy:$$

l'élément $\mathrm{M_0M_1N_1N_0}$ ou $\mathrm{M_0M_1} \times dy$ de la section σ égalerait $(z_1 - z_0)\,dy$, ou aurait en moins le facteur dx.

La tranche RSTT′R′S′ égalera la somme de tous les filets pareils compris entre les deux plans $\mathrm{QM_1P_1}$, $\mathrm{Q'M'_1P'_1}$, ou pour lesquels x et

dx ont les valeurs constantes OQ, QQ′, tandis que y y croît depuis $QP_0 = y_0 = \varphi_0(x)$ jusqu'à $QP_1 = y_1 = \varphi_1(x)$. Son expression sera donc

$$\left\{ \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} [f_1(x,y) - f_0(x,y)]\, dy \right\} dx,$$

ou mieux

$$dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} [f_1(x,y) - f_0(x,y)]\, dy,$$

en plaçant ainsi le facteur dx avant le signe $\int$, afin de n'avoir pas à entourer d'une parenthèse l'intégrale prise par rapport à y. Et l'on voit que cette valeur de la tranche est bien $\sigma\, dx$, car on aurait évidemment $\sigma = \int_{y_0}^{y_1} (z_1 - z_0)\, dy$. Il viendra ensuite pour la somme des tranches du corps AB, c'est-à-dire pour le volume qu'il s'agit d'exprimer, l'intégrale double

$$(3) \qquad \text{Volume} = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} [f_1(x,y) - f_0(x,y)]\, dy.$$

Le second membre se réduit à $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)\, dy$, quand on prend $z_0 = 0$ et $z_1 = f(x,y)$, c'est-à-dire quand il s'agit d'indiquer le volume qui, se projetant sur le plan des xy dans tout l'intérieur du contour donné A′B′, est, de plus, compris depuis ce plan jusqu'à la surface dont l'ordonnée z égale une fonction quelconque assignée $f(x,y)$ des deux autres coordonnées x, y. Le volume ainsi défini, et que l'on peut écrire, plus brièvement, $\int\int f(x,y)\, dx\, dy$, constitue donc une représentation géométrique nette d'une intégrale double, pourvu que l'on y regarde comme négatives les parties situées, par rapport au plan des xy, du côté des z négatifs, ou composées de filets prismatiques $z\, dx\, dy$ ayant pour hauteur une ordonnée z négative, et chargés, par conséquent, de figurer des éléments $f(x,y)\, dx\, dy$ négatifs eux-mêmes.

304. — Des intégrales triples; exemples qu'en fournissent l'expression d'une masse et le calcul de la valeur moyenne d'une fonction de point dans une étendue à trois dimensions.

Mais, pour revenir à notre exemple du volume d'un corps quelconque, les filets élémentaires $(z_1 - z_0)\, dx\, dy$, comme $M_0 N_1'$ (p. 138), sont-ils bien les véritables éléments de volume, c'est-à-dire des élé-

ments tels, qu'il ne puisse pas y avoir lieu de les réduire? Ces filets ayant conservé une dimension finie, la longueur M_0M_1, il est évident qu'on obtiendra des volumes plus simples encore, en rendant cette dimension elle-même infiniment petite. Il suffira, pour cela, de mener un troisième système de plans, normaux à Oz, de même qu'on en a mené de normaux soit à Ox, soit à Oy. Alors le filet $M_0N'_1$ se trouvera partagé, abstraction faite, à chaque bout, d'un tronçon négligeable, en une infinité de parallélépipèdes rectangles, dont les trois dimensions infiniment petites égaleront les trois accroissements, dx, dy, dz, qu'éprouveront les coordonnées respectives caractérisant les plans menés dans les trois systèmes par les divers points (x, y, z), quand on passera de chacun de ces plans au plan suivant du même système.

En conséquence, l'on aura, pour le véritable élément de volume, l'expression générale, $dx\,dy\,dz$, des parallélépipèdes ainsi construits, et ce n'est pas deux intégrations, mais trois, que demandera le calcul d'un volume fini. Effectivement, le filet $M_0N'_1$ étant la somme des parallélépipèdes rangés en une file parallèle aux z, ou pour lesquels les coordonnées x, y d'une arête, et leurs accroissements dx, dy de cette arête aux voisines, sont les quantités constantes $x = OQ$, $y = Qm$, $dx = mm'$, $dy = mn$, l'on formera sa valeur en opérant une première sommation, par rapport à z, c'est-à-dire sans faire varier ni x, ni y, ni leurs différentielles dx, dy. Celles-ci constituent donc alors, dans $\int dx\,dy\,dz$, deux facteurs communs à tous les éléments; et la somme obtenue est $dx\,dy \int dz$, ou, sous une forme plus explicite, $dx\,dy \int_{z_0}^{z_1} dz$, puisque z y croît, dans l'intérieur du corps, depuis la valeur $mM_0 = z_0$ jusqu'à la valeur $mM_1 = z_1$. Nous savons d'ailleurs comment une intégration, en y, groupe ensuite toutes les sommes analogues, où x et dx ont de mêmes valeurs comme OQ et QQ', pour donner l'expression, $dx \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{z_0}^{z_1} dz$, d'une tranche RSTT'R'S', et comment, enfin, toutes les tranches s'ajoutent dans une troisième intégration, par rapport à x, qui donne ainsi, sous deux formes équivalentes, comme expression générale la plus naturelle d'un volume V,

$$(4)\qquad V = \int_{x=x_0}^{x=x_1} \int_{y=y_0}^{y=y_1} \int_{z=z_0}^{z=z_1} dx\,dy\,dz = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} dy \int_{f_0(x,y)}^{f_1(x,y)} dz.$$

Si cette expression se réduit à l'intégrale double (3) [p. 140], c'est uniquement parce que la première intégration à opérer, du produit

$dx\,dy\,dz$, ne portant que sur la différentielle exacte dz, a pour résultat $(z)_{z_0}^{z_1} = z_1 - z_0$ et, une fois faite ainsi dans tous les cas, ne laisse plus subsister que l'indication des deux intégrations en x et y.

Or il est d'autres questions, également relatives à un espace triplement étendu, où aucune des trois intégrations ne s'effectuera d'une manière générale et immédiate. Supposons qu'on demande, par exemple, la masse totale d'un corps de la forme considérée AB (p. 138), sachant que chaque fragment de sa matière, infiniment petit en tous sens, a pour *densité* une certaine fonction continue $F(x, y, z)$ des trois coordonnées x, y, z, ou, autrement dit, que le rapport de la masse de toute partie très restreinte, entourant le point (x, y, z), à son volume, y tend vers la valeur $F(x, y, z)$ quand on réduit de plus en plus et indéfiniment cette partie [1]. Il est évident que si, dans un tel

---

[1] *Note sur la notion de densité.*

Au commencement du Tome I (p. 20), pour obtenir une représentation commode des fonctions de point, nous avons imaginé qu'une matière primitivement *homogène* eût été pulvérisée uniformément et en quelque sorte infiniment, ou divisée en parties égales d'une ténuité extrême, puis répandue, d'après une loi quelconque de distribution, dans certaines régions assignées de l'espace, et nous avons appelé *masse* de toute portion de cette matière sa quantité même, mesurée par le nombre de ses parties, ou plutôt, vu la très grande valeur de ce nombre, par un autre proportionnel, mais de grandeur ordinairement modérée. La notion de masse, restreinte, comme on voit, à son cas le plus simple, étant ainsi fixée, il nous a suffi, pour obtenir celle de la *densité* de la matière en chaque endroit (x, y, z), de concevoir une sphère extrêmement petite et mobile, d'un rayon constant, dont le centre viendrait successivement dans toutes les positions : la *densité* au point quelconque (x, y, z) a été définie le rapport de la masse contenue dans cette sphère quand son centre arrive en (x, y, z), à celle qui s'y trouve quand ce centre occupe une place déterminée, autour de laquelle la matière est supposée répartie d'une certaine manière choisie comme terme de comparaison.

Il nous reste à compléter cette notion, maintenant que nous avons acquis une idée plus nette de la quantité appelée *volume* d'un espace, et de l'invariabilité de sa mesure en unités cubiques, infiniment petites, le remplissant par leur juxtaposition, mais arbitrairement orientées à son intérieur. En effet, nous avons encore à reconnaître que la densité est, pour chaque endroit, en relation simple avec la quantité de matière qu'y contient tout volume très petit *de forme quelconque*, et à montrer aussi, avec la plus grande précision possible, que la densité peut être une fonction de point tout à fait arbitraire.

Représentons-nous, pour cela, l'espace divisé, par trois systèmes de plans équidistants parallèles aux plans coordonnés, en cubes élémentaires égaux, ε^3, dont j'appelle, comme on voit, ε l'arête infiniment courte; et concevons que l'on place dans chacun une masse de l'ordre de ε^3, graduellement variable de l'un à l'autre. Toute surface fermée extrêmement petite, décrite autour d'un même point (x, y, z),

cas, l'on considère une particule infiniment petite en tous sens et dont un point ait certaines coordonnées x, y, z, des fragments quelconques de cette particule posséderont, vu leurs coordonnées infiniment peu différentes de x, y, z, des densités infiniment peu différentes aussi de $F(x, y, z)$. Par suite, la masse de chaque fragment égalera sensiblement le produit de son volume par $F(x, y, z)$, et la masse de toute la particule aura, de même, comme expression, le produit de $F(x, y, z)$ par la somme des volumes des fragments, qui est le volume entier de la particule. Donc la somme des produits pareils, pour toutes les particules infiniment petites en tous sens, mais d'ailleurs arbitraires, en lesquelles on aura décomposé le corps, représentera sa masse totale.

Ce sera, comme on voit, une quantité ne dépendant nullement, à la limite, du mode de division adopté du volume; et il le faut bien, puisque, de toute manière, les mêmes fragments ou fragments de fragments se retrouveront, multipliés par des valeurs de $F(x, y, z)$ ne différant qu'infiniment peu, c'est-à-dire présentant des écarts inca-

---

renfermera, d'une part, un volume proportionnel au nombre des cubes ε^3 contenus dans son intérieur, et, d'autre part, les masses sensiblement égales occupant ces cubes, c'est-à-dire, en tout, une masse proportionnelle (sauf erreur négligeable) au volume total, et du même ordre que celui-ci. Par conséquent, pour tout fragment infinitésimal de la matière existant en un certain endroit, le rapport, fini, de la masse au volume, est indépendant de sa forme et de ses dimensions, ou a la même valeur que dans la sphère employée pour y définir la densité; et si, par un choix convenable de l'échelle des nombres proportionnels mesurant les masses, l'on a eu soin, comme nous l'admettrons, de prendre ce rapport égal à 1 dans la matière type à laquelle on compare toutes les autres (plus ou moins dilatées ou condensées), la densité égalera partout, ainsi qu'il est dit ci-dessus dans le texte, le rapport de la masse d'un fragment matériel, infiniment petit en tous sens, mais d'ailleurs quelconque, à son volume. Ce sera bien, en outre, une fonction des coordonnées x, y, z arbitrairement variable d'un endroit à l'autre; car sa valeur au point quelconque (x, y, z) exprimera le quotient, par le volume ε^3, de la masse *arbitraire* placée initialement dans le cube ε^3 contenant ce point.

Toutefois, la valeur ainsi définie ne deviendra jamais négative; et si l'on veut trouver dans les notions de masse et de *densité* une manière simple de se représenter toutes les fonctions possibles de point (ce que nous nous sommes proposé de faire dès la page 20 du Tome I), il faudra, soit concevoir deux sortes *opposées* de matière dont les masses et, par suite, les densités puissent se prendre dans des sens ou avec des signes contraires, soit plus simplement, après avoir imaginé des corps très massifs, convenir de retrancher de toutes leurs densités une forte partie *commune*, censée connue, et de ne faire attention qu'à l'*excédent positif* ou *négatif* (auquel on réservera dès lors le nom de *densité*) de chaque densité effective totale sur cette partie commune. En d'autres termes, on fera choix pour les densités, comme il est d'usage de le faire pour les températures, d'une *origine* différente du commencement ou point de départ de ces grandeurs, d'après le principe employé d'abord (t. I, pp. 2 et 21) pour les espaces et les temps.

pables de donner, dans toute étendue finie, autre chose qu'une différence totale évanouissante.

Nous pourrons donc effectuer la division en particules au moyen de nos trois systèmes de plans normaux respectivement à Ox, Oy, Oz et prendre, dans chaque particule, comme facteur destiné à multiplier son volume, la valeur de la fonction F à son sommet (x, y, z) qui a les coordonnées les plus petites; ce qui donnera, pour sa masse, l'expression $F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$. Et le groupement de tous les éléments analogues de masse se fera ensuite comme quand il s'agissait du simple volume. Il viendra

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \text{Masse du corps} &= \int_{x=x_0}^{x=x_1} \int_{y=y_0}^{y=y_1} \int_{z=z_0}^{z=z_1} F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} dy \int_{f_0(x,y)}^{f_1(x,y)} F(x, y, z)\,dz. \end{aligned} \right.$$

Ici aucune des intégrations ne s'effectue immédiatement, et il faudra, pour en tenter le calcul, connaître dans chaque cas $F(x, y, z)$.

On se trouve conduit à des opérations analogues lorsque $F(x, y, z)$ cesse d'être une densité pour devenir une fonction quelconque de point, c'est-à-dire des coordonnées x, y, z, et qu'on demande la moyenne de ses valeurs dans tout l'intérieur de l'espace AB. Alors il faut concevoir le volume, que j'appellerai V, de cet espace, partagé en un nombre infiniment grand, n, de parties égales infiniment petites en tous sens, et puis diviser par n la somme des valeurs prises par $F(x, y, z)$ en un point de chacune de ces parties, choisi d'ailleurs comme on voudra. Or ce quotient $\dfrac{\Sigma F(x, y, z)}{n}$, que l'on peut, si dV désigne l'une quelconque des parties en question, écrire $\dfrac{\Sigma F(x, y, z)\,dV}{n\,dV}$, ou encore $\dfrac{\Sigma F(x, y, z)\,dV}{V}$, est indépendant du mode de division; car il est clair, par un raisonnement précédent (p. 143), que la somme $\Sigma F(x, y, z)\,dV$ restera la même, si l'on rend arbitrairement inégaux et dissemblables les éléments dV de volume, et si l'on change infiniment peu, à volonté, les points (x, y, z) pour lesquels s'y évalue la fonction $F(x, y, z)$. Donc rien n'empêche d'adopter, d'une part, comme éléments de volume, les parallélépipèdes rectangles $dx\,dy\,dz$, d'autre part, comme valeurs correspondantes de F, celles de cette fonction en leurs points (x, y, z) ayant les coordonnées les plus petites; et il vient

$$(6)\quad \text{Valeur moy. de } F(x, y, z) = \frac{1}{V} \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} dy \int_{f_0(x,y)}^{f_1(x,y)} F(x, y, z)\,dz.$$

Des expressions, comme (5) et (6), *où le produit de trois différentielles,* dx, dy, dz, *multiplié par une fonction* $F(x, y, z)$ *des variables correspondantes, se trouve intégré successivement par rapport à chacune de ces variables et entre des limites dépendant généralement des variables par rapport auxquelles on n'a pas encore intégré, s'appellent des intégrales triples.* Le *champ* de l'intégrale, ou intervalle des limites dans lequel se meuvent les variables, est représenté, comme on voit, par un volume, et l'ensemble des limites se trouve lui-même représenté par la surface entourant ce volume.

305. — **Des intégrales multiples en général et de leur utilité.**

On conçoit qu'il puisse y avoir, de même, des intégrales *quadruples, quintuples,* etc., bref d'un *ordre de multiplicité* quelconque, suivant le nombre des différentielles de variables indépendantes, facteurs infiniment petits, qui multiplieront, dans leur *élément,* une fonction donnée de ces variables et, par suite, suivant le nombre des intégrations à faire pour obtenir un total fini. Car chaque intégration, effectuée par rapport à l'une des variables et entre des limites ou constantes, ou dépendant des variables qui subsistent encore dans l'expression, aura pour effet d'éliminer du résultat cette variable avec sa différentielle.

Par exemple, dans une question où il s'agira d'évaluer des rapports physiques, ou des actions d'une certaine nature, existant entre les diverses parties d'un corps et celles d'un autre corps, pour obtenir leur influence mutuelle totale (comme serait la pesanteur réciproque de chacun vers l'autre), chaque partie élémentaire $dx\,dy\,dz$ de l'un d'eux, définie en position par ses coordonnées x, y, z, et chaque fragment analogue $d\xi\,d\eta\,d\zeta$ de l'autre, caractérisé de même par ses coordonnées, que j'appellerai ξ, η, ζ, pourront avoir leur relation ou influence particulière exprimée par le produit de leurs masses, proportionnelles à leurs volumes dans les situations qu'ils occupent, et d'une fonction de ces situations respectives (x, y, z), (ξ, η, ζ). L'action élémentaire à considérer sera ainsi de la forme

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\,dx\,dy\,dz\,d\xi\,d\eta\,d\zeta;$$

et, par suite, la somme à obtenir constituera une intégrale *sextuple*

$$\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\,dx\,dy\,dz\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

dont les limites se détermineront d'après celles mêmes des deux corps.

Un second exemple, où l'on est conduit à des intégrales quadruples,

est le calcul de la valeur moyenne générale d'une fonction de point, $F(x, y, z, t)$, variable d'un instant à l'autre, et considérée en des temps t pouvant être différents pour différentes parties de l'espace ou, ce qui revient au même, dans des régions (x, y, z) dont les limites peuvent changer en fonction du temps t. Un tel calcul implique une division préalable, en éléments égaux, non seulement de l'espace, que je supposerai partagé en parallélépipèdes infiniment petits pareils $dx\,dy\,dz$, mais encore du temps t, dont j'appellerai dt les parties égales. Et il implique de plus que, pour chaque subdivision ainsi obtenue de l'espace et du temps, censée caractérisée ou définie par les plus petites valeurs qu'y reçoivent x, y, z, t, l'on considère et fasse entrer dans l'évaluation de la moyenne une valeur $F(x, y, z, t)$ de la fonction. Si l'on a soin d'écrire cette valeur $\frac{1}{\varepsilon} F(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt$, où ε désigne, pour abréger, le produit constant $dx\,dy\,dz\,dt$, la sommation de toutes les valeurs analogues donnera, au facteur commun près $\frac{1}{\varepsilon}$, l'intégrale quadruple $\iiiint F(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt$, dans laquelle les limites des intégrations dépendront évidemment de celles d'espace et de temps que l'on se donnera dans chaque cas. Enfin, pour avoir la valeur moyenne de F, il suffira de diviser cette somme par le nombre de ses parties, nombre qui est évidemment ce que serait la somme elle-même dans l'hypothèse $F = 1$, et qu'exprime, par suite, sauf encore le facteur $\frac{1}{\varepsilon}$, l'intégrale $\iiiint dx\,dy\,dz\,dt$, prise entre les mêmes limites données. Il viendra donc, comme valeur moyenne cherchée, le rapport des deux intégrales quadruples $\iiiint F(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz\,dt$ et $\iiiint dx\,dy\,dz\,dt$. La seconde se réduit d'ailleurs immédiatement à une intégrale triple; car l'on aura, par exemple, entre les deux limites à considérer $t = t_0$, $t = t_1$, données, pour chaque élément de volume $dx\,dy\,dz$, en fonction de ses coordonnées x, y, z,

$$\int_{t=t_0}^{t=t_1} dx\,dy\,dz\,dt = dx\,dy\,dz \int_{t_0}^{t_1} dt = (t_1 - t_0)\,dx\,dy\,dz,$$

expression ne restant plus à intégrer qu'en x, y et z.

Mais résumons-nous, pour les cas plus usuels où le degré de multiplicité des intégrales ne dépasse pas le troisième.

D'après ce qui précède, tout problème de sommation concernant une étendue à trois dimensions (volume et masse d'un corps, valeur moyenne d'une fonction de trois coordonnées aux divers points d'un solide, etc.) dépend généralement d'une intégrale triple. La raison en

est que l'élément *naturel* d'une telle étendue se trouve exprimé par un produit de trois facteurs infiniment petits, vu qu'il doit être infiniment petit dans les trois sens pour que tous ses points occupent presque la même position (x, y, z) et que les circonstances à considérer y soient, par suite, à fort peu près identiques, ou exprimées par une même valeur $F(x, y, z)$ de la fonction qui les représente sous l'unité de volume. De même, toute question analogue concernant une surface (aire et masse d'une couche mince de matière, valeur moyenne d'une fonction aux divers points d'une étendue superficielle, etc.) dépend généralement d'une intégrale double ; car l'élément d'aire naturel est une surface ayant ses deux dimensions infiniment petites. S'il s'agit, par exemple, d'une aire plane rapportée à des axes rectangulaires des x et des y, les éléments naturels seront les rectangles $dx\,dy$ découpés par les deux systèmes de droites $x =$ const., $y =$ const.

Les lignes sont donc les seules figures qui, par l'addition de quantités concernant leurs diverses parties, ne donnent lieu qu'à des intégrales *simples;* car ce sont les seules dont l'élément naturel, savoir, un arc infiniment petit ds, ne s'étende que suivant un sens et ne contienne par suite, dans son expression, qu'un seul facteur infiniment petit.

306. — Interversion possible de l'ordre des intégrations, dans une intégrale multiple.

Une intégrale multiple conserve évidemment sa valeur quel que soit l'ordre dans lequel on y groupe les éléments, pourvu que ceux-ci restent au fond les mêmes quand on fait varier la manière de les ajouter, c'est-à-dire pourvu que la fonction sous les signes $\int$ et les limites entre lesquelles se meuvent les variables soient bien définies.

Donc, *à condition de ne pas modifier le champ,* on pourra changer l'ordre des intégrations et, s'il s'agit, par exemple, d'une intégrale double de la forme $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi_0(x)}^{\varphi_1(x)} f(x, y)\,dy$, avec $f(x, y)$ constamment fini, effectuer en premier lieu l'intégration par rapport à x, au lieu de l'intégration par rapport à y; ce qui, en se reportant à la figure précédente (p. 138), reviendra à grouper ensemble les éléments $f(x, y)\,dx\,dy$ pour lesquels y et dy seront les mêmes, savoir, les filets prismatiques, de hauteur $f(x, y)$, se projetant, sur le plan des xy, entre deux perpendiculaires consécutives à l'axe des y, comme KK_1 et $K'K'_1$. On voit que les éléments dont il s'agit seront bien ceux

de l'intégrale proposée, si l'on fait varier x entre les valeurs KK_0, KK_1, qui égalent deux certaines fonctions de $OK = y$, plus ou moins aisées à obtenir en résolvant l'équation du contour par rapport à x et non par rapport à y. Par conséquent, ces nouvelles limites, destinées à fixer l'étendue dans laquelle x varie pour chaque valeur de y, pourront toujours se déduire de celles, $y_1 = \varphi_1(x)$ et $y_0 = \varphi_0(x)$, qui définissaient l'étendue où variait y pour chaque valeur de x, et qui déterminaient ainsi complètement le *contour limite* $A'P_0B'P_1A'$. L'intégration par rapport à x une fois effectuée, ou, autrement dit, les filets prismatiques du volume à évaluer une fois groupés en tranches minces normales à l'axe des y, il ne restera plus qu'à faire la somme de toutes ces tranches, en intégrant, par rapport à y, entre deux limites constantes; et celles-ci se déduiront encore de la connaissance du contour limite, car elles seront la plus petite et la plus grande des valeurs reçues par y sur tout ce contour.

Ainsi, l'*on peut toujours intervertir l'ordre des intégrations, pourvu qu'on évalue convenablement, dans chaque cas, leurs limites respectives.*

Mais, si les limites étaient constantes, si, par exemple, dans $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y)\,dy$, les deux expressions $y_0 = \varphi_0(x)$, $y_1 = \varphi_1(x)$ devenaient indépendantes de x, ou que les deux portions $A'P_0B'$, $A'P_1B'$ du contour fussent remplacées par deux parallèles à l'axe des x et reliées l'une à l'autre par les parties des ordonnées $\alpha A'$, $\beta B'$ qu'elles intercepteraient, il est évident que, pour toute valeur OK de y, les deux valeurs limites, KK_0 et KK_1, de x, égaleraient $O\alpha$ et $O\beta$, ou x_0 et x_1, quantités constantes; et y varierait ensuite entre les deux valeurs extrêmes y_0, y_1, également constantes. On aurait donc

$$(7) \qquad \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx.$$

Par conséquent, *lorsqu'une intégrale multiple est prise entre des limites toutes constantes, on peut y intervertir à volonté l'ordre des intégrations sans modifier aucunement les limites de celle qui s'y fait par rapport à chaque variable.*

307*. — Exemple simple d'une telle interversion, dans un cas où les limites sont variables.

(Compléments, p. 80*.)

308*. — Intégrale quadruple réduite à une intégrale triple par l'interversion des intégrations; sommation d'actions ou d'influences exercées aux distances imperceptibles dans un corps, à travers une petite surface plane.

(Compléments, p. 81*.)

309. — Du centre de gravité des figures.

La détermination du centre de gravité des corps est l'un des problèmes les plus intéressants où s'emploient les intégrales multiples. Or, bien que cette question relève surtout de la Mécanique, il y a lieu d'en dire quelques mots dans un Cours d'Analyse, parce que la notion de centre de gravité ne s'applique pas seulement aux masses, mais encore aux simples figures géométriques, pour lesquelles elle conduit, comme on verra, à de remarquables théorèmes.

On appelle *centre de gravité* d'un corps le point dont chaque coordonnée, relative à un système quelconque d'axes rectilignes, est la moyenne arithmétique des coordonnées analogues prises pour les éléments d'égale masse, infiniment petits en tous sens, auxquels on peut toujours supposer le corps réduit. En d'autres termes, si M est la masse totale du corps, composée d'un nombre fini ou infini, n, de masses égales m n'occupant, chacune, qu'un espace infiniment restreint ou d'une situation définissable par les coordonnées x, y, z d'un quelconque de ses points, le centre de gravité, que j'appellerai G, sera le point dont les coordonnées X, Y, Z auront les valeurs

$$X = \frac{1}{n}\Sigma x = \frac{\Sigma m x}{M}, \qquad Y = \frac{1}{n}\Sigma y = \frac{\Sigma m y}{M}, \qquad Z = \frac{1}{n}\Sigma z = \frac{\Sigma m z}{M},$$

le signe de sommation Σ s'étendant à tous les éléments m de la masse M.

Conformément à la définition donnée, ce point reste bien le même quand on change à volonté les axes. Si, en effet, x_1, y_1, z_1 et X_1, Y_1, Z_1 désignent respectivement les coordonnées, par rapport à un second système d'axes, de l'élément quelconque m et du point G, dont les coordonnées dans le premier système sont, de même, x, y, z et X, Y, Z, toutes ces coordonnées nouvelles s'exprimeront, comme on sait, en fonction des anciennes, au moyen de relations linéaires, de la forme

$$(16) \qquad X_1 = \alpha + aX + bY + cZ, \qquad x_1 = \alpha + ax + by + cz.$$

Remplaçons, dans la première de celles-ci, X, Y, Z par leurs valeurs $\frac{\Sigma(x, y, z)}{n}$ et α par l'expression équivalente $\frac{\Sigma\alpha}{n}$, où $\Sigma\alpha$ désigne la

somme de n termes égaux à α. Il viendra aisément

$$X_1 = \frac{1}{n}\Sigma(\alpha + ax + by + cz), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad X_1 = \frac{1}{n}\Sigma x_1,$$

d'après la seconde (16). Et l'on trouverait de même $Y_1 = \frac{1}{n}\Sigma y_1$, $Z_1 = \frac{1}{n}\Sigma z_1$. Donc, ce n'est pas seulement par rapport au premier système d'axes que le point G a pour coordonnées les valeurs moyennes des coordonnées de même nom des diverses masses élémentaires m, mais bien avec tout système d'axes rectilignes.

Si l'on suppose continue la matière M du corps et que, par suite, ses éléments m soient non pas de simples points, mais des particules dM remplissant des espaces infiniment petits en tous sens, les sommes Σmx, Σmy, Σmz, dont dépendent les expressions $\frac{1}{M}\Sigma m(x, y, z)$ de X, Y, Z, constitueront des intégrales définies, évaluables par une division arbitraire du corps en volumes élémentaires, au moyen, par exemple, des trois systèmes de plans $x =$ const., $y =$ const., $z =$ const., ou de trois autres familles quelconques de surfaces. On le reconnaît en raisonnant comme il a été déjà fait (p. 143) pour l'évaluation de la masse d'un corps dont on donne la densité à chaque endroit, c'est-à-dire en observant que, dans tous les modes possibles de division, les mêmes masses élémentaires, considérées comme produits des éléments de volume, ou de leurs fragments, par la densité en un de leurs points ou auprès, se retrouveront toutes, abstraction faite d'écarts relatifs infiniment petits, et seront d'ailleurs multipliées, dans Σmx, Σmy, Σmz, par des coordonnées x, y ou z également incapables de varier, pour chaque fragment, dans un rapport tant soit peu sensible.

Ainsi, de quelque manière que se fasse la division de la matière M en éléments de dimensions infiniment petites, dont dM désignera la masse approchée, produit de l'étendue qu'occupera chacun par la densité en un de ses points, on aura, pour calculer les coordonnées X, Y, Z du centre de gravité, les trois formules

$$(17) \qquad X = \frac{1}{M}\int_M x\,dM, \qquad Y = \frac{1}{M}\int_M y\,dM, \qquad Z = \frac{1}{M}\int_M z\,dM,$$

où le signe $\int$, affecté à sa partie inférieure de l'indice M, indique des intégrations à faire dans toute l'étendue qu'occupe la masse M, et où les facteurs x, y, z de dM, sous ce signe $\int$, désignent les coordonnées d'un point pris à volonté sur l'élément quelconque de cette étendue

auquel correspond la masse dM. Dans le cas ordinaire d'une matière M remplissant un espace à trois dimensions, on décomposera donc celui-ci en parallélépipèdes élémentaires, et $\int_M (x, y, z)\,dM$ deviendront trois intégrales triples. Si, au contraire, la matière se trouve soit étalée en couche mince sur une surface σ, soit même disposée en filet étroit le long d'une ligne s, ces limites de sommes se réduiront évidemment à des intégrales ou doubles, ou même simples, dont l'élément sera le produit d'un élément $d\sigma$ ou ds d'aire ou d'arc par l'une de ses coordonnées x, y, z, et par la densité *superficielle* ou *linéaire* de sa matière, c'est-à-dire par sa masse rapportée non plus à l'unité de volume, mais à l'unité de surface ou de longueur.

On ramène, sans erreur sensible, à de telles intégrales les sommes $\Sigma m(x, y, z)$, tout comme l'expression Σm de la masse totale M, quand cette masse n'est plus continue, mais répartie entre un nombre très grand de *points matériels* distincts, d'une étendue nulle (ou négligeable) et situés à des distances imperceptibles les uns des autres, comme une observation attentive conduit à l'admettre pour tous les corps. En effet, il suffit alors de concevoir la masse de chaque groupe moléculaire d'atomes ou points matériels, étalée uniformément dans l'espace où elle se trouve disséminée et dans le vide environnant, jusqu'à moitié chemin des groupes voisins, pour rendre fictivement continue la matière du corps proposé, sans changer dans un rapport physiquement appréciable les coordonnées x, y, z d'aucune de ses parties ni, par suite, leurs valeurs moyennes X, Y, Z.

Cela posé, lorsque le corps dont il s'agit est *homogène,* c'est-à-dire d'une densité (*cubique, superficielle* ou *linéaire*) constante, son centre de gravité devient ce que l'on appelle le *centre de gravité* de sa *figure* même. Alors des éléments de masse égaux correspondent à des éléments de volume, de surface ou de longueur égaux aussi; et l'on peut évidemment se dispenser de tenir compte de la densité dans le calcul des coordonnées moyennes X, Y, Z. Ainsi, *le centre de gravité d'une figure est le point qui a chacune de ses coordonnées égale à la moyenne des coordonnées de même nom de tous les éléments, pris équivalents et infiniment petits en tous sens, dont se compose cette figure.*

Sans insister davantage ici sur la détermination des centres de gravité, nous observerons que, dans toute figure *finie* qui possède un *centre,* c'est-à-dire dont les éléments sont disposés symétriquement de part et d'autre d'un même point, ce point, centre de la *figure,* en est aussi le *centre de gravité*. On sait, en effet, que, lorsqu'on décrit

le long d'une même droite, successivement, deux chemins égaux, les deux changements correspondants éprouvés par chaque coordonnée sont égaux aussi. Donc, si l'on considère le centre d'une figure, et deux éléments symétriques de cette figure, situés de part et d'autre, les coordonnées varient juste autant, quand on passe de l'un de ces éléments au centre, que lorsqu'on passe du centre à l'autre élément, de même valeur que le premier : ce qui revient à dire que les coordonnées du centre sont les moyennes respectives de celles des deux éléments. Comme il en est de même pour tous les couples analogues d'éléments composant la figure, les coordonnées de son centre égalent bien les moyennes générales de celles de toutes ses parties, et ce point est le centre de gravité.

310. — Volume et surface latérale d'un tronc de prisme droit.

Imaginons un prisme droit, dont la base ait pour contour la ligne fermée quelconque $acc'ba$; et supposons qu'on le coupe, par un plan BOy, suivant une section oblique quelconque $ACC'BA$; alors sa partie comprise entre la base ab et cette section AB est ce que l'on appelle un *tronc de prisme droit.* Nous nous proposons de former une expression simple de son volume et de sa surface latérale.

A cet effet, prenons un système d'axes rectangles Ox, Oy, Oz, tels, que le second, Oy, soit l'intersection des deux plans acb, ACB, et que le premier Ox se trouve contenu dans celui de la base acb : ce sera, par exemple, la perpendiculaire à Oy qui aboutit au centre de gravité G de cette base. Enfin, supposons le troisième axe, Oz, tiré, parallèlement aux génératrices aA, bB, cC, du côté où est le tronc de prisme. Observons que, si l'on considère une ordonnée quelconque, $mM = z$, de la base supérieure ACB du tronc, et son abscisse $Qm = x$, dans le plan MmQ parallèle aux zx ou normal à l'arête Oy de l'angle dièdre des deux bases, ces deux coordonnées z et x seront les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle MmQ, dont l'angle Q mesurera le dièdre en question, que nous appellerons φ; de sorte qu'on aura $z = x \tang\varphi$.

Cela posé, pour évaluer le volume du tronc, décomposons-le, d'après la méthode générale que nous avons donnée, en filets élémentaires, comme $mnn'm'M'N'NM$, ayant pour bases les divers éléments, $mnn'm' = d\sigma$, de l'aire acb, que j'appellerai σ, et ayant pour hauteurs les ordonnées z de la base supérieure ACB qui correspondent aux coordonnées x, y des éléments considérés $d\sigma$ du plan des xy. Le volume d'un filet élémentaire sera donc $z\,d\sigma$, ou $(\tang\varphi)x\,d\sigma$, vu que

$z = x \tang\varphi$. Par suite, le volume total égalera la somme de tous les produits pareils, $(\tang\varphi)\int_\sigma x\,d\sigma$, où $\int_\sigma$ désigne une intégrale étendue à toute la surface σ de la base *acb*. Or, si nous introduisons l'abscisse OG du centre de gravité de cette surface, c'est-à-dire, par définition,

Fig. 58.

la moyenne des abscisses x de tous les éléments $d\sigma$ de l'aire *acb*, nous aurons $\text{OG} = \frac{1}{\sigma}\int_\sigma x\,d\sigma$, ou bien $\int_\sigma x\,d\sigma = \sigma \times \text{OG}$; et l'expression du volume deviendra $\sigma \times \text{OG}.\tang\varphi$. Mais le produit $\text{OG}.\tang\varphi$ n'est évidemment autre que la hauteur GH du tronc, mesurée, perpendiculairement à la base, au-dessus du point G. Donc, en appelant h cette hauteur, le volume du tronc sera simplement exprimé par σh. Ainsi, *le volume du tronc de prisme droit égale le produit de sa base par sa hauteur, mesurée perpendiculairement au-dessus du centre de gravité de cette base.*

Quant à la surface latérale, il est évident que, si ds désigne un élément quelconque, cc', du contour *acba*, on pourra prendre pour élément de cette surface la bande $cc'\text{C}'\text{C}$, comprise entre les deux génératrices $c\text{C}$, $c'\text{C}'$ issues des deux extrémités de ds, et que cette bande, de largeur $cc' = ds$, aura comme expression, sauf erreur négligeable, $c\text{C} \times cc'$ ou $(\tang\varphi)x\,ds$, en appelant x l'abscisse de l'élément ds. L'aire totale vaudra donc $(\tang\varphi)\int_s x\,ds$, si $\int_s$ désigne une intégrale étendue à tout le contour $acba = s$. Or considérons, dans le plan de la base *acb*, le centre de gravité de ce contour, centre différant généralement de celui de la surface *acb*, mais que nous représenterons encore par G pour ne pas compliquer la figure. Son abscisse OG sera,

par définition, la valeur moyenne, $\frac{1}{s}\int_s x\,ds$, de x sur tout le contour s, et l'expression $(\tang\varphi)\int_s x\,ds$ pourra être remplacée par $s \times \text{OG}.\tang\varphi = s \times \text{GH}$. Si donc on appelle h' la hauteur du tronc mesurée au-dessus du centre de gravité du contour de la base, il viendra, pour la valeur de la surface latérale, sh'.

En résumé, *le volume et la surface latérale du tronc de prisme droit s'obtiennent en multipliant respectivement ou sa base, ou le contour de sa base, par la hauteur correspondante du tronc, mesurée perpendiculairement au-dessus du centre de gravité soit de cette base, soit de ce contour.*

311. — Théorèmes de Guldin ou de Pappus.

Imaginons actuellement que l'angle φ des deux bases devienne infiniment petit. Alors les ordonnées z, telles que mM, ne présenteront que des différences et des écarts infiniment petits du second ordre d'avec les chemins que décriraient les divers points de la figure acb, si on la faisait tourner de l'angle φ autour de Oy pour l'amener dans le plan ACB; car l'ordonnée mM, située dans le plan mQM de l'arc de cercle, perpendiculaire à Oy, qu'un pareil mouvement ferait parcourir au point m, et d'ailleurs normale au rayon Qm de cet arc, est tangente à ce dernier, dont l'extrémité, sur le plan ACB, ne se trouve, par suite, qu'à une distance de M infiniment petite du second ordre. Il résulte évidemment de là que le volume ou l'aire engendrés par chaque élément de la surface acb ou de son contour ne pourront pas différer, d'une manière appréciable, du volume et de la surface ayant ces éléments comme base dans le tronc de prisme, et que, par suite, le volume total et l'aire totale décrits seront également les produits respectifs de la surface acb, ou de son contour, par le chemin infiniment petit, sensiblement égal, dans chaque cas, à GH, qu'aura parcouru le centre de gravité de cette surface ou de ce contour.

Et si, après cette rotation infiniment petite de la figure acb, il en survient une seconde, soit autour du même axe Oy, soit autour d'un autre axe situé dans le plan ACB de sa nouvelle position, l'aire et le volume décrits pendant ce second mouvement égaleront encore les produits respectifs des multiplicandes employés déjà, contour ou surface, par le nouveau chemin qu'aura parcouru le centre de gravité considéré. En continuant de même pour une infinité de rotations suc-

cessives, puis faisant la somme des aires ou des volumes qui naissent de ces déplacements, il est clair que l'on obtiendra un théorème ainsi conçu :

Toute figure plane (*ligne ou surface*), *qui se meut en tournant autour d'un axe ou d'axes situés à chaque instant dans son plan, décrit une autre figure* (*surface ou volume*) *égale au produit de la figure génératrice par le chemin que parcourt son centre de gravité.*

Notre raisonnement suppose les axes de rotation, extérieurs à la figure génératrice dont on considère le centre de gravité. Quand il n'en est pas ainsi, mais que l'axe de rotation coupe la ligne ou surface génératrice, la partie de celle-ci située au delà de l'axe par rapport au centre de gravité, décrit à fort peu près, dans chaque rotation élémentaire, le volume ou la surface latérale d'un prisme tronqué dont les abscisses x et les ordonnées z, sur la figure de la page 153, sont négatives, ou tracées dans l'angle dièdre opposé par l'arête à $xOyB$. Ces coordonnées x et z se prennent, par suite, négativement, tant dans l'équation $z = x \operatorname{tang} \varphi$ et dans la formule qui relie les abscisses x à celle du centre de gravité considéré G, que dans l'expression analytique $z d\sigma$ ou $z ds$ des éléments d'espace (aires ou volumes) décrits. Donc le même énoncé subsiste, mais à la condition d'y compter soustractivement, c'est-à-dire négativement, les parties de la figure engendrée qui proviennent des parties de la figure génératrice non comprises du même côté de l'axe que son centre de gravité général.

Cette belle proposition est ordinairement appelée *théorème de Guldin*, du nom du P. jésuite qui l'a exposée vers le commencement du XVIIe siècle; mais elle avait été découverte dès l'antiquité, car le géomètre grec Pappus, d'Alexandrie, savait, au IVe siècle de notre ère, l'utiliser dans le calcul des volumes. On s'en sert, tantôt pour obtenir l'expression d'un volume ou d'une surface de révolution, quand on connaît, dans la figure génératrice, la position du centre de gravité, et tantôt, au contraire, ponr déterminer cette position, quand l'expression de la figure engendrée se trouve connue.

312. — Surface et volume du tore ou anneau.

Contentons-nous ici d'en déduire la surface et le volume du *tore*. On appelle ainsi le corps, en forme d'anneau, que décrit un cercle, d'un rayon donné r, en tournant autour d'un axe pris dans son plan, mais extérieur, ou passant à une distance R du centre plus grande

que le rayon r : c'est donc une surface de révolution qui a des cercles non seulement pour parallèles, mais aussi pour méridiens.

Le centre du cercle générateur y est évidemment, tout à la fois, le centre de gravité de sa surface πr^2 et celui de son contour $2\pi r$. D'ailleurs, le chemin qu'il décrit dans une rotation complète est une circonférence ayant pour rayon la distance R de ce centre du cercle générateur à l'axe ou au centre du tore : il a donc pour valeur $2\pi R$. Le volume et la surface du tore égaleront, en conséquence, les deux produits respectifs de πr^2 et de $2\pi r$ par $2\pi R$; ce qui leur donne pour formules $2\pi^2 r^2 R$ et $4\pi^2 r R$.

Il résulte d'une explication précédente (p. 155) que, si l'axe de rotation coupait le cercle générateur, ou si l'on avait $R < r$, les mêmes expressions $2\pi^2 r^2 R$ et $4\pi^2 r R$ conviendraient encore, mais en y comptant négativement le volume ou l'aire qui proviendraient du plus petit des deux segments ou des deux arcs du cercle générateur limités par l'axe.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

RÉDUCTION ET TRANSFORMATION DES INTÉGRALES MULTIPLES; ÉVALUATION APPROXIMATIVE, PAR CES INTÉGRALES, DES RESTES DE CERTAINES SÉRIES; ETC.

313*. — **Réduction des intégrales prises dans tout l'intérieur d'une surface ou d'un volume à d'autres ne se rapportant qu'aux limites de ces étendues, quand une des intégrations s'y effectue immédiatement.**

(Compléments, p. 89*.)

314*. — **De la transformation des intégrales multiples : méthode analytique, exposée sur un exemple, et interprétée géométriquement.**

(Compléments, p. 93*.)

315*. — **Même transformation, opérée d'une manière purement géométrique, quand le champ d'intégration est figurable par une surface ou un volume; exemples.**

(Compléments, p. 98*.)

316*. — **Calcul approché des restes de séries doubles, triples, etc., par des intégrales d'un pareil ordre de multiplicité.**

(Compléments, p. 102*.)

TRENTIÈME LEÇON.

ÉTUDE DIRECTE DES INTÉGRALES DÉFINIES ET PROCÉDÉS SPÉCIAUX DE CALCUL POUR CERTAINES D'ENTRE ELLES.

317. — Différentiation d'une intégrale définie.

Nous n'avons, jusqu'ici, évalué les intégrales définies qu'en supposant connues les intégrales indéfinies ou fonctions primitives dont elles expriment les accroissements dans certains intervalles. Or le sens précis qu'elles offrent, comme sommes d'éléments infiniment petits *d'une forme donnée* $f(x, y, \dots)\,dx\,dy\dots$ occupant ensemble un *champ d'intégration donné,* permet évidemment de s'en faire, avant tout calcul, une idée nette, suffisante pour leur découvrir des propriétés diverses; et l'on conçoit que celles-ci puissent quelquefois conduire jusqu'à l'évaluation complète des intégrales sans passer par les fonctions primitives. La Leçon actuelle aura justement pour objet une exposition succincte des principaux procédés servant à cet effet.

Il est clair, par exemple, que, si la fonction f placée sous les signes $\int\int$, et y multipliant le produit $dx\,dy\dots$ des différentielles des variables $x, y, \dots$ d'intégration, dépend non seulement de ces variables, mais encore d'un paramètre c, l'intégrale, elle aussi, dépendra généralement, comme tous ses éléments $f(x, y, \dots)\,dx\,dy\dots$, du paramètre c. Or faisons croître ce paramètre d'une très petite quantité Δc, mais admettons d'abord que le champ de l'intégrale, déterminé par ses limites, reste le même; ce qui permettra de conserver à tous les éléments, sans en introduire ni en abandonner aucun, leur champ primitif, tant sous le rapport de *l'étendue* $dx\,dy\dots$ que sous celui de la *situation,* définie par les valeurs correspondantes de $x, y, \dots$.

Chaque élément $f(x, y, \dots, c)\,dx\,dy\dots$ croîtra, sauf erreur relative négligeable, de $\left[\frac{df(x, y, \dots, c)}{dc}\,\Delta c\right] dx\,dy\dots$, et, vu la constance du facteur Δc pour tous les éléments, l'accroissement de leur somme sera, de même, c'est-à-dire avec une erreur relative analogue, $(\Delta c)\int\int\dots\frac{df(x, y, \dots, c)}{dc}\,dx\,dy\dots$, expression où les intégrations

indiquées $\int\int\ldots$ auront évidemment les mêmes limites que dans l'intégrale proposée. Divisons cet accroissement de l'intégrale par celui, Δc, de la variable indépendante corrélative c, puis faisons tendre Δc vers zéro, et il viendra, pour la dérivée de l'intégrale par rapport à c, l'expression $\int\int\ldots\frac{df(x,y,\ldots,c)}{dc}\,dx\,dy\ldots$. D'où ce théorème, connu déjà de Leibnitz, que *la dérivée, par rapport à un paramètre, de toute intégrale définie à champ invariable, mais où la fonction sous les signes* $\int$ (*supposée d'ailleurs finie et continue*) *dépend de ce paramètre, s'obtient par une différentiation sous les signes* $\int$, *c'est-à-dire en y substituant simplement à la fonction sa dérivée relative au paramètre dont il s'agit.* Ainsi la dérivée de l'intégrale s'exprimera, sans qu'on ait aucune intégration préalable à effectuer, au moyen d'une nouvelle intégrale.

Mais supposons maintenant les limites de l'intégrale proposée variables en même temps que la fonction f placée sous les signes $\int$. Alors on pourra, soit garder les éléments $f(x,y,\ldots,c)\,dx\,dy\ldots$ toujours en même nombre, en faisant varier convenablement la situation $(x,y,\ldots)$ et la grandeur $dx\,dy\ldots$ de leurs champs respectifs, soit, au contraire, ce qui est généralement préférable, laisser aux divers éléments $f(x,y,\ldots,c)\,dx\,dy\ldots$ un champ invariable, ou y faire changer uniquement c, mais, alors, ajouter des éléments nouveaux dans toute l'étendue, contiguë à certaines limites, gagnée d'un instant à l'autre par le champ de l'intégrale, et supprimer d'autre part ceux dont le champ, contigu à d'autres limites, est perdu ou abandonné par elle. Un changement infiniment petit de l'intégrale se composera donc d'une première partie, dite *entre les limites,* donnée par la différentiation sous les signes $\int$, et à laquelle il se réduirait si les limites restaient les mêmes, plus une seconde partie, dite *aux limites,* formée par l'excédent des éléments *gagnés* sur les éléments *perdus*, ou provenant du déplacement infiniment petit des limites du champ.

Pour avoir plus de précision relativement à cette dernière partie, bornons-nous au cas d'une intégrale simple, que nous écrirons $\int_a^b f(x,c)\,dx$. Faisons-y varier c de dc, a de da et b de db, en sorte qu'elle devienne $\int_{a+da}^{b+db} f(x,c+dc)\,dx$. Le nouveau champ, s'étendant depuis $x=a+da$ jusqu'à $x=b+db$, a évidemment gagné db du côté de la limite supérieure et perdu da du côté de la limite inférieure. Comme la fonction sous le signe $\int$ diffère infiniment peu de $f(b,c)$ près de la première de ces limites et de $f(a,c)$ près de la seconde,

l'élément gagné sera $f(b, c)\,db$, l'élément perdu, $f(a, c)\,da$, et l'excédent de l'un sur l'autre, à joindre à l'accroissement $(dc)\int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx$ calculé dans l'hypothèse de limites invariables, donnera, en somme, comme *différentielle totale* de l'intégrale définie,

$$(1) \qquad d\int_a^b f(x,c)\,dx = f(b,c)\,db - f(a,c)\,da + dc\int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx.$$

On le voit encore en faisant, dans $\int_{a+da}^{b+db} f(x, c+dc)\,dx$, varier x, d'abord, de la limite inférieure $a+da$ à a, puis de a à b et, enfin, de b à la limite supérieure $b+db$. Cette intégrale se trouve être ainsi la somme de trois autres, dont la première, $\int_{a+da}^{a} f(x, c+dc)\,dx$, peut évidemment être remplacée par $\int_{a+da}^{a} f(a,c)\,dx = -f(a,c)\,da$, dont la seconde, $\int_a^b f(x, c+dc)\,dx$, dépasse l'intégrale primitive $\int_a^b f(x,c)\,dx$, de $\int_a^b \left(\frac{df(x,c)}{dc}\,dc\right)dx = dc\int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx$, et dont, enfin, la troisième, $\int_b^{b+db} f(x, c+dc)\,dx$, analogue à la première, est réductible à $\int_b^{b+db} f(b,c)\,dx = f(b,c)\,db$. Par suite, l'excédent $d\int_a^b f(x,c)\,dx$, sur $\int_a^b f(x,c)\,dx$, de la somme de ces trois intégrales, conduit bien à la formule (1).

Les deux termes du second membre de (1) relatifs aux limites, savoir $f(b,c)\,db$ et $-f(a,c)\,da$, peuvent d'ailleurs, en adoptant une notation qui nous est familière pour désigner la différence des deux valeurs d'une expression à deux limites, s'écrire ensemble $[f(x,c)\,dx]_{x=a}^{x=b}$, ou même, sous une forme plus condensée, $[f(x,c)\,dx]_a^b$. Ainsi, la formule (1) sera encore

$$(2) \qquad d\int_a^b f(x,c)\,dx = [f(x,c)\,dx]_a^b + dc\int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx.$$

Imaginons que a et b, de même que tous les paramètres pouvant figurer dans $f(x,c)$, dépendent de c : nous obtiendrons la *dérivée complète* de l'intégrale en divisant par dc chaque terme du second

membre de (2) ou de (1). Il vient donc pour cette dérivée complète, si b' et a' désignent les dérivées de b et a par rapport à c,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dc}\int_a^b f(x,c)\,dx &= \left[f(x,c)\frac{dx}{dc}\right]_a^b + \int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx \\ &= f(b,c)b' - f(a,c)a' + \int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Dans le cas particulier où les limites a, b deviennent constantes, la dérivée de l'intégrale s'obtient bien, comme il était évident, par la simple différentiation de $f(x,c)$ sous le signe $\int$.

318. — Évaluation de certaines intégrales définies, par la différentiation d'autres intégrales sous les signes $\int$.

Supposons qu'on ait obtenu, soit par le procédé ordinaire, qui consiste à calculer d'abord l'intégrale indéfinie et à évaluer son accroissement entre les deux limites, soit par l'une quelconque des méthodes spéciales dont il sera bientôt question, la valeur d'intégrales définies de l'une des deux formes $\int_a^b f(x,c)\,dx$, $\int_a^x f(x,c)\,dx$, c'est-à-dire ayant ou leurs deux limites constantes ou une limite, x, variable, mais indépendante du paramètre c. Nous désignerons respectivement par $\varphi(c)$ et par $F(x,c)$ leurs valeurs, fonctions de c seulement dans le premier cas, de x et de c dans le second. Posant ainsi les égalités

$$(4)\qquad \int_a^b f(x,c)\,dx = \varphi(c), \qquad \int_a^x f(x,c)\,dx = F(x,c),$$

différentions les deux membres de chacune par rapport à c, et il viendra

$$(5)\qquad \int_a^b f'_c(x,c)\,dx = \varphi'(c), \qquad \int_a^x f'_c(x,c)\,dx = F'_c(x,c).$$

On aura donc, sans aucune intégration nouvelle, mais par la simple différentiation, en c, de $\varphi(c)$ ou de $F(x,c)$, les deux intégrales constituant les premiers membres de (5). La seconde possède, comme celle dont on l'a déduite, la même généralité qu'une intégrale indéfinie, à une constante arbitraire près, puisque la limite supérieure, x, y est variable. Quant à la première, prise entre des limites constantes, il arrivera souvent qu'elle se trouvera ainsi évaluée dans des cas où il serait impossible d'avoir sous forme finie la fonction primitive

$\int f'_c(x,c)\,dx$; car l'intégrale $\int_a^b f(x,c)\,dx$, d'où l'on est parti pour l'obtenir, peut avoir été calculée par l'un des procédés spéciaux que l'on verra ci-après et qui, applicables seulement pour certaines valeurs des limites, ne supposent pas que l'on connaisse ni même que l'on puisse connaître exactement l'intégrale indéfinie $\int f(x,c)\,dx$.

Bornons-nous, en ce moment, à deux exemples simples de la seconde catégorie, savoir, ceux auxquels conduisent les deux intégrales, immédiatement calculables,

$$(6)\qquad \int_0^x e^{-cx}\,dx = \frac{1-e^{-cx}}{c}, \qquad \int_0^x \frac{dx}{c+x^2} = \frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{c}},$$

où nous supposerons c positif.

Comme on a, ici, $f(x,c) =$ soit e^{-cx}, soit $(c+x^2)^{-1}$, il vient, par un nombre quelconque n de différentiations successives en c,

$$\frac{d^n f(x,c)}{dc^n} = \text{soit } (-1)^n x^n e^{-cx}, \quad \text{soit } (-1)^n (1.2.3\ldots n)(c+x^2)^{-(n+1)}.$$

Donc les relations (6) différentiées n fois en c, puis divisées respectivement, la première par $(-1)^n$, la seconde par $(-1)^n(1.2.3\ldots n)$, donneront

$$(7)\ (\text{pour } n>0)\ \begin{cases} \displaystyle\int_0^x x^n e^{-cx}\,dx = (-1)^n \frac{d^n}{dc^n}\left(\frac{1-e^{-cx}}{c}\right), \\ \displaystyle\int_0^x \frac{dx}{(c+x^2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n}{dc^n}\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{c}}\right). \end{cases}$$

Ainsi il ne restera, pour avoir sous forme finie $\int x^n e^{-x}\,dx$ et $\int (c+x^2)^{-(n+1)}\,dx$, qu'à effectuer dans les seconds membres, expressions les plus concises possibles de ces intégrales, les faciles quoique laborieuses différentiations, par rapport à c, qui s'y trouvent indiquées. Ces différentiations se simplifieront d'ailleurs beaucoup si la limite supérieure x devient infinie positive; car, alors, e^{-cx} s'annulant et $\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{c}}$ devenant $\frac{\pi}{2}$, les deux expressions à différentier n fois seront $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{\pi}{2}$, ou c^{-1} et $\frac{\pi}{2}c^{-\frac{1}{2}}$, quantités ayant pour dérivées $n^{\text{ièmes}}$, respectivement,

$$(-1)^n(1.2.3\ldots n)c^{-(n+1)} \quad \text{et} \quad (-1)^n\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\,c^{-\frac{2n+1}{2}}.$$

Il viendra donc

$$(8)\qquad (\text{pour } n>0)\left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty x^n e^{-cx}\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{c^{n+1}},\\ &\int_0^\infty \frac{dx}{(c+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{\pi}{2c^n\sqrt{c}}.\end{aligned}\right.$$

319*. — Des difficultés que présente la différentiation de certaines intégrales définies.

(Compléments, p. 111*.)

320. — Intégration sous le signe $\int$; application au calcul de $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx$.

Mais passons aux procédés qui permettent d'obtenir immédiatement certaines intégrales définies dans des cas où l'intégrale indéfinie correspondante n'est pas calculable sous forme finie. Les deux plus importants se rattachent à la théorie des intégrales doubles.

Je parlerai d'abord de celui qu'on a appelé *intégration sous le signe* $\int$. Il est basé sur la propriété qu'ont les intégrales multiples à limites *constantes* de conserver leur valeur quand on y intervertit l'ordre des intégrations, pourvu du moins qu'une certaine vue directe de l'ensemble des éléments, supposée dans la démonstration (p. 147), soit possible : circonstance exigeant un champ d'intégration bien déterminé et une fonction sous le signe $\int$ finie dans toute l'étendue de ce champ. On y considère, ordinairement, une intégrale double où les intégrations peuvent se faire complètement quand on les effectue dans un certain ordre, tandis qu'une seule des deux aboutit lorsqu'on change cet ordre. Il vient ainsi deux expressions égales, dont l'une est une intégrale définie simple, tandis que l'autre est sa valeur sous forme finie.

Prenons, par exemple, comme point de départ, l'intégrale, évaluée plus haut (p. 68) et où a désigne une quantité *positive* quelconque,

$$(14)\qquad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\quad (\text{pour } a>0).$$

Le champ en sera bien circonscrit, conformément à l'hypothèse énoncée, si nous y supposons mentalement la limite supérieure ∞ remplacée, jusqu'à la fin des calculs, par une très grande quantité *fixe*, suffisante pour que le second membre de (14) exprime l'inté-

grale avec une erreur insensible, finalement évanouissante dans les résultats à obtenir. Cela posé, regardons b comme une variable et, après avoir multiplié par db les deux membres de (14), intégrons-les, par rapport à b, entre les deux limites *finies* o, b. Nous aurons

$$(15)\quad \int_0^b db \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \int_0^b \frac{a\,db}{a^2+b^2} = \left(\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\right)_{b=0}^{b=b} = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}.$$

On voit que les deux intégrations indiquées dans l'intégrale double $\int_0^b db \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ ont pu se faire complètement en commençant par celle qui est relative à x. Or une seule s'effectue quand on change cet ordre; car, si l'on commence par l'intégration relative à b, il vient successivement

$$\int_0^\infty dx \int_0^b e^{-ax}(\cos xb)\,db = \int_0^\infty dx(e^{-ax})\left(\frac{\sin xb}{x}\right)_{b=0}^{b=b} = \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx,$$

relation où le dernier membre n'est plus réductible par les méthodes connues. Ainsi l'intégration en b, seule, a pu se faire; et c'est justement parce qu'on l'a effectuée sur $e^{-ax}\cos bx\,db$, c'est-à-dire (à part le facteur db), sur la fonction $e^{-ax}\cos bx$ placée primitivement sous le signe $\int_0^\infty$ d'intégration par rapport à x, que ce procédé prend le nom d'*intégration sous le signe* $\int$.

On aura donc, en égalant les deux expressions obtenues pour l'intégrale double,

$$(16)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\quad (\text{pour } a > 0);$$

et la différentielle $e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx$ se trouvera intégrée entre les limites o et ∞, tandis qu'elle ne pourrait l'être, dans un autre intervalle, que sous une forme non finie, comme, par exemple, en série, au moyen du développement de $\sin bx = bx - \frac{b^3x^3}{1.2.3} + \cdots$, suivi de l'emploi, pour les divers termes, de la première formule (7) [p. 162].

321*. — Calcul et propriétés de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$.

(Compléments, p. 118*.)

322. — Intégration par décomposition d'une intégrale double en produits d'intégrales simples.

Le second procédé de calcul de certaines intégrales simples au moyen d'intégrales doubles consiste à décomposer une intégrale double, dont on puisse connaître d'autre part la valeur, en facteurs qui soient des intégrales simples, ou en plusieurs termes formés, chacun, de pareils facteurs. On obtient ainsi, entre ces facteurs, des relations finies, qui servent à les évaluer.

Considérons, par exemple, une intégrale double, de la forme $\int_a^b dx \int_m^n \varphi(x)\psi(y)\,dy$, c'est-à-dire dont les limites soient constantes et où la fonction sous les signes $\int$ égale le produit de deux facteurs ne contenant, chacun, qu'une seule des deux variables x, y. Le facteur $\varphi(x)$ sera invariable pendant l'intégration relative à y, qui donnera comme résultat $\varphi(x)\int_m^n \psi(y)\,dy$. Par suite, $\int_m^n \psi(y)\,dy$ étant désormais et à son tour, dans ce résultat, un certain facteur constant, on pourra, en intégrant par rapport à x, le faire sortir du signe $\int_a^b$; et l'on aura finalement

$$(18)\qquad \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=m}^{y=n} \varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy = \left[\int_a^b \varphi(x)\,dx\right]\left[\int_m^n \psi(y)\,dy\right].$$

Si donc on parvient, par une voie quelconque, à calculer l'intégrale double, la formule (18) sera une relation de forme finie entre les deux intégrales simples $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, $\int_m^n \psi(y)\,dy$; et elle pourra servir à les déterminer.

Mais il faut, pour cela, transformer l'intégrale double au moyen d'un changement de variables; car, tant qu'on y laissera paraître x et y, ou tant que les intégrations devront se faire par rapport à x et à y, elles porteront inévitablement, comme le montre (18), sur les différentielles $\varphi(x)\,dx$ et $\psi(y)\,dy$; ce qu'il s'agit précisément d'éviter. Voyons donc, sur quelques exemples, comment s'effectueront de telles transformations.

323. — Premier exemple : intégrale de Poisson.

Le plus simple et le plus usuel de ces exemples est relatif à l'inté-

grale, *dite de Poisson* [1], $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, évidemment positive comme tous ses éléments, et rendue bien déterminée par le décroissement de la fonction e^{-x^2}, infiniment plus accusé, quand x grandit beaucoup, que celui de l'inverse d'une puissance quelconque, même très élevée, de x^2.

Écrivons cette intégrale, en y introduisant une autre variable y au lieu de x, $\int_0^\infty e^{-y^2}dy$; puis, formons-en le carré, par la multiplication de $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ et de $\int_0^\infty e^{-y^2}dy$, après avoir, pour fixer les idées, remplacé provisoirement par un nombre très grand K les limites supérieures infinies. Ce carré sera très sensiblement, d'après (18), l'intégrale double, à champ bien circonscrit,

$$\int_0^K \left(e^{-x^2}\int_0^K e^{-y^2}dy\right)dx.$$

Pour en faciliter, comme on verra, la transformation, supprimons tous les éléments compris de $x = 0$ à $x =$ une très petite quantité ε, éléments ayant en tout une somme $\int_0^\varepsilon \left(e^{-x^2}\int_0^K e^{-y^2}dy\right)dx$ de l'ordre de $\varepsilon \int_0^K e^{-y^2}dy$, c'est-à-dire insignifiante; et, de plus, remplaçons-y K, au haut du signe $\int$ entre parenthèses, par la limite supérieure plus grande $K\frac{x}{\varepsilon}$, ou écrivons-la $\int_\varepsilon^K \left(e^{-x^2}\int_0^{K\frac{x}{\varepsilon}} e^{-y^2}dy\right)dx$, ce qui revient à introduire dans le facteur $\int_0^K e^{-y^2}dy$ de nouveaux éléments, d'une somme totale $\int_K^{K\frac{x}{\varepsilon}} e^{-y^2}dy$ négligeable. L'intégrale double à évaluer étant ainsi $\int_\varepsilon^K dx \int_0^{K\frac{x}{\varepsilon}} e^{-(x^2+y^2)}dy$, prenons-y, comme nouvelle variable u de l'intégration en y pendant laquelle x (compris entre ε et K) ne change pas, le rapport $\frac{y}{x}$, croissant de zéro à $\frac{K}{\varepsilon}$ pen-

(1) A cause d'une démonstration élégante qu'en a donnée ce géomètre (pp. 101*, 102* et 121*); mais le calcul en avait été fait antérieurement par Laplace et même par Euler.

dant que y va de zéro à $K\frac{x}{\varepsilon}$. Il faudra donc remplacer y par xu, dy par $x\,du$, et les deux limites o, $K\frac{x}{\varepsilon}$, respectivement, par o, $\frac{K}{\varepsilon}$. Il vient l'intégrale double, à limites constantes bien définies,

$$\int_\varepsilon^K dx \int_0^{\frac{K}{\varepsilon}} e^{-x^2(1+u^2)}\,x\,du,$$

que l'on peut évidemment écrire, en y changeant l'ordre des intégrations,

$$\int_0^{\frac{K}{\varepsilon}} du \int_\varepsilon^K e^{-(1+u^2)x^2}\,x\,dx.$$

En résumé, celle-ci exprime donc le carré de $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$, avec une approximation indéfinie, pourvu qu'on y prenne ε assez petit et K assez grand; de sorte que, si l'on pose finalement $\varepsilon = 0$ et $K = \infty$, il vient

$$(19)\qquad \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^\infty du \int_0^\infty e^{-(1+u^2)x^2}\,x\,dx.$$

Or, grâce au facteur x qu'a introduit la substitution de $x\,du$ à dy, les intégrations indiquées au second membre de (19) aboutissent. On a, en effet, $e^{-(1+u^2)x^2}x\,dx = \frac{d}{dx}\,\frac{-e^{-(1+u^2)x^2}}{2(1+u^2)}$ et, par suite,

$$\int_0^\infty e^{-(1+u^2)x^2}\,x\,dx = \left[\frac{-e^{-(1+u^2)x^2}}{2(1+u^2)}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{2(1+u^2)};$$

d'où il résulte, pour le second membre de (19), la valeur

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tang} u)_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

Enfin, l'extraction de la racine carrée positive des deux membres donne la formule cherchée de l'intégrale de Poisson :

$$(20)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On double la valeur de cette intégrale en y remplaçant la limite zéro par $-\infty$; car, la fonction e^{-x^2} étant *paire,* c'est-à-dire ne changeant pas de signe quand x en change, l'élément $e^{-(a+dx)^2}dx$, qui a son champ dx compris entre deux valeurs négatives et se suivant,

$-(a+dx)$, $-a$, de x, d'ailleurs quelconques, peut être regardé, sauf erreur négligeable, comme la répétition de l'élément $e^{-a^2}dx$ dont le champ égal dx se trouve compris entre les valeurs positives correspondantes a et $a+dx$ de la variable. La formule (20) équivaut donc à celle-ci,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{21}$$

Une remarque analogue s'appliquerait évidemment à toute intégrale de la forme $\int_0^m f(x)\,dx$ ayant sous le signe $\int$ une fonction $f(x)$ *paire,* tandis que, dans le cas contraire d'une fonction $f(x)$ *impaire*, ou qui change de signe avec x, les éléments à champ d'intégration compris entre les valeurs négatives de la variable neutralisent, au lieu de les doubler, les éléments correspondant à ses valeurs positives. Ainsi, l'on aura, en général :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si } f(-x) = f(x), \\ \displaystyle\int_{-m}^{0} f(x)\,dx = \int_0^m f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}\int_{-m}^{m} f(x)\,dx\,; \\ \text{si } f(-x) = -f(x), \\ \displaystyle\int_{-m}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^m f(x)\,dx, \quad \text{ou} \quad \int_{-m}^{m} f(x)\,dx = 0. \end{array}\right. \tag{22}$$

324*. — Application de l'intégrale de Poisson au calcul de certaines valeurs de la fonction Γ.

(Compléments, p. 121*.)

325*. — Deuxième exemple : évaluation des intégrales eulériennes de première espèce, ou à deux paramètres, en fonction de celles de seconde espèce Γ.

(Compléments, p. 122*.)

326*. — Troisième exemple : intégrales $\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2\,dx$ **et** $\int_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2\,dx$.

(Compléments, p. 124*.)

327*. — **Application aux intégrales de la diffraction $\int_0^\infty \cos bx^2\,dx$ et $\int_0^\infty \sin bx^2\,dx$.**

(Compléments, p. 126*.)

328*. — **Calcul de certaines intégrales définies par introduction d'un paramètre, suivie d'opérations diverses sur les résultats : application à $\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{coh} 2\alpha x\,dx$ et à $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x\,dx$.**

(Compléments, p. 128*.)

329*. — **Réflexion sur les transformations d'intégrales peu convergentes et sur l'introduction provisoire de facteurs exponentiels décroissants, destinée à y garantir l'exactitude des résultats.**

(Compléments, p. 131*.)

330*. — **Calcul, par le même procédé, de $\int_0^\infty \cos x^2 \cos 2\alpha x\,dx$ et de $\int_0^\infty \sin x^2 \cos 2\alpha x\,dx$.**

(Compléments, p. 132*.)

331*. — **Intégrales déduites d'autres par l'attribution, à certains paramètres, de valeurs imaginaires.**

(Compléments, p. 134*.)

332*. — **Calcul de certaines intégrales par le moyen d'équations différentielles qu'elles vérifient.**

(Compléments, p. 136*.)

TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

*EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES ET USAGE DE CES EXPRESSIONS.

333*. — **Premier exemple d'une expression asymptotique d'intégrale définie : cas de la fonction Γ, ou formule de Stirling.**

(Compléments, p. 138*.)

334*. — **Expression indéfiniment approchée (sous forme de produit) qui résulte, pour toutes les valeurs de $\Gamma(n)$, de la forme asymptotique de cette fonction.**

(Compléments, p. 141*.)

335*. — **Deuxième exemple : expressions asymptotiques de** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{\text{coh}^n x}$

et de $\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x)\,dx}{\text{coh}^n x}$.

(Compléments, p. 145*.)

336*. — **Développement en série, grâce à ces expressions asymptotiques, des intégrales de la forme** $\int\frac{f(x)\,dx}{\text{coh}^n x}$, **quand** $f(x)$ **est une fonction proportionnelle à sa dérivée seconde.**

(Compléments, p. 147*.)

337*. — **Troisième exemple : expressions asymptotiques de** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(r\cos x)\,dx$ **et de** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos(r\cos x)\,dx$, **où** r **désigne un paramètre qui grandit sans limite.**

(Compléments, p. 152*.)

338*. **Du calcul approché des intégrales** $\int_0^u e^{-x^2}\,dx$, $\int_0^u \cos x^2\,dx$, $\int_0^u \sin x^2\,dx$, **quand elles diffèrent modérément de ce qu'elles sont pour** u **infini.**

(Compléments, p. 155*.)

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

* SUITE DES CALCULS D'EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES D'INTÉGRALES DÉFINIES : SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

339*. — **Autre exemple : développement d'une fonction périodique finie quelconque suivant les cosinus et sinus affectés de la même périodicité : intégrale définie dont cette fonction représente l'expression asymptotique.**

(Compléments, p. 159*.)

340*. — **Démonstration de la série de Fourier, ou série trigonométrique principale, par le calcul de l'expression asymptotique d'intégrale qui la résume.**

(Compléments, p. 164*.)

341*. — **Séries trigonométriques dérivées de celle de Fourier et procédant, les unes, suivant les sinus, les autres, suivant les cosinus des multiples ou quelconques, ou impairs, d'un arc.**

(Compléments, p. 167*.)

342*. — **Formule de Fourier, permettant de donner à une fonction arbitraire la forme d'une intégrale double à élément trigonométrique.**

(Compléments, p. 168*.)

343*. — **Exemples : développement de quelques fonctions simples, entre les limites zéro et π, en séries procédant suivant les sinus ou les cosinus des multiples de la variable ; remarque sur les séries trigonométriques non susceptibles d'être différentiées; sommation de séries numériques importantes.**

(Compléments, p. 170*.)

344*. — Des séries trigonométriques, doubles ou triples, que donne le développement des fonctions de point dans un espace à deux ou trois dimensions constantes, et des intégrales soit quadruples, soit sextuples, auxquelles conduit alors la formule de Fourier, quand cet espace est indéfini en tous sens.

(Compléments, p. 174*.)

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

*DE L'EMPLOI DES INTÉGRALES DÉFINIES, POUR EXPRIMER DES FONCTIONS ÉCHAPPANT GÉNÉRALEMENT AUX AUTRES MODES DE REPRÉSENTATION FOURNIS PAR L'ANALYSE : INTÉGRALES POURVUES, SOUS LES SIGNES $\int$, DE FONCTIONS ARBITRAIRES, ET DONT LES DÉRIVÉES ONT DES FORMES SIMPLES.

345*. — **De la représentation des fonctions par les intégrales définies; sur certains types d'intégrales faciles à différentier, et ayant sous les signes $\int$ des fonctions arbitraires.**

(Compléments, p. 176*.)

346*. — **Premier type : intégrales de la forme** $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$

et de la forme plus générale $\int_0^\infty F\left(\frac{\alpha^2}{2}, \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha.$

(Compléments, p. 178*.)

347*. — **Cas particulier d'intégrales se reproduisant par différentiation; calcul de** $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\frac{t^2}{\alpha^2}\right)}d\alpha.$

(Compléments, p. 181*.)

348*. — **Propriétés qu'acquiert le premier type, quand on y introduit comme paramètre, au lieu de t, l'une quelconque de ses puissances.**

(Compléments, p. 183*.)

349*. — **Emploi de ce type pour former des fonctions de point dont le paramètre différentiel Δ_2 soit d'un calcul facile.**

(Compléments, p. 186*.)

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

*SUITE DE L'EMPLOI DES INTÉGRALES DÉFINIES, POUR EXPRIMER CERTAINES FONCTIONS : THÉORIE GÉNÉRALE DES POTENTIELS; POTENTIELS SPHÉRIQUES.

350*. — **Second type : des potentiels; leur définition générale.**

(Compléments, p. 190*.)

351*. — **Calcul de leurs dérivées par rapport aux coordonnées du point potentié.**

(Compléments, p. 192*.)

352*. — **Du potentiel sphérique ou potentiel à quatre variables.**

(Compléments, p. 195*.)

353*. — **Autre potentiel, analogue au potentiel sphérique, mais applicable dans des espaces ayant, à volonté, une, deux ou trois dimensions.**

(Compléments, p. 198*.)

354* — **Paramètre différentiel, d'un ordre pair quelconque, d'une fonction de point, et puissances paires quelconques de son paramètre différentiel du premier ordre.**

(Compléments, p. 202*.)

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

*SUITE DE LA THÉORIE DES POTENTIELS : ÉTUDE SPÉCIALE DE CEUX DANS LESQUELS L'INTÉGRATION S'ÉTEND A TOUTE LA MASSE POTENTIANTE.

355*. — **Des potentiels où l'intégration s'étend à toute la masse potentiante; cas où l'on peut les différentier sous les signes $\int$, soit exactement, soit avec addition d'un terme simplement proportionnel à la densité de cette masse au point potentié.**

(Compléments, p. 208*.)

356*. — **Potentiels inverse et direct à trois variables; des fonctions qu'ils sont propres à exprimer.**

(Compléments, p. 213*.)

357*. — **Rapports des potentiels tant inverse que direct, et d'autres analogues, avec le potentiel sphérique; potentiels logarithmiques à deux variables et leur usage.**

(Compléments, p. 217*.)

358*. — **Potentiel inverse, et potentiels logarithmiques à trois variables d'une couche plane infiniment mince.**

(Compléments, p. 222*.)

TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES : THÉORIE DE L'ÉQUATION DU PREMIER ORDRE

359. — Des équations différentielles : importance de leur rôle dans l'expression analytique des phénomènes.

Revenons maintenant à l'étude d'une fonction quelconque y d'une variable x, pour chercher jusqu'à quel point se trouve déterminée et comment peut s'obtenir la suite de ses valeurs, quand on donne sa dérivée première y', ou seulement quelqu'une, $y^{(n)}$, de ses dérivées suivantes y'', y''', ..., en fonction non pas de sa variable indépendante x seule, comme nous l'admettions jusqu'ici, mais plutôt de sa valeur actuelle y, ou de celles des dérivées successives y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, d'ordres moins élevés que $y^{(n)}$, ou, enfin, de toutes ces quantités à la fois, x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$. Alors la relation définissant $y^{(n)}$, et qui contient, dans le cas le plus général, x, y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$, s'appelle une *équation différentielle :* son *ordre* est l'ordre même, n, de la dérivée la plus élevée qui y figure. Nous la supposerons, d'ordinaire, résolue par rapport à cette dérivée la plus élevée $y^{(n)}$, ce que l'on pourra toujours regarder comme fait quand elle sera du premier degré en $y^{(n)}$; et nous admettrons que, mise ainsi sous la forme $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, elle ne fournisse, pour chaque système, à considérer, de valeurs de x, y, y', ..., $y^{(n-1)}$, qu'une valeur de $y^{(n)}$. Mais, quelquefois aussi, elle se trouvera *implicite,* c'est-à-dire non résolue par rapport à $y^{(n)}$: si elle est cependant algébrique en $y^{(n)}$, le degré le plus élevé auquel $y^{(n)}$ y figurera sera dit le *degré de l'équation.* Quoi qu'il en soit, algébrique ou transcendante, elle se décomposera, par sa résolution (générale ou seulement numérique), relative à $y^{(n)}$, en autant d'équations différentielles, de la forme $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, qu'elle admettra de racines réelles. Dans tous les cas, *intégrer l'équation,* ce sera exprimer ou calculer les fonctions y qui la vérifient.

On peut dès à présent entrevoir, par la réflexion qui a terminé le

n° 213 (p. 2), l'intérêt capital que présentent ces sortes d'équations dans l'étude des phénomènes naturels.

Pour ne parler que des faits innombrables où le temps t intervient en qualité de variable indépendante, et qualifiés de *dynamiques* (par opposition à ceux d'*équilibre* ou de *permanence*, tout spéciaux, dits *statiques*), comme sont les transformations successives des corps et surtout leurs simples mouvements, ou changements de situation de leurs particules, auxquels semblent liés leurs autres changements d'état, il serait impossible d'en prendre une connaissance tant soit peu exacte sans recourir aux équations différentielles. En effet, d'après les lois physiques, c'est toujours de la manière d'être actuelle du système matériel ou ensemble de particules dont on veut étudier les transformations, que dépendent les changements éprouvés par cette manière d'être durant un instant infiniment petit dt.

Plus précisément, la rapidité de variation de l'état de la matière, rapidité que définissent les dérivées premières en t des quantités le représentant, se règle d'après les valeurs actuelles de ces quantités; et l'on peut dire que *la dérivée de l'état actuel est directement fonction non pas de la variable indépendante t, mais de l'état actuel lui-même*. Par exemple, la température d'un corps chauffé décroît d'autant plus vite que sa valeur actuelle excède davantage celle du milieu environnant; la vitesse d'un projectile, à travers un fluide (comme l'air) assez peu résistant pour ne l'amortir qu'au bout d'un temps très long, diminue avec une lenteur croissante à mesure qu'elle devient elle-même plus faible; un ressort tendu qui se débande, produit, pendant des instants infiniment petits successifs dt, sur le corps qu'il entraîne, des accroissements de vitesse constamment proportionnels à son degré présent d'extension ou de contraction; etc. Bref, les changements infiniment petits qui surviennent, d'un instant à l'autre, dans un système de corps, dépendent toujours de l'état actuel du système; et c'est bien en fonction des quantités mêmes définissant cet état, que sera donnée leur dérivée par rapport au temps, variable indépendante souvent unique, mais toujours principale, dans les questions dynamiques.

Ainsi les lois physiques s'expriment mathématiquement par des équations différentielles; d'où il suit que la théorie de ces équations doit servir de base à toute étude analytique des phénomènes naturels.

360. — Équation différentielle du premier ordre : existence de l'intégrale générale et possibilité d'intégrales ou solutions singulières.

Bornons-nous, dans cette Leçon, à l'équation du premier ordre et supposons-la même, d'abord, explicite, c'est-à-dire de la forme

$$(1) \qquad y' = f(x, y) \quad \text{ou} \quad dy - f(x, y)\,dx = 0,$$

f étant une fonction connue des deux variables x et y. Pour fixer les idées, nous regarderons la variable indépendante x comme une abscisse, et sa fonction y comme l'ordonnée correspondante d'une courbe plane.

Dans le cas le plus simple, une telle équation différentielle se réduit à $y' = f(x)$, ou à $dy = f(x)\,dx$; elle signifie que y, ayant pour dérivée $f(x)$, est la fonction primitive indéfinie $\int f(x)\,dx$. Et une discussion faite, pour ce cas, dès le début du Calcul intégral (p. 3), nous a montré qu'une pareille équation détermine seulement, à chaque instant ou pour chaque valeur de x, la direction de la courbe cherchée, en sorte qu'elle permet d'obtenir la fonction y, de proche en proche, après qu'on s'est donné *arbitrairement* une première ordonnée y_0, dite *valeur initiale* de y et correspondant à l'abscisse x_0 choisie comme valeur initiale de la variable. Or il en sera évidemment de même dans le cas de l'équation plus générale (1) : car celle-ci détermine encore uniquement, pour chaque point (x, y) du plan, la pente y' qu'y a la ligne cherchée, si elle y passe ; et elle permet ainsi à un point mobile (x, y), quelle qu'ait été sa situation initiale (x_0, y_0), de décrire, en prenant sans cesse (sur une longueur infiniment petite) la direction indiquée, une courbe partout conforme à l'équation (1), avec des abscisses x s'éloignant peu à peu, sans limite, de l'abscisse primitive x_0, tant du moins que le point mobile (x, y) reste dans les régions du plan où la valeur $f(x, y)$ de y' ne devient ni infinie, ni imaginaire. Seulement, la *pente* y' du chemin suivi dépend maintenant de y, et non plus uniquement de l'abscisse x. Par suite, les diverses courbes correspondant, pour $x = x_0$, à diverses ordonnées initiales y_0, n'auront plus les mêmes directions, pour chaque valeur de x, et représenteront des fonctions y différant entre elles tout autrement que par une constante arbitraire.

Donc, quelle que soit l'équation différentielle (1), il existe toujours une fonction y, de x, qui la vérifie et qui, de plus, pour $x = x_0$, peut recevoir telle valeur, y_0, que l'on veut, du moins entre les limites où l'expression $f(x, y)$ de y' est réelle et finie. Si l'on désigne par F une certaine fonction de deux variables, cette quantité y pourra s'écrire

$y = F(x, y_0)$, puisqu'elle dépend à la fois de la valeur initiale y_0 et de l'abscisse variable x. On l'appelle l'*intégrale générale* de l'équation proposée (1). On voit qu'elle représente une *famille* de courbes ayant pour équation différentielle (t. I, p. 124) la relation donnée, $y' = f(x, y)$, pour paramètre y_0, et pour champ les régions du plan où la fonction $f(x, y)$ admet des valeurs réelles.

L'intégrale générale $y = F(x, y_0)$ est-elle la seule solution que comporte l'équation (1) ? En d'autres termes, toute fonction, Y par exemple, qui, pour $x = x_0$, se réduit à y_0, et dont la dérivée égale à chaque instant $f(x, Y)$, se confond-elle nécessairement avec la fonction $y = F(x, y_0)$, ou peut-elle, au contraire, s'en séparer, du moins sous certaines conditions ? Le simple coup d'œil que nous venons de jeter sur l'équation (1), et qui nous a montré clairement l'existence incessante, devant le point mobile, d'un chemin $y = F(x, y_0)$ satisfaisant à l'équation (1), ne permet pas de décider si ce chemin est unique, ou s'il comporte des dédoublements, constitués par des courbes raccordées entre elles, c'est-à-dire mutuellement tangentes en leur point de jonction. Mais le fait, pour certaines familles, de l'existence de lignes, enveloppes ou non, touchées successivement par les diverses courbes de ces familles (t. I, p. 215 et 183*), prouve directement que de telles bifurcations ou séparations d'intégrales sont quelquefois possibles. Car il suffit que la famille de courbes $y = F(x, y_0)$ possède une enveloppe ou soit, à défaut de celle-ci, croisée par une ligne tangente à toute la famille, pour que cette enveloppe ou cette ligne tangente ait, en chacun de ses points (x, y), la même pente $y' = f(x, y)$ que l'enveloppée ou la courbe particulière venue à son contact, et satisfasse, par suite, sur tout son cours, à l'équation $y' = f(x, y)$ de la famille. Donc l'ordonnée y de cette ligne, bien que définissant, en général, une fonction de x très différente de toutes celles que comprend la formule $y = F(x, y_0)$, n'en constitue pas moins une intégrale de l'équation proposée (1). On l'appelle la *solution singulière,* pour la distinguer des *solutions* ou *intégrales particulières* que donne l'*intégrale générale* $y = F(x, y_0)$ quand on y attribue à y_0 toutes les valeurs constantes possibles. La ligne qu'elle représente se sépare, comme on voit, sur tout son cours, des courbes exprimées par l'intégrale générale, qui viennent, les unes après les autres, la toucher, c'est-à-dire se joindre à elle pour la quitter aussitôt.

361*. — Unité de l'intégrale générale.

(Compléments, p. 229*.)

362*. — Calcul direct des solutions singulières et des systèmes de valeurs des variables pour lesquels des réunions ou des séparations d'intégrales sont possibles.

(Compléments, p. 230*.)

363*. — Propriété, qu'ont ordinairement ces systèmes de valeurs, de représenter des enveloppes, tangentes ou non à leurs enveloppées exprimées par l'intégrale générale.

(Compléments, p. 231*.)

364. — Formes diverses de l'intégrale générale; facteurs d'intégrabilité.

L'intégrale générale $y = F(x, y_0)$ peut être mise sous une infinité d'autres formes, soit explicites, comme celle-là, par rapport à y, et obtenues en y faisant paraître, au lieu de la valeur initiale y_0, une autre constante c liée à y_0 d'une manière quelconque ou définie par une équation de la forme $c = \psi(y_0)$, soit même implicites, quand y s'y trouve déterminé, en fonction de x et de la constante arbitraire y_0 ou c, au moyen d'une équation non résolue. Une telle relation, de la forme $\Phi(x, y, c) = 0$, s'appelle l'*équation intégrale,* ou simplement l'*intégrale,* de l'équation différentielle proposée $y' = f(x, y)$.

Parmi ces dernières, qui sont implicites, il faut distinguer surtout celle où l'équation intégrale se trouve résolue par rapport à y_0 ou à une fonction de y_0 seul, c'est-à-dire par rapport à une *constante arbitraire* c, et mise ainsi sous la forme $\varphi(x, y) - c = 0$, équivalente à $\varphi(x, y) = c$; car, alors, une simple différentiation, donnant

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} y' = 0 \qquad \text{ou} \qquad y' = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y},$$

conduit à une valeur de y' débarrassée de la constante c, comme on l'a déjà vu dans la VIIIe Leçon (t. I, p. 124), tandis que, dans tout autre cas, il faudrait, pour éliminer c de l'équation obtenue en différentiant l'intégrale, y porter la valeur de c tirée de l'équation intégrale elle-même. Aussi la forme $\varphi(x, y) = c$ jouit-elle, pour cette raison, d'importantes propriétés, qui lui ont fait donner le nom de *forme normale* de l'intégrale.

Observons que, dans le cas où c n'est autre chose que la valeur initiale y_0 de la fonction, cette forme normale $y_0 = \varphi(x, y)$ revient à considérer y_0 comme dépendant de x et y, c'est-à-dire d'une valeur quelconque de la variable x et de la valeur correspondante y de la

fonction : point de vue très naturel ; car, si l'on avait adopté telle valeur x qu'on veut pour valeur initiale, y aurait pu, à ce moment, être choisi à volonté, et c'est alors y_0, correspondant à la valeur particulière x_0 de la variable, qui serait devenu fonction tant de la nouvelle valeur initiale quelconque x de la variable, que de la valeur correspondante attribuée à y. Ainsi, tandis que la forme explicite $y = \mathrm{F}(x, y_0)$ suppose que l'on considère, isolément, une certaine valeur de x, toujours la même, comme initiale, la forme normale $\varphi(x, y) = y_0$, ou, par suite, $\varphi(x, y) = c$, représente, au contraire, la comparaison ou le rapprochement de toutes les valeurs de x et y qui, prises successivement comme initiales, se correspondent pour former ensemble une même intégrale de l'équation $y' = f(x, y)$.

La relation $\varphi(x, y) = c$ différentiée donnant

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} y' = 0 \qquad \text{ou} \qquad -\frac{d\varphi}{dy} y' = \frac{d\varphi}{dx},$$

si nous remplaçons y' par sa valeur $f(x, y)$, que nous écrirons simplement f, il viendra $-\frac{d\varphi}{dy} f = \frac{d\varphi}{dx}$. Or nous avons vu qu'on peut, dans $\varphi(x, y) = c$, faire correspondre tour à tour, à chaque valeur de x, toutes les valeurs possibles de y, du moins entre les limites où la fonction $f(x, y)$ reste réelle. En d'autres termes, la famille $\varphi(x, y) = c$ de courbes couvre avec continuité l'espace, sur le plan des xy, autour de chaque point (x, y). C'est donc *identiquement*, ou pour x et y quelconques, que le produit des deux fonctions $-\frac{d\varphi(x, y)}{dy}$, $f(x, y)$, égale la fonction $\frac{d\varphi(x, y)}{dx}$. Et si l'on met l'équation différentielle proposée sous la forme $y' - f(x, y) = 0$, équivalente à $dy - f\,dx = 0$, puis qu'on multiplie son premier membre par $\frac{d\varphi}{dy}$, il viendra l'*identité*

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dy}(y' - f) = \dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\varphi}{dy} y' \\ \text{ou} \\ \dfrac{d\varphi}{dy}(dy - f\,dx) = \dfrac{d\varphi}{dx} dx + \dfrac{d\varphi}{dy} dy = d\varphi. \end{cases}$$

Donc le facteur $\frac{d\varphi}{dy}$, que j'appellerai v pour abréger, transforme en une différentielle exacte par rapport à x et à y le premier membre de l'équation proposée $dy - f\,dx = 0$; et il suffirait de connaître ce

facteur, pour ramener immédiatement le calcul de la fonction φ ou, par suite, de l'intégrale générale $\varphi(x,y)=c$ au problème, résolu plus haut par des quadratures (p. 10), de l'intégration d'une différentielle totale $d\varphi = \mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy$. On aurait ici

$$\mathrm{M} = -f\frac{d\varphi}{dy} = -fv, \qquad \mathrm{N} = v.$$

Ainsi, *il existe toujours un facteur, généralement fonction à la fois de x et de y, qui rend immédiatement intégrable, c'est-à-dire réductible aux quadratures, l'équation différentielle proposée $dy - f\,dx = 0$.* On l'appelle le *facteur d'intégrabilité* ou le *facteur intégrant*. Et l'on voit qu'il en existe même un pour chacune des formes normales que peut recevoir l'intégrale, puisqu'il y en a une pour toute fonction possible de y_0, savoir $c = \psi(y_0)$, que l'on voudra choisir comme constante arbitraire.

365*. — Des solutions qui rendent infini le facteur intégrant et, notamment, des intégrales soit singulières, soit asymptotes.

(Compléments, p. 233*.)

366*. — Analogies des intégrales singulières et des intégrales asymptotes : plus grande fréquence de celles-ci.

(Compléments, p. 235*.)

367. — Principaux types d'équations du premier ordre dont on connaît le facteur intégrant. — Premier type : cas où les variables se séparent ; équations homogènes, etc.

Il n'existe, malheureusement, qu'un nombre restreint de cas où l'on sache trouver le facteur d'intégrabilité : nous allons passer en revue ceux qui présentent quelque généralité ou semblent pouvoir offrir une certaine importance pratique.

Pour commencer par le plus simple, supposons que l'équation proposée soit de la forme

$$(13) \qquad y' = f(x)\varphi(y) \qquad \text{ou} \qquad dy - f(x)\varphi(y)\,dx = 0,$$

c'est-à-dire que la valeur de y' doive égaler le produit d'une fonction ne dépendant que de x par une fonction ne dépendant que de y. Alors le facteur d'intégrabilité est $\frac{1}{\varphi(y)}$. En effet, si l'on divise la seconde

(13) par $\varphi(y)$, il vient $\frac{dy}{\varphi(y)} - f(x)\,dx = 0$, équation dont le premier membre a la forme $M\,dx + N\,dy$, avec les valeurs $M = -f(x)$, $N = \frac{1}{\varphi(y)}$ qui vérifient bien la condition d'intégrabilité $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, puisqu'elles donnent $\frac{dM}{dy} = 0$ et $\frac{dN}{dx} = 0$. L'intégrale générale est

$$(14) \qquad \int \frac{dy}{\varphi(y)} - \int f(x)\,dx = \text{une constante } c.$$

Elle s'obtiendra donc par deux quadratures, effectuées sur des différentielles contenant seulement, l'une x, l'autre y. On dit, pour cette raison, que *les variables sont séparées* dans l'équation

$$\frac{dy}{\varphi(y)} - f(x)\,dx = 0$$

ou, encore, que la division de (13) par $\varphi(y)$ a effectué la *séparation des variables*.

Des transformations très simples réduisent certaines équations à la forme (13) et permettent, par suite, de les intégrer ou, du moins, d'y ramener à des quadratures le calcul de la fonction inconnue.

S'il s'agit, par exemple, d'une équation de la forme

$$y' = \psi(ax + by + c),$$

où ψ désignera une fonction quelconque de l'expression linéaire

$$ax + by + c,$$

il suffira de choisir cette expression linéaire comme nouvelle fonction inconnue, en posant $u = ax + by + c$ et, par suite, $u' = a + by'$ ou $y' = \frac{u' - a}{b}$, pour que l'équation, devenue $u' = a + b\psi(u)$, rentre dans le type (13), écrit $u' = f(x)\varphi(u)$, avec $f(x) = 1$ et

$$\varphi(u) = a + b\psi(u).$$

De même, si l'équation proposée a la forme

$$d(xy^m) - kx^a y^b d(xy^n) = 0,$$

avec m, n, a, b, k constants, il suffira d'adopter, comme nouvelle variable X et comme nouvelle fonction Y, les produits xy^n, xy^m, en posant $xy^n = X$, $xy^m = Y$ (d'où résulteront des valeurs monômes de x et y en X et Y), pour que l'équation proposée prenne la forme

$dY - kX^\alpha Y^\beta\, dX = 0$ et soit ainsi comprise dans la seconde (13), écrite $dY - f(X)\varphi(Y)\, dX = 0$.

Mais la plus remarquable de ces sortes de transformations, due à Jean Bernoulli, est relative aux équations dites *homogènes*. On appelle ainsi celles qui peuvent s'écrire $M\,dx + N\,dy = 0$, M et N désignant deux fonctions homogènes, en x et y, *du même degré*. Par suite, la valeur qu'on en tire pour y', quotient de $-$ M par N, est elle-même homogène du degré zéro et ne dépend que du rapport $\frac{y}{x}$. Il s'agit donc, en définitive, des équations de la forme

$$(15) \qquad y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{ou} \qquad dy - f\left(\frac{y}{x}\right) dx = 0.$$

Choisissons pour variable indépendante auxiliaire, au lieu de x, le rapport $\frac{y}{x}$, que nous appellerons t ; et proposons-nous de déterminer x en fonction de t, après quoi y aura, aussi en fonction de t, l'expression évidente tx. Comme la relation $y = xt$ donne $dy = x\,dt + t\,dx$, la seconde (15), proposée, deviendra

$$(16) \qquad x\,dt + [t - f(t)]\,dx = 0 \qquad \text{ou} \qquad dx + \frac{x}{t - f(t)}\,dt = 0,$$

équation rentrant bien dans le type (13), pris sous la forme

$$dx - \mathrm{f}(t)\varphi(x)\,dt = 0\,;$$

car il suffit d'y poser $\mathrm{f}(t) = \frac{-1}{t - f(t)}$ et $\varphi(x) = x$. Les variables se séparent en divisant par x, et l'intégrale générale est ensuite

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \log x + \displaystyle\int \frac{dt}{t - f(t)} = \text{une constante arbitraire } \log c \\ \text{ou} \\ \log \dfrac{x}{c} = -\displaystyle\int \frac{dt}{t - f(t)}. \end{array} \right.$$

Il ne restera donc qu'à effectuer, dans chaque cas, la quadrature $\int \frac{dt}{t - f(t)}$.

L'équation est quelquefois homogène, non par rapport à x et à y, mais par rapport à leurs excès $X = x - \alpha$, $Y = y - \beta$ sur des constantes α, β ; et il suffit évidemment alors, pour la ramener au type (15), d'y remplacer $x - \alpha$, $y - \beta$, dx, dy, respectivement, par X, Y,

dX, dY. Tel est le cas d'une équation comme

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y + ax - b}{y + a'x - b'}\right), \quad \text{qui s'écrira} \quad \frac{dy}{dx} = f\left[\frac{(y-\beta) + a(x-\alpha)}{(y-\beta) + a'(x-\alpha)}\right],$$

en y déterminant α et β par les deux équations du premier degré $b = \beta + a\alpha$, $b' = \beta + a'\alpha$, compatibles toutes les fois que a' diffère de a. Si, au contraire, a' égalait a, la fonction f ne dépendrait que de l'expression linéaire $y + ax$, et l'équation proposée s'intégrerait, comme on a vu tout à l'heure, en se donnant $y + ax$ pour fonction inconnue.

368. — Deuxième type : équation linéaire; équation de Bernoulli, etc.

On appelle, en général, *équations linéaires* les équations qui sont *du premier degré par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées,* tout en pouvant être d'un degré quelconque, ou même transcendantes, par rapport aux variables indépendantes. D'après cette définition, l'équation différentielle linéaire du premier ordre sera évidemment réductible à la forme

$$(19) \qquad y' + Py = Q \qquad \text{ou} \qquad dy + Py\,dx = Q\,dx,$$

P et Q désignant deux fonctions quelconques de x seul.

Supposons d'abord qu'elle soit, comme on dit, *privée de second membre,* ou qu'on ait $Q = 0$. Alors la valeur, $-Py$, de y' égalera le produit d'une fonction, $-P$, de x par une fonction, y, de y, et les variables se sépareront. En divisant la seconde (19) par y et intégrant, il viendra, si $\log c$ désigne la constante arbitraire introduite,

$$\log y + \int P\,dx = \log c, \quad \text{ou} \quad \log\frac{y}{c} = -\int P\,dx, \quad \text{ou encore} \quad \frac{y}{c} = e^{-\int P\,dx}.$$

On trouve donc $y = ce^{-\int P\,dx}$ et, si l'on résout enfin par rapport à c,

$$(20) \qquad y e^{\int P\,dx} = c.$$

Comme le facteur $e^{\int P\,dx}$ est une fonction de x seul, on voit que l'*équation linéaire sans second membre a une intégrale générale, sous forme normale, également linéaire, ou du premier degré par rapport à la fonction inconnue* y.

Ici, la fonction que nous appelions en général $\varphi(x, y)$ [p. 182] égale $ye^{\int P\,dx}$, et le facteur intégrant $\frac{d\varphi}{dy}$ est $e^{\int P\,dx}$. Or, rétablissant actuellement le deuxième membre Q, multiplions la seconde (19) par le facteur $e^{\int P\,dx}$, puis intégrons. Comme $e^{\int P\,dx} P\,dx = de^{\int P\,dx}$ et que, par

suite,

$$e^{\int P\,dx}(dy + Py\,dx) = d(y e^{\int P\,dx}),$$

il viendra

$$(21)\qquad \begin{cases} y e^{\int P\,dx} = \int Q e^{\int P\,dx}\,dx + \text{une constante } c \\ \text{ou} \quad y = (c + \int Q e^{\int P\,dx}\,dx) e^{-\int P\,dx}. \end{cases}$$

Par conséquent, *un même facteur intégrant convient pour les deux cas de l'équation sans second membre et de l'équation avec second membre.* Nous verrons, dans une prochaine Leçon, que cette propriété, ainsi que la précédente concernant la linéarité d'une intégrale générale (sous forme normale) par rapport à la fonction inconnue, s'étend à des équations différentielles linéaires quelconques. Déjà, d'après la première (21), la même linéarité subsiste bien pour l'intégrale de l'équation (19), quand il y a un second membre.

C'est Leibnitz qui paraît avoir intégré, le premier, l'équation linéaire (19), ou, plutôt, en avoir réduit l'intégration, comme le montre (21), au calcul des deux quadratures $\int P\,dx$ et $\int Q e^{\int P\,dx}\,dx$ [1].

On ramène à l'équation linéaire celle-ci, dite *équation de Bernoulli* [2],

$$(22)\qquad y' + Py = Qy^n,$$

où P et Q sont encore deux fonctions quelconques de x. Quant à l'exposant n, entier ou fractionnaire, positif ou négatif, il diffère de l'unité, sans quoi l'équation, réduite à $y' + (P - Q)y = 0$, serait simplement linéaire sans second membre. Supposant donc n différent de 1, mais d'ailleurs quelconque, multiplions (22) par $(1 - n)y^{-n}$, et observons que $(1 - n)y^{-n}y'$ exprime la dérivée de y^{1-n}. Il viendra

$$(23)\qquad \frac{d.y^{1-n}}{dx} + (1 - n)P.y^{1-n} = (1 - n)Q,$$

équation qui, en y regardant y^{1-n} comme la fonction inconnue, est

---

(1) Dans sa lettre du 27 novembre 1694 au marquis de l'Hôpital. Il y parvient en concevant l'intégrale d'une équation différentielle $M + Ny' = 0$ ordonnée, comme M et N, suivant les puissances de y, et finalement bornée, quand il ne s'agit d'intégrer que (19), aux deux premiers termes, c'est-à-dire de la forme simple $U + Vy = 0$; il y détermine d'ailleurs les fonctions U, V, ... de x, de manière que l'équation, (19), soit vérifiée *identiquement*. Cette méthode, qui, au fond, revient à poser en général c ou $\varphi(x, y) = U + Vy + \ldots$, présupposait, et mettait par là-même en évidence, la forme linéaire de l'intégrale par rapport à y; ce qui est le point capital de la question.

(2) Du nom de Jacques Bernoulli (disciple de Leibnitz, comme son frère Jean Bernoulli) qui l'a étudiée vers la fin de 1695.

bien de la forme (19), sauf le remplacement de P par $(1-n)$P et de Q par $(1-n)$Q. L'intégrale sera donc, d'après (21),

$$(24) \qquad y^{1-n} = \left[c + (1-n)\int Q\, e^{(1-n)\int P\,dx}\,dx\right] e^{-(1-n)\int P\,dx}.$$

L'équation de Bernoulli, qui comprend comme cas particulier, en y faisant $n=0$, l'équation linéaire, n'est donc pas, au fond, plus générale qu'elle, lorsqu'on y adopte y^{1-n} pour fonction inconnue.

L'introduction du rapport $\frac{y}{x} = t$ comme variable indépendante réduit à une équation de Bernoulli celle-ci, moins simple en apparence,

$$(25) \qquad dy + f\left(\frac{y}{x}\right)dx = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) d\frac{y}{x},$$

où l'exposant n et les deux fonctions f, φ sont quelconques. Remplaçons, en effet, dans (25), y par tx (d'où $dy = t\,dx + x\,dt$), et il viendra, en divisant finalement par $[t+f(t)]\,dt$,

$$(26) \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{x}{t+f(t)} = \frac{\varphi(t)}{t+f(t)}x^n;$$

ce qui, si l'on pose $P = \frac{1}{t+f(t)}$, $Q = \frac{\varphi(t)}{t+f(t)}$, rentre bien dans le type (22), où l'on remplacerait respectivement x et y par t et x.

369*. — Absence d'intégrales singulières et d'intégrales asymptotes distinctes, dans l'équation linéaire.

(Compléments, p. 238*.)

370*. — Simplification d'une équation quadrinôme et sa réduction, dans certains cas, à l'équation trinôme de Bernoulli : équation de Riccati.

(Compléments, p. 240*.)

371*. — Troisième type : équations qui s'intègrent par différentiation, comme celle de Clairaut.

(Compléments, p. 242*.)

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

372. — Des équations différentielles du premier ordre simultanées : existence de leurs intégrales générales.

Considérons n fonctions inconnues y, z, u, ... d'une variable indépendante x, définies au moyen d'équations de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} y' \text{ ou } \dfrac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, u, \ldots), \\ z' \text{ ou } \dfrac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, u, \ldots), \\ u' \text{ ou } \dfrac{du}{dx} = f_3(x, y, z, u, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

qui, pour chaque valeur de la variable x, font connaître leurs dérivées premières en fonction de cette valeur x et des valeurs actuelles de y, z, u, ... elles-mêmes. Un tel ensemble d'équations constitue évidemment l'extension, au cas de plusieurs fonctions inconnues, de l'équation différentielle du premier ordre étudiée dans la Leçon précédente. On l'appelle un système d'*équations différentielles simultanées,* et l'on dit, d'ailleurs, qu'il est du premier ordre, parce que les dérivées du premier ordre sont les plus élevées qui y paraissent.

Si l'on se représente y, z, u, ... comme les ordonnées de tout autant de courbes, en imaginant que ces courbes doivent être tracées par des points, mobiles, tous à la fois, le long d'une même droite, sans cesse perpendiculaire à l'axe des abscisses x et animée d'un mouvement continu dans le sens de cet axe, il est clair qu'on pourra, comme dans le cas d'une fonction unique y ou d'une équation unique $y' = f(x, y)$, se donner sur la droite mobile la position première de tous ces points, c'est-à-dire les valeurs dites *initiales,* y_0, z_0, u_0, ... de y, z, u, ... correspondant à une certaine valeur, x_0, de x, et que c'est alors seulement que les équations (1) détermineront les direc-

tions, définies au moyen des coefficients angulaires y', z', u', ..., prises au même moment par les divers points mobiles. Ceux-ci se rendront de la sorte dans des positions infiniment voisines, où une nouvelle application des équations (1) fera connaître les nouvelles directions, presque identiques aux précédentes, qu'ils devront prendre ; et ainsi de suite. Dans quelques situations qu'arrivent ainsi, de proche en proche, les points ayant y, z, u, ... pour ordonnées, il existera toujours certaines pentes y', z', u', ... satisfaisant aux équations (1) et qui permettront à ces points d'atteindre finalement une abscisse x quelconque, tant que, du moins, x, y, z, u, ... se maintiendront dans les limites entre lesquelles les fonctions f_1, f_2, f_3, ... sont réelles et finies.

Donc, *les équations simultanées* (1) *admettent toujours un système d'intégrales générales, de la forme*

$$(2)\qquad \begin{cases} y = \mathrm{F}_1(x, y_0, z_0, u_0, \ldots), \\ z = \mathrm{F}_2(x, y_0, z_0, u_0, \ldots), \\ u = \mathrm{F}_3(x, y_0, z_0, u_0, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'*il existe toujours des fonctions* y, z, u, ... *qui le vérifient et qui, pour* $x = x_0$, *peuvent recevoir des valeurs* y_0, z_0, u_0, ... *choisies à volonté.*

373*. — Unité du système des intégrales générales; possibilité de quelques intégrales singulières et calcul direct de celles-ci.

(Compléments, p. 245*.)

374. — De la forme normale des intégrales : facteurs d'intégrabilité.

Il est clair qu'on pourra, dans les intégrales (2), substituer à y_0, z_0, u_0, ... d'autres constantes arbitraires en même nombre, c_1, c_2, c_3, ..., liées à y_0, z_0, u_0, ... par des relations quelconques, et dont, par suite, y_0, z_0, u_0, ... seront des fonctions déterminées. Les n variables y, z, u, ... dépendront donc des n constantes c_1, c_2, c_3, ..., en même temps que de x; et elles pourront d'ailleurs n'être obtenues par l'intégration que sous forme implicite, c'est-à-dire à l'état de n équations non résolues entre x, y, z, u, ... et c_1, c_2, ..., c_n. De telles relations sont dites des *équations intégrales* du système (1). Si on les résout par rapport aux n constantes c_1, c_2, c_3, ..., elles deviendront de la forme

$$(3)\quad \varphi_1(x, y, z, u, \ldots) = c_1, \quad \varphi_2(x, y, z, u, \ldots) = c_2, \quad \varphi_3(x, y, z, u, \ldots) = c_3, \text{etc.},$$

φ_1, φ_2, φ_3, ... désignant certaines fonctions de x, y, z, u, ... Et elles seront alors les analogues de l'*intégrale normale* $\varphi(x, y) = c$ d'une équation différentielle unique ; car une simple différentiation en éliminera la constante arbitraire que contient chacune d'elles.

Les intégrales du système (1), mises sous cette *forme normale*, peuvent donc être représentées par la formule unique $\varphi(x, y, z, u, \ldots) = c$; et l'on voit qu'il y en a toujours *n distinctes*, c'est-à-dire suffisantes pour déterminer, en fonction des quantités x, c_1, c_2, ..., c_n, des expressions de y, z, u, ... dont on puisse arbitrairement se donner, par un choix convenable de c_1, c_2, ..., c_n, les valeurs y_0, z_0, u_0, ... répondant à la valeur initiale x_0, également arbitraire, de x. Si l'on différentie l'une quelconque de ces équations, écrite $\varphi = c$, en observant d'ailleurs que y', z', u', ... sont, d'après les équations proposées, $f_1(x, y, z, \ldots)$, $f_2(x, y, z, \ldots)$, ..., on aura

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\varphi}{dy} f_1 + \dfrac{d\varphi}{dz} f_2 + \dfrac{d\varphi}{du} f_3 + \ldots = 0 \\ \text{ou} \\ -\left(\dfrac{d\varphi}{dy} f_1 + \dfrac{d\varphi}{dz} f_2 + \dfrac{d\varphi}{du} f_3 + \ldots\right) = \dfrac{d\varphi}{dx}. \end{cases}$$

Ainsi, il existe, entre les dérivées partielles premières de la fonction φ de x, y, z, u, ..., et les fonctions données f_1, f_2, f_3, ... de ces mêmes variables, des rapports tels, que l'expression de

$$-\left(\frac{d\varphi}{dy} f_1 + \frac{d\varphi}{dz} f_2 + \ldots\right)$$

se confond avec $\dfrac{d\varphi}{dx}$; et, cela, pour toutes les valeurs possibles de x, y, z, u, ..., puisque chaque valeur de x pourrait, à son tour, être adoptée comme valeur initiale, et que les valeurs correspondantes de y, z, u, ... seraient, alors, susceptibles d'être choisies arbitrairement. L'égalité (6) est donc une *identité*.

Cela posé, prenons les équations différentielles (1) sous la forme

$$(7)\qquad dy - f_1\,dx = 0, \qquad dz - f_2\,dx = 0, \qquad du - f_3\,dx = 0, \quad \ldots,$$

et ajoutons-les, après les avoir respectivement multipliées par $\dfrac{d\varphi}{dy}$, $\dfrac{d\varphi}{dz}$, $\dfrac{d\varphi}{du}$, ... Si nous remplaçons, dans les résultats,

$$-\left(\frac{d\varphi}{dy} f_1 + \frac{d\varphi}{dz} f_2 + \ldots\right)$$

par $\frac{d\varphi}{dx}$, la somme des premiers membres deviendra

$$(8) \qquad \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz + \frac{d\varphi}{du}du + \ldots + \frac{d\varphi}{dx}dx \quad \text{ou} \quad d\varphi;$$

en sorte que le résultat, réduit à $d\varphi = 0$, sera immédiatement intégrable et donnera $\varphi =$ const., c'est-à-dire l'une des n intégrales générales prises sous leur forme normale.

Il existe donc toujours, pour un système de n équations différentielles simultanées du premier ordre, résolues par rapport aux différentielles des fonctions inconnues et réduites ensuite, par transposition de termes, à avoir leurs seconds membres nuls, n groupes distincts de facteurs d'intégrabilité (fonction de x, y, z, u, ...), tels que, si l'on multiplie les équations proposées par ceux, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, $\frac{d\varphi}{du}$, ..., de l'un quelconque des groupes, puis qu'on fasse la somme des résultats, l'équation obtenue s'intègre immédiatement; car elle a pour premier membre une différentielle totale, intégrable par des quadratures et conduisant à l'une des intégrales normales $\varphi = c$ du système proposé.

375*. — Propriété qu'ont les solutions singulières et, sous certaines conditions, les solutions asymptotes, de rendre infinis un ou plusieurs de ces facteurs.

(Compléments, p. 247*.)

376. — Réduction d'un système d'équations différentielles d'ordre quelconque à un système d'un nombre plus grand d'équations du premier ordre.

On peut toujours ramener un système d'équations différentielles à être du premier ordre, en y considérant comme autant de fonctions inconnues distinctes toutes les dérivées qui y paraissent, sauf la plus élevée de chacune des fonctions cherchées, et en déterminant les inconnues auxiliaires ainsi introduites par les relations $\left(\text{comme } y' = \frac{dy}{dx}, z' = \frac{dz}{dx}, \ldots\right)$ qui, justement, les définissent en tant que dérivées soit les unes des autres, soit des inconnues principales demandées y, z, u, ... On obtient ainsi un système plus nombreux d'équations simultanées; mais, évidemment, ce système est du premier ordre.

377. — Cas particulier d'une seule équation différentielle d'ordre supérieur : intégrale générale; facteurs d'intégrabilité; intégrales de divers ordres.

Soit, par exemple, une équation différentielle d'ordre n, supposée résolue par rapport à la dérivée la plus élevée,

$$(9)\qquad \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \\ \text{ou} \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right), \end{cases}$$

entre une variable indépendante x, sa fonction y et les n premières dérivées de celle-ci. En regardant comme des fonctions distinctes les $n-1$ dérivées $y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}$, intermédiaires entre la fonction y et sa dérivée $n^{\text{ième}}$, $y^{(n)}$, que nous écrirons $\dfrac{dy^{(n-1)}}{dx}$, nous aurons le système de n équations simultanées du premier ordre,

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y', \quad \dfrac{dy'}{dx} = y'', \quad \ldots, \quad \dfrac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)}, \\ \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \end{cases}$$

entre la variable indépendante x et les n fonctions $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ de cette variable ; et il est évident que ce système (10) a précisément la même signification que l'équation proposée (9).

On voit que l'intégrale générale déterminera y et, par suite, y', $y'', \ldots, y^{(n-1)}$, en fonction de x et des *valeurs initiales* arbitraires $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, que prendront toutes ces quantités pour $x = x_0$. Donc, *l'intégrale générale d'une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre contient n constantes arbitraires, telles qu'on peut se donner à volonté les valeurs initiales de la fonction et de ses $n-1$ premières dérivées.*

Chacune des n intégrales normales, distinctes, du système (10) étant de la forme $\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = c$, les facteurs d'intégrabilité correspondants sont $\dfrac{d\varphi}{dy}, \dfrac{d\varphi}{dy'}, \dfrac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}$; et, si l'on multiplie par ceux-ci les équations (10), mises sous la forme

$$(11)\qquad \begin{cases} dy - y'\,dx = 0, \quad dy' - y''\,dx = 0, \quad \ldots, \\ dy^{(n-2)} - y^{(n-1)}\,dx = 0, \quad dy^{(n-1)} - f\,dx = 0, \end{cases}$$

puis, qu'on ajoute les résultats, la somme des premiers membres éga-

lera, comme on sait, la différentielle totale exacte de la fonction φ. On aura ainsi

$$\frac{d\varphi}{dy}(dy - y'\,dx) + \frac{d\varphi}{dy'}(dy' - y''\,dx) + \ldots + \frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}(dy^{(n-1)} - f\,dx) = d\varphi,$$

c'est-à-dire, plus simplement, en tenant compte de ce fait que y', y'', ... désignent les dérivées successives de y et que, par suite, les expressions $dy - y'\,dx$, $dy' - y''\,dx$, ..., $dy^{(n-2)} - y^{(n-1)}\,dx$ sont identiquement nulles,

$$\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}(dy^{(n-1)} - f\,dx) = d\varphi. \tag{12}$$

Il existe donc, pour toute équation différentielle d'ordre n mise sous la forme $dy^{(n-1)} - f\,dx = 0$, *un facteur,* $\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}$, *fonction de* $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, *et même n facteurs analogues distincts* (*un pour chaque intégrale normale* $\varphi = \text{const.}$), *qui rendent le premier membre de cette équation la différentielle totale de certaines fonctions* φ *de* $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

Quand un de ces facteurs est connu et qu'on l'applique, l'équation devient exactement intégrable une fois ; et l'on obtient, en intégrant en effet, une équation différentielle d'ordre $n - 1$, savoir

$$\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = c.$$

Celle-ci est dite une *intégrale générale première* de la proposée. Si l'on peut la traiter comme la proposée, c'est-à-dire l'intégrer elle-même une fois, on aura, avec deux constantes arbitraires, une nouvelle intégrale, appelée *intégrale deuxième* de la proposée. En continuant de même, on arrivera, après n intégrations, à l'*équation intégrale* $n^{\text{ième}}$ *ou du* $n^{\text{ième}}$ *ordre,* qui contiendra x, y et les n constantes arbitraires successivement introduites. Celle-ci sera l'*intégrale générale* de la proposée ; car, résolue par rapport à y, elle donnera la valeur générale de cette fonction, avec toutes les constantes arbitraires nécessaires pour pouvoir disposer à volonté de sa valeur initiale y_0 et de celles, $y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, de ses $n - 1$ premières dérivées.

378*. — Sur les solutions singulières des équations différentielles d'ordre supérieur.

(Compléments, p. 248*.)

379. — Équation différentielle d'ordre supérieur propre à chacune des fonctions que définissent des équations simultanées du premier ordre : intégration du système, de proche en proche, par l'emploi de la série de Taylor.

Si une équation différentielle d'ordre n peut être remplacée par n équations du premier ordre, à l'inverse, *un système de n équations du premier ordre,* comme, par exemple, le système (1) [p. 189], *conduit, par l'élimination de $n-1$ des fonctions inconnues, à une équation différentielle d'ordre n entre la variable indépendante x et la fonction inconnue restante.*

Pour le démontrer, observons d'abord que les équations proposées (1) permettent d'obtenir, en fonction des valeurs actuelles de x, y, z, u, ..., non seulement les dérivées premières de y, z, u, ..., mais encore leurs dérivées d'un ordre quelconque. En effet, la différentiation de la première (1), par exemple, donnera

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} y'' &= \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy}y' + \frac{df_1}{dz}z' + \frac{df_1}{du}u' + \ldots \\ &= \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy}f_1 + \frac{df_1}{dz}f_2 + \frac{df_1}{du}f_3 + \ldots, \end{aligned}\right.$$

expression de y'', qui est, comme y', une fonction connue de x, y, z, u, ..., et qui servira elle-même de point de départ pour obtenir successivement y''', y^{iv}, ...

Si donc on évalue, par exemple, y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$ en fonction de x, y, z, u, ..., on aura, entre ces dérivées et x, y, z, u, ..., des relations au nombre de n ; et il suffira de les combiner de manière à en éliminer les $n-1$ variables z, u, ..., pour obtenir finalement une équation entre x, y, y', y'', ..., $y^{(n)}$, c'est-à-dire une équation du $n^{\text{ième}}$ ordre en y. L'intégration de cette équation fera connaître séparément y, du moins entre certaines limites, en fonction de x et des valeurs initiales, y_0, y'_0, y''_0, ..., $y_0^{(n-1)}$, tant de la quantité y que de ses $n-1$ premières dérivées y', y'', ..., $y^{(n-1)}$, dérivées évaluables d'ailleurs, pour $x=x_0$, en fonction des vraies constantes arbitraires y_0, z_0, u_0, ... de la question, grâce aux formules, comme $y'=f_1$ et comme (14), de ces dérivées de y.

On remarquera que les expressions de y, z, u, ..., ou plutôt leurs accroissements successifs pour de petits accroissements h de x, pourront généralement se calculer de proche en proche par la série de Taylor, à un degré aussi élevé qu'on voudra d'approximation, en

fonction des valeurs initiales y_0, z_0, u_0, ... de toutes les fonctions cherchées. En effet, les coefficients qui entreront, par exemple, dans le développement d'un premier accroissement de y seront, à des facteurs constants près, les valeurs primitives, y'_0, y''_0, y'''_0, ..., des dérivées de y, valeurs s'exprimant toutes directement, comme on vient de voir, en fonction de celles de x, y, z, u, ..., qui constituent des données immédiates de la question. On aura ainsi y, z, u, ... pour toutes les valeurs de x assez voisines de x_0, jusqu'à une certaine valeur, $x_0 + h$, au delà de laquelle on jugera que l'approximation atteinte par les développements obtenus risquerait de devenir insuffisante, et qui, adoptée dès lors comme nouvelle valeur initiale, ou comme nouveau point de départ où seront encore connues (par les séries précédentes) les quantités y, z, u, ..., permettra d'obtenir de même leurs valeurs ultérieures; et ainsi de suite, tant que ne deviendront pas infinies ou discontinues les dérivées employées dans les développements.

380. — De quelques cas où l'on trouve immédiatement les facteurs d'intégrabilité, pour une équation différentielle d'ordre supérieur.

Les cas où l'on sait trouver d'une manière immédiate les facteurs d'intégrabilité sont, naturellement, encore plus rares pour les équations différentielles d'ordre supérieur que pour celles du premier ordre. Voici les principaux.

1° Le plus simple est celui où l'équation ne contient que la variable indépendante x et une dérivée de la fonction inconnue y. Alors l'équation, résolue par rapport à cette dérivée, devient de la forme $y^{(n)} = f(x)$, ou $dy^{(n-1)} = f(x)\,dx$. Elle est immédiatement intégrable : autrement dit, elle admet le facteur d'intégrabilité 1. Intégrée une première fois, elle donne $y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx +$ const., c'est-à-dire qu'elle devient de l'ordre $n-1$, tout en conservant sa forme première. On pourra donc l'intégrer encore, et continuer de même jusqu'à ce que n intégrations successives aient permis de remonter à y.

Quand l'équation n'est pas aisée à résoudre par rapport à $y^{(n)}$, mais l'est par rapport à x ou prend facilement la forme $x = \varphi(y^{(n)})$, la quantité $y^{(n)}$ se trouve toute désignée, dans la question, pour le rôle de variable auxiliaire propre à faciliter l'expression des dérivées de moins en moins élevées $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, ..., jusqu'à y. En désignant par u, pour plus de simplicité, cette variable auxiliaire $y^{(n)}$, il vient

d'abord

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx = y^{(n)}\,d\varphi(y^{(n)}) = u\,d\varphi(u) = u\varphi'(u)\,du,$$

et ensuite, de même,

$$\left\{\begin{aligned} dy^{(n-2)} &= y^{(n-1)}\,dx = y^{(n-1)}\varphi'(u)\,du,\\ dy^{(n-3)} &= y^{(n-2)}\varphi'(u)\,du, \quad \ldots, \quad dy = y'\varphi'(u)\,du. \end{aligned}\right.$$

Des intégrations successives, dont chacune implique une constante arbitraire, donnent donc

$$\left\{\begin{aligned} y^{(n-1)} &= \int u\varphi'(u)\,du,\\ y^{(n-2)} &= \int \varphi'(u)\,du.y^{(n-1)} = \int \varphi'(u)\,du \int u\varphi'(u)\,du, \quad \ldots,\\ y &= \int \varphi'(u)\,du \int \varphi'(u)\,du \int \ldots \int \varphi'(u)\,du \int u\varphi'(u)\,du; \end{aligned}\right.$$

et l'expression de y, en u, ainsi formée, a bien le nombre voulu, n, de constantes arbitraires. Enfin, pour chaque système de valeurs de ces constantes, la fonction cherchée y de x se construit (à moins que u ne puisse être éliminé et y s'obtenir ainsi directement en x) par le rapprochement des valeurs de y et x qui résultent, quand u varie, de cette expression de y et de celle, $\varphi(u)$, de x.

2° Vient, en deuxième lieu, le cas où l'équation ne contient pas x, ni y, mais seulement deux dérivées consécutives de y. Résolue par rapport à la plus haute de ces dérivées, elle sera de la forme

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}) \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(y^{(n-1)}).$$

On voit qu'en y regardant $y^{(n-1)}$ comme la fonction cherchée, elle devient l'équation du premier ordre $dy^{(n-1)} = f(y^{(n-1)})\,dx$ et a pour facteur d'intégrabilité l'inverse de $f(y^{(n-1)})$. Une première intégration donne, en appelant c la constante arbitraire introduite,

$$\int \frac{dy^{(n-1)}}{f(y^{(n-1)})} = x + c,$$

équation différentielle de l'ordre $n-1$ et qui, rentrant dans le type précédent, se traitera par l'un des deux procédés indiqués ci-dessus.

3° Considérons encore une forme d'équations très importante en Mécanique, où, le temps étant la variable indépendante x, il arrive souvent que la dérivée de la vitesse, c'est-à-dire la dérivée seconde de l'espace parcouru y, dépend directement de la situation du mobile, que définit la longueur y elle-même. Ainsi, les équations dont il s'agit contiendront uniquement la fonction y et sa dérivée seconde, ou, pour plus de généralité, deux dérivées de y non consécutives, savoir

$y^{(n-2)}$ et $y^{(n)}$. Résolue par rapport à la dérivée la plus élevée, elle sera, en appelant u la dérivée la moins élevée, de la forme $u' = f(u)$. Écrivons-la $du' = f(u)\,dx$ et son facteur intégrant sera $2u'$. En effet, multipliée par $2u'$, elle deviendra $d(u'^2) = 2f(u)\,u'\,dx = 2f(u)\,du$, ou, intégrée, $u'^2 = 2\int f(u)\,du + c$. On en tire donc

$$u' = \pm\sqrt{2\int f(u)\,du + c},$$

équation différentielle de l'ordre $n-1$ comprise dans le type précédent ; car elle ne contient que les deux dérivées consécutives u et u' de y, savoir $y^{(n-2)}$ et $y^{(n-1)}$, par rapport à la plus élevée desquelles elle se trouve même résolue.

381. — Cas les plus simples d'abaissement de l'ordre d'une équation différentielle.

On peut encore, parfois, intégrer une équation d'ordre supérieur en commençant par *abaisser* son ordre, c'est-à-dire par le diminuer d'une ou de plusieurs unités, au moyen de certains changements, soit de la variable, soit de la fonction ; ce qui, en quelque sorte, répartit, pour l'atténuer, la difficulté du problème entre l'intégration de l'équation obtenue et le passage des variables ou fonctions auxiliaires à celles, x et y, qui sont données.

Par exemple, quand l'équation proposée ne contient pas y, mais contient seulement, avec x, les dérivées de y à partir de celle d'un certain ordre p, l'adoption de $y^{(p)}$ comme fonction inconnue, à la place de y, abaisse évidemment l'ordre de p unités; et, si l'on peut, en intégrant l'équation ainsi abaissée, déterminer $y^{(p)}$, les p intégrations qui resteront à effectuer seront immédiatement réductibles à des quadratures, comme nous venons de le voir sur l'équation $y^{(n)} = f(y^{(n-1)})$, que l'adoption provisoire de $y^{(n-1)}$ en qualité de fonction inconnue avait justement abaissée au premier ordre.

Quand, au contraire, l'équation proposée contient y avec ses n premières dérivées, mais ne contient pas x, l'ordre s'abaisse d'une unité en prenant y pour variable indépendante et la dérivée y' pour fonction. Alors, en effet, les dérivées suivantes y'', y''', ..., transformées au moyen de la formule symbolique évidente

$$\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy} = y'\frac{d}{dy},$$

deviennent respectivement

$$(15)\quad y'' = y'\frac{dy'}{dy}, \qquad y''' = y'\frac{d}{dy}\left(y'\frac{dy'}{dy}\right) = y'^2\frac{d^2y'}{dy^2} + y'\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2, \quad \ldots;$$

et chacune s'exprime au moyen de dérivées de y' qui sont d'un ordre moindre, en sorte que l'équation se trouve bien réduite à l'ordre $n-1$. Si donc on sait l'intégrer, la valeur de y' s'obtiendra en fonction de y; ce qui équivaudra à une équation de la forme $y'=f(y)$, ayant pour intégrale $\int \frac{dy}{f(y)} = x + \text{const.}$

382*. — **Exemples : Courbe plane ayant sa courbure fonction soit de la distance à une droite fixe, soit de la normale; courbe élastique.**

(Compléments, p. 249*.)

383*. — **Autres cas d'abaissement, spéciaux à des équations présentant certains genres d'homogénéité.**

(Compléments, p. 254*.)

Abaissement de l'équation binôme du second ordre (note).

(Compléments, p. 255*.)

384*. — **Exemple : abaissement de l'ordre d'une équation linéaire sans second membre; réduction de l'équation non linéaire de Riccati à une telle équation linéaire, mais du second ordre.**

(Compléments, p. 256*.)

385*. — **Réduction, aux quadratures, de l'intégration de l'équation linéaire homogène du second ordre dont une solution particulière est donnée; abaissement de l'ordre de toute équation linéaire, avec conservation de la forme linéaire, quand on connaît une ou plusieurs intégrales particulières de l'équation analogue sans second membre.**

(Compléments, p. 257*.)

TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES; MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES POUR L'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS MÊME NON LINÉAIRES.

386. — **Des équations linéaires : idée de leur importance dans l'étude des phénomènes naturels.**

Bornons-nous désormais, presque exclusivement, dans notre étude des équations différentielles simultanées ou d'ordre supérieur, à celles qui sont *linéaires*, c'est-à-dire qui, réduites à un système du premier ordre et résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues y, z, u, ..., peuvent être, finalement, mises sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + A_1 y + B_1 z + C_1 u + \ldots = F_1, \\ \dfrac{dz}{dx} + A_2 y + B_2 z + C_2 u + \ldots = F_2, \\ \dfrac{du}{dx} + A_3 y + B_3 z + C_3 u + \ldots = F_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

A_1, B_1, C_1, ..., F_1, A_2, B_2, C_2, ..., F_2, etc. désignant des fonctions explicites quelconques de la variable indépendante x seule.

Ces équations ont une grande importance, non seulement parce que leur simplicité relative nous met à même de les mieux connaître, mais encore et surtout parce qu'elles régissent une immense et intéressante catégorie de phénomènes naturels, savoir tous ceux qui consistent en de *petits* changements de situation ou d'état, comme sont les oscillations des fluides, les vibrations et déformations élastiques des solides, les ondulations lumineuses, les échanges modérés de chaleur entre des corps voisins ou entre les différentes parties d'un même corps ou d'un même système de corps, et les variations correspondantes de la température, etc.

En effet, dans l'étude de tous ces phénomènes, on peut regarder les corps comme composés de particules plus ou moins nombreuses, dont chacune a sa situation, sa vitesse, sa température, etc., exprimées par une ou plusieurs quantités, variables d'un instant à l'autre, c'est-à-dire

fonctions du temps, et en nombre au moins égal à celui des particules. Or, si nous désignons ici par x le temps et par y, z, u, ... ces diverses quantités, ou plutôt leurs petites variations de part et d'autre de certaines valeurs moyennes fixes, les lois physiques détermineront les dérivées de y, z, u, ..., à chaque instant x, en fonction de leurs valeurs actuelles seules, quand le système matériel étudié ne sera influencé par aucun autre (p. 178). Et elles les détermineront encore, évidemment, en fonction des mêmes variables, quand le système matériel proposé supportera des actions extérieures ne dépendant que de ces variables ou, autrement dit, se trouvera influencé par un autre système matériel, mais qui aurait son état lié au sien, c'est-à-dire défini également par les variables y, z, u, ... Enfin, les mêmes dérivées seront des fonctions explicites, tout à la fois, de y, z, u, ..., et aussi de x, dans le cas plus général où l'état du système en relation avec le proposé ne se trouvera pas entièrement solidaire du sien; car alors les actions extérieures à considérer devront être connues à chaque instant, c'est-à-dire *directement* données en fonction du temps x, sans quoi le problème ne serait pas défini. Donc, conformément aux indications du n° 359 (p. 178), les dérivées $\frac{d(y, z, u, \dots)}{dx}$ égaleront des fonctions déterminées de $x, y, z, u, \dots$. Cela posé, tant que les changements d'état dont il s'agit seront fort petits, ou, autrement dit, tant que y, z, u, ... ne recevront que de faibles valeurs absolues, on pourra, en thèse générale, exprimer les petits changements de ces fonctions explicites de $y, z, u, \dots$ à la manière de différentielles totales (t. I, p. 83), c'est-à-dire les réduire, sauf écarts négligeables de l'ordre des carrés et produits de leurs variables, à des termes du premier degré en $y, z, u, \dots$; ce qui donnera évidemment aux équations différentielles du problème la forme linéaire (1), avec des seconds membres F_1, F_2, ... *finis*, c'est-à-dire beaucoup plus grands, d'ordinaire, que $A_1 y$, $B_1 z$, ...

On observera même que, si le système considéré n'est soumis qu'aux influences mutuelles de ses diverses parties, ou encore l'est, plus généralement, à des actions extérieures, mais ne variant, comme il a été dit, qu'avec son état (défini par y, z, u, ...), le temps x n'entrera pas dans les fonctions linéaires dont il s'agit; de sorte que les coefficients A_1, B_1, $C_1, \dots$, $A_2, \dots$, et les seconds membres F_1, $F_2, \dots$, se réduiront à des constantes. Or, le plus souvent, il arrivera que même les influences extérieures fonctions explicites de x seront assez modérées pour ne modifier les termes *déjà petits* $A_1 y$, $B_1 z, \dots$ que de fractions relativement faibles et dès lors négligeables de leurs valeurs,

ou pour n'ajouter des parties sensibles de l'ordre de ces termes, mais fonctions explicites de x, qu'aux seconds membres, *finis,* F_1, F_2, ...

Ainsi, les équations linéaires propres à exprimer les petits changements d'état physique d'un système de corps auront, en général, leurs coefficients constants et leurs seconds membres soit constants, soit fonctions de x, suivant que les influences extérieures agissant sur le système se trouveront elles-mêmes constantes ou variables.

387. — Cas d'équations linéaires sans seconds membres : formation d'intégrales soit par réduction ou agrandissement proportionnels, soit par addition d'autres intégrales.

Considérons d'abord le cas où les équations (1) sont, comme on dit, *sans seconds membres,* ou *homogènes,* c'est-à-dire ne contiennent pas de terme indépendant de y, z, u, ... Alors le système (1), réduit à

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + A_1 y + B_1 z + C_1 u + \ldots = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + A_2 y + B_2 z + C_2 u + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

jouit de deux propriétés capitales.

La première consiste en ce que, *si certaines fonctions, mises à la place de* $y, z, u, \ldots$, *le vérifient, les produits de ces fonctions par une même constante arbitraire le vérifieront également.* En effet, multiplions les équations (2) par une telle constante c, et il viendra

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d(cy)}{dx} + A_1(cy) + B_1(cz) + C_1(cu) + \ldots = 0, \\ \dfrac{d(cz)}{dx} + A_2(cy) + B_2(cz) + C_2(cu) + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

ce qui démontre bien le fait énoncé.

La seconde propriété, tout aussi évidente, consiste en ce que, *si plusieurs systèmes de fonctions,* que j'appellerai, les premières, y_1, z_1, $u_1, \ldots$, les deuxièmes, y_2, z_2, $u_2, \ldots$, les suivantes, y_3, z_3, u_3, ..., etc., *satisfont séparément aux équations proposées, les sommes respectives de ces fonctions, savoir*

$$(4)\quad \begin{cases} y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots, \\ z = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots, \\ u = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

les vérifieront également ou constitueront aussi des intégrales y, z,

$u, \ldots$ Il suffit, pour le reconnaître, d'ajouter ensemble les relations que l'on obtient en mettant successivement $y_1, z_1, u_1, \ldots; y_2, z_2, u_2 \ldots; y_3, z_3, u_3, \ldots$; etc., à la place de $y, z, u, \ldots$, dans l'une quelconque des équations (2), dans la première par exemple. Il vient, de la sorte,

$$(5) \quad \frac{d(y_1+y_2+y_3+\ldots)}{dx} + A_1(y_1+y_2+y_3+\ldots) + B_1(z_1+z_2+z_3+\ldots) + \ldots = 0;$$

ce qui fait bien voir que les valeurs (4) de $y, z, u, \ldots$ satisfont à l'équation considérée et vérifieraient de même les autres (2).

388. — **Conséquences de ces propriétés en Philosophie naturelle : principe de Daniel Bernoulli, sur la superposition des petits effets dans les phénomènes dynamiques.**

Les deux propriétés précédentes ont une haute portée dans *la théorie des petits changements physiques produits de part et d'autre d'un état dit permanent ou d'équilibre,* pour lequel $y, z, u, \ldots$ s'annuleraient à toutes les époques x ; ce qui, impliquant la possibilité d'un tel état fixe où sont réduits identiquement à zéro les premiers membres de (1), exige bien l'annulation des seconds membres $F_1, F_2, F_3, \ldots$, mais suppose aussi, par le fait même, l'absence d'actions extérieures fonctions explicites du temps x.

La première, exprimée par les équations (3), signifie que, *si l'on considère deux systèmes matériels ayant leurs changements d'état déterminés par les mêmes équations linéaires, et si, dans l'un d'eux, les valeurs initiales de $y, z, u, \ldots$ se trouvent être proportionnelles à ce qu'elles sont dans l'autre,* ou égalent les produits respectifs de celles-ci par une constante arbitraire c, *la même proportionnalité se maintiendra indéfiniment;* en sorte que les deux phénomènes étudiés resteront *semblables* l'un à l'autre durant toute leur évolution.

La seconde propriété, représentée par (5) en ce qui concerne la fonction y, exprime que, *étant donnés plusieurs systèmes matériels régis par les mêmes équations linéaires, si, dans l'un d'eux, les valeurs initiales des quantités $y, z, u, \ldots$ égalent les sommes respectives de ce qu'elles sont dans les autres, ces quantités $y, z, u, \ldots$ ne cesseront, à aucune époque, d'être, dans le premier système, les sommes de ce qu'elles seront au même instant dans les autres systèmes.* Ainsi, les phénomènes qu'offriront ces derniers se produiront *tous à la fois* dans le premier système, *en s'y superposant simplement,* c'est-à-dire sans que chaque phénomène cesse d'avoir lieu, pour son propre compte, comme s'il était seul.

Cette grande loi, découverte par Daniel Bernoulli en 1753, et dont la précédente, de proportionnalité, se déduirait en superposant des états égaux, est une des plus importantes de la Philosophie naturelle : on l'appelle le *principe de la superposition des petits mouvements ou des petits effets.* C'est elle qui explique, par exemple, comment de légers ébranlements produits en différentes régions de l'espace ou même en une seule région, tels que divers systèmes d'ondes à la surface d'un liquide, ou divers systèmes de vibrations soit sonores, dans les corps, soit lumineuses ou calorifiques, dans l'éther impondérable, etc., se propagent et se croisent sans se détruire mutuellement, mais de manière que chaque système conserve ou puisse du moins reprendre à l'occasion son individualité, et affecter ainsi séparément nos organes. Sans cette loi, nous ne pourrions ni distinguer, dans un mélange de sons, ceux qui proviennent d'une voix ou d'un corps connus, ni percevoir, dans la quantité prodigieuse des rayons lumineux traversant en tous sens un espace éclairé, ceux qui, envoyés par chaque objet, nous en fournissent l'image; et nos sensations les plus distinctes, celles de la vue et de l'ouïe, perdraient leur netteté, qu'elles doivent aussi, il est vrai (comme on verra plus loin, n° 460*), à la *propagation sans diffusion* des petits ébranlements émanés d'un centre dans les milieux *élastiques* à une ou trois dimensions, propriété résultant d'une *certaine homogénéité* des équations linéaires de ces mouvements.

La loi de superposition et, par suite, celle de proportionnalité qui s'y rattache, ne s'observeraient généralement plus si les variations d'état physique mesurées par y, z, u,... devenaient assez grandes pour rendre sensibles, dans les équations des phénomènes, les erreurs du second ordre ou au-dessus (c'est-à-dire comparables aux puissances ou aux produits y^2, y^3, ..., yz, ...) que suppose négligeables la réduction, à la forme linéaire, de ces équations; car alors celles-ci pourraient contenir, par exemple, des termes en y^2, et le dédoublement de y en deux parties y_1, y_2 entraînerait la décomposition de ces termes non plus seulement en deux analogues, ou affectés respectivement de y_1^2 et de y_2^2, mais en trois, dont l'un, affecté de $2y_1y_2$, ne correspondrait ni à y_1, ni à y_2, pris seuls.

Ainsi les applications du principe de D. Bernoulli au monde dans lequel nous vivons ne sont si fréquentes qu'à cause même de la *stabilité* assez grande atteinte par l'état physique de ce monde et indispensable à la conservation de nos organismes, stabilité ne permettant le plus souvent que de légères ruptures d'équilibre, ou de minimes quoique innombrables écarts de part et d'autre d'un état moyen presque permanent. Ces petits écarts y, z, u,..., sans troubler l'ordre ou, pour

ainsi dire, le repos de l'ensemble, suffisent pour en diversifier à l'infini l'aspect; et c'est, comme on le voit, par des phénomènes dont certaines lois au moins nous sont accessibles, vu leur simplicité proportionnée à la faiblesse de nos intelligences. L'intérêt, la beauté que nous trouvons à ces phénomènes, justement parce qu'ils nous paraissent à la fois *divers* et *simples,* ou *ordonnés* dans leur *multitude*, tiennent donc, en grande partie, à la forme linéaire de leurs équations, sans laquelle ils ne nous offriraient, le plus souvent, qu'un inextricable chaos.

389. — **Réduction des équations linéaires complètes aux équations sans seconds membres, quand on connaît l'une quelconque de leurs intégrales.**

Passons maintenant aux équations linéaires complètes (1). Si l'on en connaît une intégrale particulière ou, autrement dit, si l'on a pu former certaines fonctions Y, Z, U, ... de x qui, mises dans (1) à la place de y, z, u, ..., donnent

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dY}{dx} + A_1 Y + B_1 Z + C_1 U + \ldots = F_1, \\ \dfrac{dZ}{dx} + A_2 Y + B_2 Z + C_2 U + \ldots = F_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

il viendra, en retranchant celles-ci de (1),

$$(7)\quad \frac{d(y-Y)}{dx} + A_1(y-Y) + B_1(z-Z) + C_1(u-U) + \ldots = 0, \text{ etc.};$$

de sorte que les excédents, $y - Y$, $z - Z$, $u - U$, ..., des valeurs générales y, z, u,... des fonctions inconnues sur leurs valeurs particulières Y, Z, U, ..., seront régis par les équations (2), c'est-à-dire par les proposées privées de leurs seconds membres. Donc, *les intégrales générales des équations linéaires avec seconds membres s'obtiennent en ajoutant ou superposant un système quelconque d'intégrales particulières de ces équations aux intégrales générales qu'elles admettraient si l'on annulait leurs seconds membres.*

Observons que les relations (6) seront satisfaites par telles fonctions Y, Z, U, ... qu'on voudra, si l'on donne chaque fois, pour seconds membres F_1, F_2, F_3, ..., précisément les sommes

$$\frac{dY}{dx} + A_1 Y + B_1 Z + \ldots, \qquad \frac{dZ}{dx} + A_2 Y + B_2 Z + \ldots, \text{ etc.}$$

D'ailleurs, celles-ci se trouvant du premier degré par rapport à Y, Z,

U,... et à leurs dérivées premières, les valeurs de F_1, F_2, F_3,... seront multipliées par un facteur constant c, si l'on multiplie Y, Z, U,..., par ce facteur; d'où il suit que tout système de fonctions Y, Z, U,..., satisfaisant aux équations (6), continue, pourvu qu'on le multiplie par c, à les vérifier quand les seconds membres deviennent cF_1, cF_2,.... De même, les valeurs de F_1, ou de F_2,..., s'ajouteront simplement entre elles si l'on fait les sommes respectives de plusieurs systèmes de valeurs de Y, Z, U,...; et, par suite, *vice versa,* la décomposition de F_1, F_2, F_3,... en parties permettra de former une solution particulière, Y, Z, U...., en ajoutant des solutions particulières propres aux cas où F_1, F_2,... se réduiraient soit aux premières, soit aux secondes, etc., de ces parties. Bref, *les deux principes de proportionnalité et de superposition simple, que nous avons reconnus régir les intégrales d'équations linéaires sans seconds membres, pour des valeurs initiales des fonctions y, z, u,..., composées par réduction proportionnelle ou par addition d'autres valeurs initiales, s'appliquent également au mode de formation d'une intégrale particulière des équations avec seconds membres, quand ceux-ci reçoivent successivement diverses expressions proportionnelles les unes aux autres ou égales, les unes, aux sommes respectives des autres.*

390. — **Extension de la loi de superposition des petits effets aux phénomènes statiques ou d'état permanent et à leur combinaison avec les phénomènes dynamiques.**

Lorsqu'il s'agit d'un système matériel éprouvant de petits changements d'état physique, mesurés par y, z, u,..., sous l'action de causes étrangères de grandeur modérée, celles-ci (égales à zéro quand leurs effets $y, z, u,$... restent nuls) sont représentées uniquement par les valeurs que prennent les seconds membres F_1, F_2, F_3,..., dans les équations (1) à coefficients alors constants. Or, si ces causes étrangères deviennent invariables, il existera une solution particulière exceptionnellement simple et importante, savoir, celle où y, z, u,... seront, comme les coefficients et comme les seconds membres, indépendantes du temps x, et donneront ainsi $\frac{d(y, z, u, \ldots)}{dx} = 0$ ou réduiront les équations différentielles (1) à un simple système de n équations algébriques du premier degré à n inconnues y, z, u, ...

L'état représenté par cette solution s'appelle *état permanent* ou *d'équilibre,* et, comme la multiplication par c des valeurs de y, z, u,..., qui lui correspondent, ou l'addition respective de ces systèmes de valeurs pour plusieurs systèmes de valeurs de F_1, F_2, F_3,..., four-

nissent évidemment des résultats encore indépendants de x, il est clair que les principes de simple proportionnalité et de superposition s'y appliquent. Ces principes règlent donc les états permanents produits dans divers systèmes matériels, identiques de nature, mais soumis à des actions extérieures, soit proportionnelles dans plusieurs systèmes (quant à leurs expressions F_1, F_2, F_3, ...), soit égales, dans l'un d'eux, à leurs sommes respectives dans les autres: leurs effets permanents, définis par y, z, u, ..., seront ainsi ou proportionnels au rapport suivant lequel varieront F_1, F_2, F_3, ... d'un système à l'autre, ou simplement cumulés dans le système soumis à la fois aux influences extérieures agissant sur tous les autres. Alors il y aura superposition, non plus de mouvements, mais, encore, de petits effets. Et, vu d'ailleurs, dans le cas général d'états variables ou fonction du temps x, la réduction des équations avec seconds membres aux équations sans seconds membres par la simple substitution, aux écarts $y, z, u, \ldots$, de leurs excédents sur leurs valeurs d'état permanent, *les phénomènes dynamiques se succéderont,* si on les exprime par ces excédents, c'est-à-dire *si l'on y compte les écarts à partir de l'état permanent considéré, absolument comme l'auraient fait des phénomènes pareils* exprimés par y, z, u, ..., ou *évalués à partir de l'état de repos primitif, dans le système soustrait aux influences étrangères,* c'est-à-dire régi par les équations sans seconds membres.

391. — Forme des intégrales générales, pour les équations linéaires sans seconds membres.

Les lois de proportionnalité et de superposition conduisent immédiatement à la forme des intégrales générales des équations linéaires, privées de seconds membres.

Appelons respectivement $y_1, z_1, u_1, \ldots; y_2, z_2, u_2, \ldots; \ldots; y_n, z_n, u_n, \ldots$, n systèmes de valeurs, fonctions de x, pour les n quantités inconnues y, z, u, ..., c'est-à-dire n intégrales particulières.

Nous verrons plus loin comment on peut, dans les catégories les plus intéressantes d'équations linéaires, obtenir ces n systèmes de valeurs; mais nous admettrons ici qu'on les connaisse. Multiplions-les respectivement par n constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_n$; et puis ajoutons. Il viendra les nouvelles intégrales

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,\\ z &= c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_n z_n,\\ u &= c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_n u_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on considère les n équations (8), qui sont du premier degré soit en $c_1, c_2, \ldots, c_n$, soit en $y, z, u, \ldots$, et si on les résout par rapport à $c_1, c_3, \ldots, c_n$, le déterminant de ce système d'équations (ou dénominateur commun des expressions trouvées pour $c_1, c_2, \ldots, c_n$) ne s'annulera pas à l'époque initiale *quelconque* $x = x_0$, pourvu du moins qu'on ait évité de prendre des intégrales particulières $y_1, z_1, u_1, \ldots$, $y_2, z_2, u_2, \ldots$, etc., vérifiant identiquement la relation qu'exprime son égalité à zéro. Et il sera, en principe, toujours possible d'échapper à cet inconvénient. En effet, le déterminant dont il s'agit se trouve formé avec les *éléments* $y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$, etc., qu'on peut supposer tous indépendants les uns des autres, puisque des valeurs initiales de $y, z, u, \ldots$ sont susceptibles d'être quelconques. Donc les équations (8), en général *distinctes*, se résoudront sans difficulté par rapport à c_1, $c_2, \ldots, c_n$. C'est dire que l'on pourra prendre ces constantes telles que, à l'instant $x = x_0$, $y, z, u, \ldots$, reçoivent des valeurs choisies à volonté. Ainsi les formules (8) représentent les intégrales générales.

Résolues par rapport à $c_1, c_2, \ldots, c_n$, elles ne cesseront pas d'être du premier degré en $y, z, u, \ldots$, et s'écriront

$$(9)\qquad \begin{cases} M_1 y + N_1 z + P_1 u + \ldots = c_1, \\ M_2 y + N_2 z + P_2 u + \ldots = c_2, \\ M_3 y + N_3 z + P_3 u + \ldots = c_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

en y appelant $M_1, N_1, P_1, \ldots, M_2, N_2, \ldots$, etc. certaines fonctions explicites de la variable indépendante x seule, combinaisons rationnelles de $y_1, z_1, u_1, \ldots, y_2, z_2, u_2, \ldots$, etc. Or ces relations (9) sont évidemment les intégrales générales mises sous la forme normale $\varphi(x, y, z, u, \ldots) = c$. On peut les représenter toutes par la formule unique

$$My + Nz + Pu + \ldots = c.$$

Par conséquent, *les expressions générales*, (8), *de fonctions* y, z, $u, \ldots$ *régies par des équations linéaires sans seconds membres, sont homogènes du premier degré par rapport aux constantes arbitraires* (*convenablement choisies*) *qu'introduit l'intégration; et, de même, dans les équations intégrales correspondantes mises sous la forme normale* $\varphi = c$, *les valeurs* φ *des constantes sont homogènes du premier degré par rapport aux fonctions* $y, z, u, \ldots$.

Il suit de là que *les facteurs d'intégrabilité* $\frac{d\varphi}{d(y, z, u, \ldots)}$ *se réduisent, pour ces équations*, aux coefficients M, N, P, ..., c'est-à-dire *à des fonctions explicites de la variable indépendante* x *seule.*

392. — Passage au cas d'équations linéaires quelconques ou avec seconds membres : méthode générale de la variation des constantes.

Voyons maintenant comment on pourra, introduisant les seconds membres F_1, F_2, $F_3, \ldots$, effectuer l'intégration, supposé qu'on ait su la faire dans l'hypothèse $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0, \ldots$, c'est-à-dire qu'on ait réussi à former explicitement les seconds membres de (8) ou les premiers de (9).

Pour plus de généralité, soit

$$(10) \qquad \frac{dy}{dx} + f_1 = F_1, \qquad \frac{dz}{dx} + f_2 = F_2, \qquad \frac{du}{dx} + f_3 = F_3, \ldots$$

un système d'équations différentielles où $f_1, f_2, f_3, \ldots$, $F_1, F_2, F_3, \ldots$, désignent des fonctions quelconques de $x, y, z, u, \ldots$; et admettons qu'on ait intégré ces équations dans le cas où les seconds membres F_1, F_2, $F_3, \ldots$ se réduisent à zéro. On connaîtra donc, pour ce cas, les intégrales normales

$$(11) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, z, u, \ldots) = c_1, \\ \varphi_2(x, y, z, u, \ldots) = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(x, y, z, u, \ldots) = c_n, \end{cases}$$

dont l'une quelconque peut s'écrire $\varphi(x, y, z, u, \ldots) = c$; et les premiers membres des équations (10), multipliés respectivement par $\frac{d\varphi}{dy}\,dx$, $\frac{d\varphi}{dz}\,dx$, $\frac{d\varphi}{du}\,dx, \ldots$, puis ajoutés, donneront (p. 192) la différentielle totale exacte de la fonction φ. C'est dire que les équations proposées (10) elles-mêmes, ainsi multipliées soit par $\frac{d\varphi_1}{d(y, z, u, \ldots)}\,dx$, soit par $\frac{d\varphi_2}{d(y, z, u, \ldots)}\,dx$, $\ldots$, et ajoutées chaque fois, deviendront

$$(12) \qquad \begin{cases} d\varphi_1 = \left(F_1 \frac{d\varphi_1}{dy} + F_2 \frac{d\varphi_1}{dz} + F_3 \frac{d\varphi_1}{du} + \ldots\right) dx, \\ d\varphi_2 = \left(F_1 \frac{d\varphi_2}{dy} + F_2 \frac{d\varphi_2}{dz} + F_3 \frac{d\varphi_2}{du} + \ldots\right) dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Or, si les équations proposées sont linéaires, d'une part, leurs seconds membres F_1, F_2, F_3, $\ldots$ ne dépendront explicitement que de x, et, d'autre part, les facteurs d'intégrabilité des équations sans seconds membres, $\frac{d\varphi_1}{dy}$, $\frac{d\varphi_1}{dz}$, $\frac{d\varphi_1}{du}$, $\ldots$, se réduiront aux coefficients

M_1, N_1, $P_1, \ldots$, dont il a été parlé ci-dessus, coefficients également fonction de x seul. Les deuxièmes membres des équations (12) seront donc des différentielles de la forme $f(x)\,dx$; et de simples quadratures, effectuées à partir de la valeur initiale x_0 de x, permettront d'intégrer ces équations (12), qui donneront, en continuant à attribuer à y, z, u, ... leurs valeurs initiales du cas où s'annulaient les seconds membres :

$$(13)\quad \begin{cases} \varphi_1 = c_1 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \left(F_1 \frac{d\varphi_1}{dy} + F_2 \frac{d\varphi_1}{dz} + F_3 \frac{d\varphi_1}{du} + \ldots\right) dx, \\ \varphi_2 = c_2 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \left(F_1 \frac{d\varphi_2}{dy} + F_2 \frac{d\varphi_2}{dz} + F_3 \frac{d\varphi_2}{du} + \ldots\right) dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Donc *les facteurs, fonctions de la variable indépendante x seule, qui rendent intégrable un système d'équations linéaires sans seconds membres, rendent aussi intégrable le même système, complété par des seconds membres dépendant d'une manière donnée quelconque de cette variable x. Et les modifications qu'éprouvent alors les intégrales consistent dans l'addition, aux constantes arbitraires c_1, $c_2, \ldots, c_n$, de parties calculables en fonction de x au moyen de quadratures,* comme le montrent les seconds membres de (13); ce qui, dans le cas d'équations linéaires, laisse la forme normale des intégrales encore *linéaire* en y, z, $u, \ldots$, mais non plus *homogène*, vu l'adjonction d'un terme en x, savoir (au signe près) le dernier terme de chaque formule (13).

On voit que les intégrales obtenues (13) garderont leurs formes (11) du cas où il n'y avait pas de seconds membres, pourvu que, modifiant, sauf pour l'instant x_0, la signification des quantités c_1, $c_2, \ldots, c_n$, on y englobe les secondes parties en question, ou derniers termes de (13), qui les rendront *variables*.

Aussi le procédé d'intégration exposé, dû (au moins en principe) à Lagrange, s'appelle-t-il la *Méthode de la variation des constantes*. Et les équations (11) fourniront pour y, z, u, ..., en fonction de x et de leurs seconds membres, les expressions, (8) par exemple, qu'elles donnaient déjà quand F_1, F_2, F_3, ... s'annulaient ; mais, après substitution des seconds membres de (13) à ceux de (11), ces expressions, encore du premier degré en c_1, c_2, ..., c_n s'il s'agit d'équations différentielles linéaires, ne seront plus homogènes, par suite de l'accession d'un terme en x y provenant de la *variation des constantes*. Afin d'éviter toute confusion, nous désignerons, le cas échéant, par C_1,

$C_2, \ldots, C_n$ les constantes *devenues* variables, c'est-à-dire les seconds membres tout entiers de (13); et les anciennes constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ne seront plus alors que les *valeurs initiales* de $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Quelques exemples simples (n°s 396 à 399) éclairciront bientôt ce que pourraient avoir de trop vague, par leur généralité même, les considérations qui précèdent.

393*. — Absence de solutions singulières et d'intégrales asymptotes distinctes, dans les systèmes d'équations linéaires.

(Compléments, p. 260*.)

394. — Sur l'emploi de la méthode de la variation des constantes, pour intégrer par approximations successives des systèmes d'équations différentielles non linéaires.

Mais, revenant au système (10), supposons-le non linéaire. Alors on pourra toujours, dans les seconds membres de (12), qui auront la forme $f(x, y, z, u, \ldots)\,dx$, remplacer $y, z, u, \ldots$ par leurs valeurs (en x et $C_1, C_2, \ldots, C_n$) tirées des formules $C_1 = \varphi_1(x, y, z, u, \ldots)$, $C_2 = \varphi_2(x, y, z, u, \ldots), \ldots, C_n = \varphi_n(x, y, z, u, \ldots)$ définissant les paramètres ou variables auxiliaires $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Donc ces relations (12) deviendront des équations différentielles en $C_1, C_2, \ldots, C_n$; et, si l'on sait les intégrer, ou obtenir $C_1, C_2, \ldots, C_n$ en fonction de leurs valeurs initiales arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et de x, l'on aura encore résolu le problème en rendant variables d'une certaine manière, dans les intégrales (11) des équations sans seconds membres, les constantes arbitraires.

Si, par exemple, les seconds membres $F_1, F_2, F_3, \ldots$ sont presque constamment très petits à côté des fonctions $f_1, f_2, f_3, \ldots$, et que, par suite, les valeurs (12) de $dC_1, dC_2, \ldots, dC_n$ n'égalent que de minimes fractions des différentielles $dy, dz, \ldots$, données par (10), les quantités $C_1, C_2, \ldots, C_n$ conserveront à fort peu près leurs valeurs initiales $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pendant que $x, y, z, u, \ldots$ éprouveront des changements même très sensibles; et l'on pourra, dans les seconds membres de (12) devenus dépendants de $x, C_1, C_2, \ldots, C_n$, ne faire varier que x. Ces seconds membres, ainsi réduits, avec une certaine approximation relative, à la forme $f(x)\,dx$, seront alors intégrables, et de simples quadratures donneront par conséquent, d'une manière presque exacte si $x - x_0$ n'est pas trop grand, les petites ou lentes variations éprouvées par $C_1, C_2, \ldots$. Puis on portera dans les seconds membres de (12) les valeurs plus approchées de $C_1, C_2, \ldots$, obtenues de la sorte

en fonction de x; et il en résultera, par de nouvelles quadratures, des valeurs plus exactes encore de ces paramètres ou, conséquemment, de y, z, u, ... : d'où l'on passera encore de même, s'il y a lieu, au calcul de corrections de moins en moins imparfaites.

On voit que la méthode de la variation des constantes permet de résoudre, par ces sortes d'approximations successives déjà annoncées presque dès le début du Cours (t. I, p. 73), tous les problèmes dépendant d'équations différentielles, quand certaines altérations légères ou, du moins, assez peu graves, qu'on fait subir à celles-ci, suffisent pour les rendre directement intégrables. Alors les équations simplifiées qu'on substitue, à une première approximation, aux équations vraies du problème, donnent, en quelque sorte, les lois idéales ou *lois typiques* du phénomène; et l'on tient compte des écarts, appelés *perturbations,* qui existent entre ces lois idéales simples et les lois réelles, en faisant éprouver aux constantes arbitraires supposées invariables par les lois typiques, les lentes variations que fournit la méthode. C'est ainsi que, par suite de la faible masse des planètes comparativement à celle du Soleil, les équations différentielles de leurs mouvements se réduisent assez approximativement à ce qu'elles seraient si chaque planète ne se trouvait en rapport qu'avec le Soleil, cas où leurs intégrales sont aisées à obtenir, et résumées dans les lois de Képler assignant à chaque planète une orbite elliptique fixe, etc.; après quoi, des approximations de plus en plus compliquées, objet principal de la Mécanique céleste, indiquent comment les *perturbations* dues à la présence des autres planètes, ou à la forme des astres assimilés jusque-là à de simples points, rendent sans cesse *variables* tant l'orbite elliptique que la vitesse d'accroissement des aires décrites à son intérieur par le rayon vecteur de la planète, c'est-à-dire, en somme, les *constantes* du mouvement formulé d'après les lois de Képler.

Un exemple simple (n° 400) élucidera bientôt ces indications, et l'on en trouvera un second, plus difficile, au n° 419*.

395. — Équations linéaires d'ordre supérieur; cas particulier d'une équation unique et réduction d'un système quelconque à une telle équation pour chaque fonction inconnue.

Lorsqu'on transforme un système d'équations différentielles d'ordre quelconque en un système du premier ordre (p. 193) par la considération de fonctions auxiliaires égales à certaines dérivées des fonctions proposées, les équations qu'on introduit, comme, par exemple,

$\frac{dy}{dx} - y' = 0, \frac{dy'}{dx} - y'' = 0, \ldots,$ sont des équations linéaires, sans seconds membres et à coefficients constants. Donc, si le système proposé était linéaire, il ne cesse pas de l'être en devenant du premier ordre ; et il se trouve même soit sans seconds membres, soit à coefficients constants, quand le proposé l'est déjà. Ainsi toutes les réflexions et théories précédentes s'étendent d'elles-mêmes aux équations linéaires d'un ordre quelconque.

Considérons, par exemple, l'équation unique, et du $n^{\text{ième}}$ ordre en y,

$$(14) \qquad y^{(n)} + Ay^{(n-1)} + By^{(n-2)} + \ldots + Ly = F(x),$$

où les coefficients A, B, ..., L désignent, comme le second membre $F(x)$, des fonctions données de la variable indépendante x. Elle équivaudra au système linéaire de n équations du premier ordre, à n fonctions inconnues $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$,

$$(15) \qquad \begin{cases} \frac{dy}{dx} - y' = 0, \quad \frac{dy'}{dx} - y'' = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dy^{(n-2)}}{dx} - y^{(n-1)} = 0, \\ \frac{dy^{(n-1)}}{dx} + Ay^{(n-1)} + By^{(n-2)} + \ldots + Ly = F(x). \end{cases}$$

Il en résulte notamment que, si l'on pose d'abord $F(x) = 0$, l'expression générale de y, d'où des différentiations immédiates déduiront celles de $y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}$, sera de la forme

$$(16) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \qquad [\text{quand } F(x) = 0].$$

Mais il faudra, pour cela, que les n intégrales particulières y_1, $y_2, \ldots, y_n$ de l'équation (14) *prise sans second membre* soient distinctes, c'est-à-dire telles, que le système de n relations du premier degré en $c_1, c_2, \ldots, c_n$ formé par l'équation (16) et ses $n-1$ premières dérivées puisse être résolu par rapport aux constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ou donner les intégrales *normales,* et permettre, par conséquent, de choisir $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de manière à rendre arbitraires, pour $x = x_0$, les valeurs (*initiales*), $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, de la fonction y et de ses $n-1$ premières dérivées.

A l'inverse, si l'on donne non plus une équation linéaire (14), mais un système quelconque d'équations linéaires, qui, réduit au premier ordre, pourra être supposé le système (1) considéré déjà [p. 200], on en déduira facilement pour chaque fonction inconnue, y par exemple, une équation linéaire d'ordre n. Et celle-ci se trouvera soit dépourvue

de second membre, soit à coefficients A, B, ..., L constants, quand le système donné sera lui-même ou sans seconds membres F_1, F_2, ..., ou à coefficients A_1, B_1, ... constants. Différentions, en effet, l'expression de y' fournie par la première (1) et où y, z, u, ... ne figurent qu'au premier degré. Il viendra évidemment, pour y'', une expression, linéaire en y', z', u', ..., y, z, u, ..., qui, tout en conservant cette forme, ne contiendra plus que y, z, u, ... après substitution, à y', z', u', ..., de leurs valeurs tirées de (1). En outre, il est clair, d'une part, que cette expression n'aura pas de terme indépendant de y, z, u, ... si les équations (1) sont sans seconds membres, d'autre part, que y, z, u, ... s'y trouveront affectés de coefficients constants quand ceux de (1), A_1, B_1, C_1, ..., A_2, ..., le seront. Et l'on obtiendra des résultats analogues en procédant de même sur cette expression de y'', pour avoir y''', sur celle de y''', pour avoir y^{IV}, etc.; de sorte que toutes les dérivées de y, à l'infini, égaleront des fonctions linéaires de y, z, u, ... jouissant des propriétés désignées. Donc il suffira d'éliminer les $n-1$ fonctions z, u, ... entre les n équations du premier degré dont les seconds membres sont les dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$ et les premiers, leurs expressions en y, z, u, ... avec ou sans termes indépendants de ces variables, pour obtenir l'équation linéaire annoncée, du $n^{\text{ième}}$ ordre en y.

Comme exemple très simple, soit le système, à coefficients constants,

$$(17) \qquad y' - kz = F_1(x), \qquad z' + ky = F_2(x).$$

La première (17), différentiée, donnera $y'' - kz' = F_1'(x)$. Or par la substitution dans celle-ci, à z', de sa valeur $-ky + F_2(x)$ tirée de la seconde (17), il viendra

$$(18) \qquad y'' + k^2 y = F_1'(x) + kF_2(x),$$

équation d'où z est tout éliminé. De même, la différentiation de la seconde (17), suivie de l'élimination de y' par le moyen de la première, conduit, pour z, à la relation

$$(19) \qquad z'' + k^2 z = F_2'(x) - kF_1(x).$$

On voit que, si les seconds membres de (17) étaient nuls, une même équation différentielle du second ordre régirait les deux fonctions inconnues y et z, savoir $u'' + k^2 u = 0$, où u désignerait à volonté l'une ou l'autre.

Il est clair que, plus généralement, l'élimination d'une des deux

fonctions inconnues régies par deux équations linéaires du premier ordre simultanées conduira, pour l'autre fonction, à une équation linéaire de la forme

$$(20) \qquad y'' + Ay' + By = F(x),$$

c'est-à-dire du second ordre, et à coefficients A, B constants quand ceux des proposées le seront.

TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE LES PLUS SIMPLES.

396. — Exemple : intégration de l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre.

Appliquons en premier lieu les théories précédentes à l'équation linéaire du second ordre (20) [p. 215], en nous bornant même au cas de A, B constants. Ce cas, dont on doit à d'Alembert la solution générale (obtenue vers 1747), est d'une importance capitale dans les applications mécaniques et physiques.

Supposons d'abord le second membre $F(x)$ nul. Alors l'équation proposée (20) pourra s'écrire symboliquement

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + A\frac{d}{dx} + B\right)y = 0. \tag{21}$$

Préparons le trinôme symbolique entre parenthèses comme nous le ferions si $\frac{d}{dx}$ y désignait une vraie variable X et qu'il s'agît de convertir ce trinôme en une somme ou une différence de deux carrés pour obtenir, par exemple, les racines imaginaires ou réelles annulant $X^2 + AX + B$. Autrement dit, appelons -2α la constante A et $\pm\beta^2$ l'excédent positif ou négatif de l'autre constante B sur α^2; ce qui revient à se donner l'équation (21) sous la forme

$$y'' - 2\alpha y' + (\alpha^2 \pm \beta^2)y = 0, \qquad \text{ou} \qquad \left[\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^2 \pm \beta^2\right]y = 0. \tag{22}$$

Elle admettra les deux solutions particulières

$$\left\{\begin{array}{lll} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, & y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x, & \text{quand le signe de } \pm\beta^2 \text{ sera } +, \\ y_1 = e^{\alpha x}\operatorname{coh}\beta x, & y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sih}\beta x, & \text{quand le signe de } \pm\beta^2 \text{ sera } -, \end{array}\right. \tag{23}$$

comme on le vérifie sans difficulté par deux différentiations de ces valeurs, avec substitution soit de y_1, y'_1, y''_1, soit de y_2, y'_2, y''_2, à y, y', y'' dans l'équation (22) correspondante, ou, mieux encore, comme

on l'a déduit de transformations simplificatrices au t. I, p. 84*. Et l'intégrale générale sera, par suite, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, c'est-à-dire

$$(24) \quad \begin{cases} y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x), & \text{si le signe de } \pm\beta^2 \text{ est } +, \\ y = e^{\alpha x}(c_1 \operatorname{coh}\beta x + c_2 \operatorname{sih}\beta x), & \text{si le signe de } \pm\beta^2 \text{ est } -. \end{cases}$$

On remarquera que, dans le second cas, où l'expression de y contient un cosinus et un sinus hyperboliques, il suffit de poser $c_1 = 1$, $c_2 = \pm 1$, pour obtenir les deux intégrales particulières

$$e^{\alpha x}(\operatorname{coh}\beta x \pm \operatorname{sih}\beta x) = e^{\alpha x} e^{\pm\beta x},$$

c'est-à-dire $e^{(\alpha+\beta)x}$ et $e^{(\alpha-\beta)x}$, dont on formerait aisément l'intégrale générale, en les multipliant par deux constantes arbitraires et ajoutant. Or ces intégrales particulières $e^{(\alpha\pm\beta)x}$ auraient pu aussi se déduire directement de la seconde (22), qui, vu le signe $-$ de β^2, devient alors, par une décomposition immédiate de la différence des deux carrés symboliques en un produit,

$$(25) \qquad \left[\frac{d}{dx} - (\alpha \mp \beta)\right]\left[\frac{d}{dx} - (\alpha \pm \beta)\right] y = 0,$$

équation évidemment satisfaite quand on prend

$$(25\ bis) \qquad \frac{dy}{dx} - (\alpha \pm \beta) y = 0, \qquad \text{c'est-à-dire}, \qquad y = e^{(\alpha\pm\beta)x}.$$

Le cas le plus utile est celui où l'équation proposée (22) se trouve débarrassée de son second terme (en y'), circonstance réalisée naturellement, au moins à très peu près, dans la plupart des applications physiques, et résultant, quand il n'en est pas ainsi, d'une transformation facile (p. 256*), qui consiste à substituer à y la nouvelle fonction Y définie par la relation $y = e^{\alpha x}\mathrm{Y}$. Bornons-nous donc à ce cas, où la valeur de α s'annule. Les expressions (24) de y y deviennent

$$(26) \quad \begin{cases} y = \text{ soit } \quad c_1 \cos\beta x \ + c_2 \ \sin\beta x, \ \text{ soit } c_1 \operatorname{coh}\beta x + c_2 \ \operatorname{sih}\beta x; \\ \text{d'où} \\ y' = \text{ soit } -c_1\beta \sin\beta x + c_2\beta\cos\beta x, \ \text{ soit } c_1\beta\operatorname{sih}\beta x + c_2\beta\operatorname{coh}\beta x. \end{cases}$$

Comme l'équation proposée $y'' \pm \beta^2 y = 0$, où x ne figure pas explicitement, reste la même quand on change l'origine des x de manière à remplacer $x - x_0$ par x, il est permis de faire nulle la valeur initiale x_0 de x; et alors les équations (26), donnant $y = c_1$, $y' = c_2\beta$ pour $x = 0$, montrent que les constantes arbitraires c_1, c_2 représentent, l'une, la valeur initiale y_0 de la fonction, l'autre, le quotient par β de la valeur initiale y'_0 de sa dérivée, en sorte que les intégrales (26)

sont bien générales, ou permettent de choisir à volonté y et y' pour une valeur arbitraire de la variable.

Mettons-les sous la forme normale, afin d'obtenir les facteurs intégrants. A cet effet, nous éliminerons soit c_2, soit c_1, en multipliant l'équation de la seconde ligne (26), respectivement, soit par $-\frac{\sin\beta x}{\beta}$ ou $-\frac{\text{sih}\,\beta x}{\beta}$, soit par $\frac{\cos\beta x}{\beta}$ ou $\frac{\text{coh}\,\beta x}{\beta}$, et en ajoutant le résultat à l'équation de la première ligne, multipliée de même soit par $\cos\beta x$ ou $\text{coh}\,\beta x$, soit par $\sin\beta x$ ou $-\text{sih}\,\beta x$. Observons que

$$\cos^2\beta x + \sin^2\beta x = 1, \qquad \text{coh}^2\beta x - \text{sih}^2\beta x = 1,$$

et, après avoir changé les membres de place, il viendra

$$(27)\quad \begin{cases} c_1 = \text{soit} \quad y\cos\beta x - y'\dfrac{\sin\beta x}{\beta}, \quad \text{soit} \quad y\,\text{coh}\,\beta x - y'\dfrac{\text{sih}\,\beta x}{\beta}, \\ c_2 = \text{soit} \quad y\sin\beta x + y'\dfrac{\cos\beta x}{\beta}, \quad \text{soit} \quad -y\,\text{sih}\,\beta x + y'\dfrac{\text{coh}\,\beta x}{\beta}. \end{cases}$$

Les seconds membres de celles-ci sont les fonctions que nous appelons respectivement φ_1 et φ_2, ou dont les dérivées en y' constituent (p. 194) les facteurs intégrants de l'équation proposée $y'' \pm \beta^2 y = 0$, écrite $dy' \pm \beta^2 y\,dx = 0$. Et, en effet, l'expression $dy' \pm \beta^2 y\,dx$, multipliée par ces dérivées, qui sont

$$(28)\quad -\frac{\sin\beta x}{\beta} \text{ ou } -\frac{\text{sih}\,\beta x}{\beta} \text{ (pour } c_1\text{)}, \text{ et } \frac{\cos\beta x}{\beta} \text{ ou } \frac{\text{coh}\,\beta x}{\beta} \text{ (pour } c_2\text{)},$$

donne bien, identiquement, les différentielles totales des seconds membres de (27), comme le montre la différentiation de ceux-ci.

397. — Intégration de la même équation, mais avec second membre.

Si nous restituons actuellement le second membre $F(x)$ de l'équation, les principes exposés ci-dessus (p. 210) permettront de déduire la nouvelle intégrale de celle qui vient d'être obtenue pour le cas où $F(x)$ s'annulait, puisqu'ils nous apprennent que les mêmes facteurs d'intégrabilité y suffisent. Supposons, par exemple, afin d'utiliser les calculs précédents, l'équation débarrassée de son second terme, ou réduite à $y'' \pm \beta^2 y = F(x)$. Le système linéaire à intégrer d'après les principes dont il s'agit sera

$$(29)\qquad dy' \pm \beta^2 y\,dx = F(x)\,dx, \qquad dy - y'\,dx = 0.$$

Des facteurs intégrants respectifs $\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{dy'}$ et $\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{dy}$, devant multiplier, les uns, la première équation (29) et, les autres, la seconde, les deux premiers seuls, (28), que nous pouvons écrire $\frac{dC_1}{dy'}$ et $\frac{dC_2}{dy'}$ puisque nous convenons d'appeler C_1, C_2 les valeurs des deux fonctions $\varphi_1(x, y, y')$ et $\varphi_2(x, y, y')$, nous seront utiles ; car les deux derniers, dérivées en y des seconds membres C_1, C_2 de (27), et qui égaleraient soit $\cos\beta x$ ou $\text{coh}\,\beta x$, soit $\sin\beta x$ ou $-\text{sih}\,\beta x$, ne donneront rien dans les résultats, à cause de la valeur zéro du second membre de la deuxième équation considérée (29). Il suffit donc de multiplier la première (29), c'est-à-dire l'équation unique proposée, par les facteurs (28) ; ce qui, nous venons de le voir, change identiquement le premier membre de (29) en $d\varphi_1$ et $d\varphi_2$, ou en dC_1 et dC_2. Et, si l'on intègre alors les résultats à partir de l'instant initial $x = 0$ où C_1 et C_2, réduits à y_0 et à $\frac{y'_0}{\beta}$, ont des valeurs arbitraires données c_1 et c_2, il vient

$$(30)\quad \begin{cases} C_1 = c_1 - \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^x F(x)(\sin\beta x \text{ ou } \text{sih}\,\beta x)\,dx, \\ C_2 = c_2 + \dfrac{1}{\beta}\displaystyle\int_0^x F(x)(\cos\beta x \text{ ou } \text{coh}\,\beta x)\,dx. \end{cases}$$

Enfin, comme les relations (27), dont les premiers membres devenus variables s'appellent maintenant C_1 et C_2, ne sont qu'une autre forme des relations (26), ou reviennent à poser

$$(31)\quad \begin{cases} y = \text{soit}\quad C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x, \text{ soit } C_1\,\text{coh}\,\beta x + C_2\,\text{sih}\,\beta x, \\ y' = \text{soit} - C_1\beta\sin\beta x + C_2\beta\cos\beta x, \text{ soit } C_1\beta\,\text{sih}\,\beta x + C_2\beta\,\text{coh}\,\beta x, \end{cases}$$

il ne restera qu'à substituer les expressions (30) de C_1, C_2 dans celles-ci, ou même seulement dans la double équation de la première ligne (31), relative à y, pour avoir l'intégrale générale demandée, avec des valeurs initiales y_0 et y'_0, de la fonction y et de sa dérivée y', égales respectivement à c_1 et à $c_2\beta$.

On n'a guère à employer ces formules que dans des phénomènes sensiblement *périodiques* et à variations, y, *limitées*, dont l'expression ne comporte aucun des cosinus ou sinus hyperboliques figurant dans (31). Supposons donc que l'équation proposée soit seulement

$$(32)\qquad y'' + \beta^2 y = F(x).$$

Alors la formule (31) de y, restreinte à $C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x$, devient aussi simple que possible, après substitution des valeurs correspondantes (30) de C_1 et C_2, si l'on change sous les signes $\int$ le nom de la variable d'intégration x, afin de pouvoir, sans confusion, introduire sous ces signes des facteurs en x. Appelons cette variable, par exemple, ξ ; et, dans la différence

$$\sin\beta x \int_0^x F(\xi)\cos\beta\xi\, d\xi - \cos\beta x \int_0^x F(\xi)\sin\beta\xi\, d\xi,$$

il sera permis de faire passer les facteurs $\sin\beta x$, $\cos\beta x$ sous les signes $\int$, puis de réduire à une seule intégrale la différence des deux. Il viendra enfin, comme solution générale de (32),

$$(33) \qquad y = c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x + \frac{1}{\beta}\int_0^x F(\xi)\sin(\beta x - \beta\xi)\, d\xi.$$

Effectivement, deux différentiations successives en x de cette expression (33) de y, dans lesquelles on se souviendra de la règle établie plus haut (p. 161) pour différentier une intégrale définie à élément et *limites* variables, donnent

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} y' &= -c_1\beta \sin\beta x + c_2\beta \cos\beta x + \int_0^x F(\xi)\cos(\beta x - \beta\xi)\, d\xi, \\ y'' &= -c_1\beta^2 \cos\beta x - c_2\beta^2 \sin\beta x \\ &\qquad + F(x) - \beta \int_0^x F(\xi)\sin(\beta x - \beta\xi)\, d\xi; \end{aligned} \right.$$

et cette dernière valeur de y'', jointe au produit par β^2 de l'expression (33) de y, rend bien la somme $y'' + \beta^2 y$ égale à $F(x)$, conformément à (32).

On voit, en faisant $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ dans (33) et dans la première (34), que le dernier terme de (33), fourni par la variation des constantes, constitue pour l'équation proposée (32) une intégrale particulière *initialement nulle avec sa dérivée première* y'. La quadrature qu'exige le calcul de ce terme se fera évidemment sous forme finie par les principes exposés dans la XXIIe Leçon (pp. 23, 29 et 32), quand $F(\xi)$ se composera de termes proportionnels à des facteurs comme ξ^m, ou $\xi^m \cos n\xi$, ou $\xi^m \sin n\xi$ (avec m entier et positif), ou comme $e^{m\xi}\cos n\xi$ et $e^{m\xi}\sin n\xi$ (m et n désignant des nombres quelconques). Telle est donc la solution de l'équation proposée, que la méthode de la variation des constantes, appliquée en faisant varier celles-ci *à partir de*

l'instant initial $x = 0$, conduit à superposer à la solution générale $c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x$ de l'équation sans second membre.

398. — Cas où le second membre est soit constant, soit périodique.

Il existe deux cas spéciaux, d'une grande importance pratique, où la solution particulière la plus simple et la plus utile qu'admette l'équation (32) n'est pas celle dont il vient d'être parlé, mais bien une autre dans laquelle ne s'annulent pas, du moins ensemble, les valeurs initiales $y_0 = c_1$ et $y'_0 = c_2 \beta$ de y et y'.

Le premier, déjà abordé implicitement au n° 390 (p. 206), est celui où le second membre $F(x)$ se réduit à une constante K, et où, par suite, l'équation proposée, $y'' + \beta^2 y = K$, se trouve satisfaite en prenant pour y la valeur *constante* $\frac{K}{\beta^2}$. Cette solution particulière $y = \frac{K}{\beta^2}$, que nous savons représenter l'*état permanent* du phénomène régi par l'équation, se déduirait évidemment de (33) en la supposant réalisée dès l'origine, c'est-à-dire en faisant $c_1 = \frac{K}{\beta^2}$, $c_2 = 0$, ou $y_0 = \frac{K}{\beta^2}$, $y'_0 = 0$. Et en effet, le dernier terme de (33), vu la valeur K de $F(\xi)$, devient alors, par une intégration indéfinie immédiate, $\frac{K}{\beta^2}[\cos(\beta x - \beta\xi)]_{\xi=0}^{\xi=x} = \frac{K}{\beta^2}(1 - \cos \beta x)$; ce qui, joint à $c_1 \cos \beta x$, donne bien $y = \frac{K}{\beta^2}$.

Le deuxième cas est celui où le second membre $F(x)$ se compose de termes proportionnels à des cosinus ou sinus d'arcs fonctions linéaires de x, termes pouvant toujours se résoudre en groupes de la forme $M \cos nx + N \sin nx$, lesquels, par le choix de constantes K et γ telles que $M = K \cos \gamma$ et $N = K \sin \gamma$, se réduiront à la forme plus simple $K \cos(nx - \gamma)$. En langage ordinaire, une telle forme, $K \cos(nx - \gamma)$, et le mode de variation des quantités qu'elle représente, sont souvent qualifiés de *pendulaires*, du moins dans les phénomènes dynamiques où la variable appelée ici x désigne le temps : la raison en est qu'elle exprime à très peu près la suite des écarts (supposés assez petits) d'un *pendule*, de part et d'autre de sa verticale d'équilibre.

Ce cas comprend le précédent en supposant $n = 0$; et il comprend surtout celui d'un second membre *périodique*, car toute fonction $F(x)$ périodique, c'est-à-dire qui repasse par les mêmes valeurs

après un accroissement donné (appelé *période*) de la variable, peut se décomposer [p. 160*] en termes proportionnels soit aux cosinus, soit aux sinus dont la périodicité concorde avec la sienne, ou qui retrouvent leurs valeurs premières chaque fois qu'elle-même reprend celles qu'elle avait eues déjà. Si, plus généralement, les divers termes de $F(x)$ étaient proportionnels à des cosinus ou sinus ayant leurs périodes incommensurables entre elles, de manière à ne jamais repasser *tous à la fois* par les mêmes valeurs, les oscillations de ces termes de part et d'autre de zéro n'en rendraient pas moins $F(x)$ nul en moyenne, en exceptant celui, de valeur constante, qui correspondrait à $n=0$; et la fonction $F(x)$ serait ce qu'on peut appeler *irrégulièrement périodique*.

Dans tous ces cas, il est aussi naturel de former une intégrale offrant la périodicité *régulière* ou *irrégulière* de $F(x)$, qu'il l'était d'en former une constante quand $F(x)$ ne variait pas; et, vu le principe de superposition (n° 389, p. 206), il suffira de composer cette intégrale de celles, de l'espèce désignée, que l'on aurait pour chaque terme de $F(x)$, considéré séparément. Prenons ainsi $F(x)=K\cos(nx-\gamma)$ et, pour essayer d'abord l'hypothèse la plus simple, supposons la solution particulière cherchée, que j'appellerai Y, proportionnelle à $F(x)$. Donc faisons

$$\begin{cases} Y = aF(x) = aK\cos(nx-\gamma) \\ [\text{d'où } Y'' = -an^2K\cos(nx-\gamma) = -an^2F(x)] \end{cases}$$

dans l'équation différentielle devenue $Y''+\beta^2Y=F(x)$, en nous réservant de déterminer a de manière à la vérifier s'il est possible. Or c'est ce qui a lieu ; car, par la suppression du facteur commun $F(x)$, il vient $-an^2+\beta^2a=1$, ou $a=\frac{1}{\beta^2-n^2}$ et $Y=\frac{K}{\beta^2-n^2}\cos(nx-\gamma)$. Par suite, si nous appelons encore Y la *solution périodique* complète, pour le cas où le second membre donné $F(x)$ est lui-même une fonction *régulièrement* ou *irrégulièrement* périodique de la forme $\Sigma K\cos(nx-\gamma)$, nous aurons l'expression suivante de Y, se réduisant bien à $y=\frac{K}{\beta^2}$ lors d'un seul terme avec n et γ nuls :

$$(35)\qquad Y=\sum\frac{K}{\beta^2-n^2}\cos(nx-\gamma),\quad \text{quand}\quad F(x)=\Sigma K\cos(nx-\gamma).$$

L'excédent, $y-Y$, de la solution générale y sur cette solution périodique Y ne sera autre que l'intégrale, ayant la forme

$$M\cos\beta x+N\sin\beta x,$$

de l'équation différentielle prise sans second membre. Donc, *un phénomène régi par l'équation différentielle* $y'' + \beta^2 y = F(x)$, *avec un second membre* $F(x)$ *exprimant l'influence de causes extérieures périodiques, comporte, pour un état initial convenablement choisi, une marche affectée de leur propre périodicité* (*régulière ou irrégulière*), *marche qui n'est plus suivie pour tout autre état initial, mais de part et d'autre de laquelle la marche effective oscille alors comme elle le fait autour de l'état de repos naturel quand les causes étrangères n'existent pas, ou autour de l'état permanent quand elles sont constantes.*

399. — **Idée des phénomènes qui se règlent soit par la permanence, soit par la périodicité.**

En général, l'équation $y'' + \beta^2 y = 0$, pour le phénomène soustrait aux influences extérieures, n'est qu'approximative, en ce sens qu'on y néglige non seulement des termes de l'ordre des carrés et produits de y ou de ses dérivées, termes réellement insensibles lorsque la quantité y reste fort petite, mais surtout des termes linéaires comme y'' ou comme $\beta^2 y$, et ayant seulement leurs coefficients, d'ailleurs constants, assez faibles pour qu'on puisse les supposer nuls à une première approximation. C'est par quelques-uns de ces termes respectivement proportionnels à $y, y', y'', y''', \ldots$ (mais dont on peut abstraire les deux affectés de y et y'', en les supposant déjà compris dans l'équation $y'' + \beta^2 y = 0$ avant sa division par le coefficient de y'') que s'exprimeront les *résistances passives, frottements*, etc., inséparables de tout phénomène dynamique, qui amènent, au bout de temps x plus ou moins longs, la fin des changements non entretenus dans les corps par des actions extérieures, c'est-à-dire l'évanouissement tout au moins asymptotique des oscillations que représente l'intégrale générale approchée $y = c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x$.

Or, lorsqu'on tient compte de ces petits termes linéaires du premier membre et que, d'ailleurs, des causes extérieures périodiques introduisent un second membre $F(x)$ composé de parties comme

$$K \cos(nx - \gamma),$$

l'équation continue à admettre, pour chacune d'elles supposée seule à tour de rôle, une solution périodique Y, proportionnelle non plus, généralement, à $K \cos(nx - \gamma)$, mais à $K \cos(nx - \gamma - \delta)$, où l'arc $nx - \gamma - \delta$ du cosinus *retarde* en quelque sorte, sur celui, $nx - \gamma$, du second membre, d'une certaine quantité constante δ. Autrement

dit, l'on posera la formule, à deux indéterminées a et δ ou $a\cos\delta$ et $a\sin\delta$,

$$(36)\quad \begin{cases} Y = aK\cos(nx-\gamma-\delta) \\ \quad = (a\cos\delta)K\cos(nx-\gamma)+(a\sin\delta)K\sin(nx-\gamma), \\ \text{pour} \\ F(x) = K\cos(nx-\gamma). \end{cases}$$

Les dérivées Y', Y'', Y''', ... se composeront évidemment, comme Y, de deux termes, où l'unique facteur variable sera, pour l'un, $\cos(nx-\gamma)$, pour l'autre, $\sin(nx-\gamma)$; de sorte que tout le premier membre de l'équation se réduira à deux pareils termes. Il suffira donc d'égaler le premier de ceux-ci au second membre $K\cos(nx-\delta)$, en identifiant à K son coefficient (fonction linéaire connue de $a\cos\delta$, $a\sin\delta$), et d'égaler le second à zéro, par l'annulation du coefficient total analogue de $\sin(nx-\gamma)$: ce qui donnera bien les deux équations nécessaires pour déterminer $a\cos\delta$ et $a\sin\delta$. La seconde sera même vérifiée en prenant simplement $\sin\delta=0$, ou Y proportionnel à $K\cos(nx-\gamma)=F(x)$, si le premier membre ne contient, avec y, que les dérivées d'ordre pair y'', y^{iv}, ..., comme il arrivait quand ce premier membre était $y''+\beta^2 y$; car le seul facteur variable figurant alors dans Y, Y'', Y^{iv}, ... sera $\cos(nx-\gamma)$, et il ne restera que l'équation en $a\cos\delta=\pm\sqrt{a^2}$. Enfin, $F(x)$ devenant une somme $\Sigma K\cos(nx-\gamma)$, régulièrement ou irrégulièrement périodique, Y, exprimé par

$$\Sigma aK\cos(nx-\gamma-\delta),$$

offrira bien une périodicité de même nature, quoique δ et a soient, d'un terme à l'autre, variables en fonction de n.

Par exemple, dans le cas le plus simple, les résistances passives ajoutent à l'équation sans second membre $y''+\beta^2 y=0$, un terme de la forme $2\varepsilon y'$, et d'un coefficient *positif* 2ε assez faible pour que le carré de sa moitié ε soit entièrement négligeable à côté de β^2. Alors l'équation différentielle sans second membre,

$$(37)\quad y''+2\varepsilon y'+\beta^2 y=0, \quad \text{ou, sensiblement,} \quad y''+2\varepsilon y'+(\varepsilon^2+\beta^2)y=0,$$

a pour intégrale générale, d'après la première (24) [p. 217] où il faut faire ici $\alpha=-\varepsilon$,

$$(38)\quad y=e^{-\varepsilon x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x):$$

le facteur exponentiel décroissant $e^{-\varepsilon x}$ y entraîne bien l'*extinction* graduelle des oscillations exprimées par le facteur trigonométrique $c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x$, qui, seul, constituait l'intégrale quand on avait

$y'' + \beta^2 y = 0$. Et si l'on introduit un second membre $K\cos(nx - \gamma)$, la substitution, à y, y', y'', de la dernière expression (36) de Y et de ses deux premières dérivées, dans le trinôme $y'' + 2\varepsilon y' + \beta^2 y$ qu'il faut alors égaler à $K\cos(nx - \gamma)$, donnera les deux équations

$$(39)\quad a[(\beta^2 - n^2)\cos\delta + 2\varepsilon n \sin\delta] = 1, \qquad (\beta^2 - n^2)\sin\delta - 2\varepsilon n\cos\delta = 0.$$

Or la deuxième montre que $\tang\delta$, quotient de $2\varepsilon n$ par $\beta^2 - n^2$, est comparable au rapport de ε à n (en écartant le cas exceptionnel où n et β seraient presque égaux) et qu'on peut, sauf erreur de l'ordre des puissances supérieures de ce rapport, poser simplement

$$\delta = \frac{2n^2}{\beta^2 - n^2}\frac{\varepsilon}{n},$$

après quoi, la première (39) est de même réductible à $(\beta^2 - n^2)a = 1$, ou donne $a = \frac{1}{\beta^2 - n^2}$, comme si le *coefficient d'extinction* ε n'existait pas. Et il vient, en définitive,

$$(40)\quad \begin{cases} Y = \sum \dfrac{K}{\beta^2 - n^2}\cos\left(nx - \gamma - \dfrac{2\varepsilon n}{\beta^2 - n^2}\right), \\ \text{pour} \\ F(x) = \Sigma K\cos(nx - \gamma). \end{cases}$$

D'ailleurs, les écarts $y - Y$ existant entre l'intégrale générale y et cette solution périodique Y vérifieront l'équation (37), ou seront, d'après (38), de la forme $e^{-\varepsilon x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$; ainsi ils s'atténueront graduellement suivant les mêmes lois que l'expression (38) de y dans le corps abandonné à lui-même.

On voit, en comparant les deux formules (35) et (40), que l'introduction du petit terme représentatif des résistances passives n'a pas modifié d'une manière bien appréciable la *solution périodique*, pas plus qu'elle n'a changé, tant que les valeurs de x sont modérées, l'expression sensiblement périodique des écarts $y - Y$, où le facteur $e^{-\varepsilon x}$ reste longtemps très peu inférieur à l'unité par suite de la petitesse de ε. Et à une époque ultérieure quelconque, la même forme approchée des excédents $y - Y$ persiste encore, avec des coefficients $Me^{-\varepsilon x}$, $Ne^{-\varepsilon x}$ de plus en plus réduits, il est vrai, mais d'une variation toujours fort lente. Enfin, le facteur $e^{-\varepsilon x}$, devenu évanouissant quand x a beaucoup grandi, rend alors négligeables ces écarts $y - Y$, quelles qu'aient été les circonstances initiales marquées par les constantes arbitraires M, N ; et une intégrale *quelconque*, y, finit ainsi par se confondre *asymptotiquement* avec la solution *périodique* Y. C'est ce

qu'on exprime, dans le langage ordinaire, en disant que le phénomène *se règle par périodicité*, comme les causes qui l'entretiennent, tandis qu'il se réglerait *par permanence* si ces causes étaient invariables, ou que l'on eût $F(x) = \text{const}$.

Un tel *régime* devient cependant impossible (en tant que soumis à des lois aussi simples) dans un cas remarquable. C'est celui où la différence entre β^2 et l'une des valeurs de n^2 serait assez faible, pour faire dépasser à la fonction Y censée exprimée par (40), en atténuant le dénominateur correspondant $\beta^2 - n^2$, la limite de la petitesse admise qui, seule, justifie la forme linéaire donnée à l'équation du phénomène. Ce cas plus complexe, et qui échappe ainsi à notre analyse par suite seulement d'une grandeur exagérée des oscillations ou variations qu'y atteint y, se trouve donc caractérisé par une *égalité* exacte ou presque exacte *des périodes* (liées, l'une, à β, l'autre, à n) des deux fonctions, $c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x$ et $K\cos(nx - \gamma)$, exprimant, la première, les oscillations *naturelles* du phénomène dans le corps abandonné à lui-même et, la seconde, les variations périodiques d'une des influences extérieures données.

Une pareille concordance ne pouvant qu'être fort rare, c'est, en général, la formule (40) ou même, sensiblement, la formule plus simple (35), qui, pour les grandes valeurs de x, donnera, quelles qu'aient été les circonstances initiales, l'expression *asymptotique* approchée d'un mouvement régi à très peu près par l'équation différentielle $y'' + \beta^2 y = \Sigma K \cos(nx - \gamma)$.

Certains phénomènes, comme, par exemple, l'échauffement ou le refroidissement d'un petit solide immergé dans un liquide à température uniforme et constante, ne comportent pas de périodicité quand on les soustrait à toute influence extérieure variable ; car l'état physique y change toujours dans un même sens, jusqu'à l'*extinction* finale. L'équation *type* qui les gouverne n'est alors que du premier ordre : elle a la forme $y' + \beta^2 y = 0$, au lieu de $y'' + \beta^2 y = 0$, et elle admet pour intégrale générale $y = ce^{-\beta^2 x}$. Il est clair que, *entretenus*, au contraire, par des causes extérieures périodiques $\Sigma K \cos(nx - \gamma)$, ou désormais régis par l'équation $y' + \beta^2 y = \Sigma K \cos(nx - \gamma)$, ces mêmes phénomènes tendront encore vers un état périodique, défini par une intégrale, $Y = \Sigma a K \cos(nx - \gamma - \delta)$, que l'on formera comme il a été expliqué après la formule (36), et auquel, encore, ils parviendront asymptotiquement après des écarts ayant eu l'expression, $ce^{-\beta^2 x}$, de la quantité physique, considérée dans le système soustrait aux causes variables dont il s'agit.

La plupart des faits dynamiques sont, il est vrai, beaucoup trop

complexes pour pouvoir être définis, avec une certaine précision, au moyen d'une seule fonction y du temps; et de là résulte, sauf dans des conditions particulièrement heureuses, l'insuffisance de la présente analyse, pour le calcul de bien des phénomènes, que celle-ci ne fait, de la sorte, qu'esquisser. Mais il lui reste justement l'avantage de mettre en vue, dans des équations linéaires très simples des deux premiers ordres, comme les *lois typiques* et élémentaires de ces *établissements de régime,* par périodicité régulière ou surtout irrégulière approchant de la permanence, que la nature nous offre sans cesse, spécialement dans les mouvements astronomiques, ainsi que dans toutes les sortes d'écoulement des fluides, et que révèle aussi la marche des machines industrielles.

400. — Exemple de l'intégration approchée d'une équation non linéaire, par la méthode de la variation des constantes.

D'une équation linéaire avec second membre, passons maintenant à une équation non linéaire, afin de donner un exemple aussi simple que possible de la manière dont on pourra l'intégrer par approximations successives, après l'avoir provisoirement réduite à une autre, intégrable sous forme finie.

Nous supposerons que, x désignant le temps et y la coordonnée, à considérer, d'un mobile dont les écarts de part et d'autre de la situation $y = 0$ resteront assez faibles, il s'agisse d'un mouvement où la dérivée y'' de la vitesse y' soit une fonction donnée de l'espace y, nulle pour $y = 0$ et développable au moyen de la formule de Mac-Laurin, entre les limites dont il s'agit, en une série très rapidement convergente, $-\beta^2 y + Ey^2 + Fy^3 + \ldots$, ayant son premier coefficient négatif. L'équation à intégrer sera donc, si on ne laisse dans le second membre que les termes très petits devant $\beta^2 y$,

$$(41) \qquad y'' + \beta^2 y = Ey^2 + Fy^3 + \ldots.$$

Comme l'on pourra, à une première approximation, prendre $y'' = -\beta^2 y$, ou poser $y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x$ avec C_1 et C_2 réduits à deux constantes c_1, c_2, cette valeur de y, substituée dans le second membre de (41), lui donnera bien la forme $F(x)$ et permettra, par conséquent, d'exprimer C_1 et C_2, devenus maintenant variables, par les formules (30) [bornées aux sinus et cosinus circulaires], que des approximations ultérieures seront même susceptibles, en faisant mieux connaître $F(x)$, de préciser davantage.

Bornons-nous au calcul de la deuxième approximation, dans l'hy-

pothèse que les temps x soient comptés à partir d'une époque où le mobile se trouvait, à l'origine, animé d'une certaine vitesse $y'_0 = k$. La première valeur approchée de y sera donc [vu les données $y_0 = 0$, ou $c_1 = 0$, et y'_0 ou $c_2\beta = k$] $y = \frac{k}{\beta}\sin\beta x$; et, par suite, la valeur analogue du second membre de (41), borné de même à sa partie principale (en k^2), sera $F(x) = \frac{Ek^2}{\beta^2}\sin^2\beta x$. Les formules (30) [p. 219] donneront

$$(42)\qquad \begin{cases} C_1 = -\dfrac{Ek^2}{\beta^3}\displaystyle\int_0^x \sin^3\beta x\,dx, \\ C_2 = \dfrac{k}{\beta} + \dfrac{Ek^2}{\beta^3}\displaystyle\int_0^x \sin^2\beta x\cos\beta x\,dx. \end{cases}$$

Substituons, dans la première de celles-ci, à $\sin^3\beta x\,dx$, l'expression équivalente

$$(1-\cos^2\beta x)\frac{d\cos\beta x}{-\beta}$$

et, dans la seconde, à $\cos\beta x\,dx$ la différentielle $\frac{d\sin\beta x}{\beta}$: alors les intégrations seront immédiates, et nous trouverons

$$(43)\qquad C_1 = \frac{Ek^2}{\beta^4}\left(-\frac{2}{3} + \cos\beta x - \frac{\cos^3\beta x}{3}\right), \qquad C_2 = \frac{k}{\beta} + \frac{Ek^2}{\beta^4}\frac{\sin^3\beta x}{3}.$$

Il en résulte, pour la valeur demandée $C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$ de y, en remplaçant d'abord $\sin^4\beta x$ par $(1-\cos^2\beta x)^2$ et réduisant, puis enfin en substituant $\frac{1+\cos 2\beta x}{2}$ au carré $\cos^2\beta x$:

$$(44)\qquad \begin{cases} y = \dfrac{k}{\beta}\sin\beta x + \dfrac{Ek^2}{3\beta^4}(1-\cos\beta x)^2 \\ = \dfrac{k}{\beta}\sin\beta x + \dfrac{Ek^2}{2\beta^4}\left(1 - \dfrac{4}{3}\cos\beta x + \dfrac{1}{3}\cos 2\beta x\right). \end{cases}$$

On remarquera que, développée, cette expression de y, où le terme de première approximation, proportionnel à $\sin\beta x$, est périodique et nul en moyenne, comprend de plus, à la seconde approximation, outre un terme de même période, proportionnel à $\cos\beta x$, un autre terme proportionnel à $\cos 2\beta x$ ou, par conséquent, de période moitié moindre, et le terme constant $\frac{Ek^2}{2\beta^4}$. Ce dernier, ayant seul sa valeur moyenne différente de zéro, définit évidemment la *situation moyenne* du mobile, ou ce qu'on peut appeler le *centre de gravité* de sa tra-

jectoire. Donc ce centre ne se confond plus, dès la deuxième approximation, avec la *situation de repos* ou *d'équilibre* $y = 0$.

401*. — **Emploi d'équations linéaires du second ordre pour le calcul de certaines intégrales définies, qui se reproduisent par deux ou par quatre différentiations.**

(Compléments, p. 261*.)

402*. — **Autre exemple : intégrales définies de Laplace.**

(Compléments, p. 263*.)

403*. — **Intégration de l'équation à second membre du problème de la charge roulante.**

(Compléments, p. 265*.)

404* — **Intégration d'une autre équation à second membre, pour le calcul d'une fonction qui joue un rôle capital dans la théorie des ondes produites à la surface d'une eau tranquille, par l'émersion d'un solide ou par un coup de vent.**

(Compléments, p. 266*.)

QUARANTIÈME LEÇON.

*ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECONDS MEMBRES, SOIT D'ORDRE SUPÉRIEUR, SOIT SIMULTANÉES : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS.

405*. — **Intégration d'une équation linéaire homogène d'ordre quelconque, à coefficients constants.**

(Compléments, p. 271*.)

406*. — **Cas singulier où l'équation caractéristique a des racines égales. — Réflexion générale sur la forme des résultats, quand il s'agit d'un système quelconque d'équations linéaires sans seconds membres et à coefficients constants.**

(Compléments, p. 273*.)

407*. — **Formation directe des solutions simples, pour tout un système d'équations linéaires à coefficients constants.**

(Compléments, p. 276*.)

408*. — **Expression la plus simple qui en résulte pour les intégrales générales d'un tel système sans seconds membres.**

(Compléments, p. 280*.)

409*. — **Formes plus spéciales imposées aux solutions simples ou doubles par la nature particulière des phénomènes à exprimer.**

(Compléments, p. 282*.)

410*. — **Application aux petits mouvements vibratoires d'un système élastique; possibilité d'y reproduire un état initial arbitraire en superposant de simples mouvements pendulaires synchrones, etc.**

(Compléments, p. 285*.)

411*. — **Méthode d'Euler pour l'intégration des équations linéaires sans seconds membres et à coefficients constants.**

(Compléments, p. 289*.)

412*. — Détermination des constantes arbitraires, effectuée par Cauchy.

(Compléments, p. 291*.)

413*. — Exemple : intégration d'équations du quatrième ordre, pour le calcul d'intégrales définies qui se reproduisent, en valeur absolue, par quatre différentiations.

(Compléments, p. 297*.)

QUARANTE ET UNIÈME LEÇON.

* SUITE DE L'ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS VARIABLES QUE L'ON SAIT INTÉGRER OU SOUS FORME FINIE, OU EN SÉRIE, OU PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES FONCTIONS CYLINDRIQUES, ETC.

414*. — **De quelques cas où s'intègre sous forme finie une équation linéaire sans second membre et à coefficients variables; équations homogènes par rapport à x, y, dx, dy, d^2y, d^3y, etc.**

(Compléments, p. 301*.)

415*. — **Formation d'équations linéaires ayant leurs intégrales de forme finie; équations de Jacobi.**

(Compléments, p. 302*.)

416*. — **Intégration des équations linéaires par les séries; exemple sur une équation du quatrième ordre, qui se présente dans la théorie du mouvement vibratoire transversal d'une barre droite de largeur constante à coupe verticale parabolique, comme sont les balanciers des machines à vapeur.**

(Compléments, p. 304*.)

417*. — **Intégration par le moyen d'intégrales définies; exemple tiré de l'équation du second ordre qui revient à celle de Riccati.**

(Compléments, p. 306*.)

418*. — **Idée des fonctions de Fourier et de Bessel, ou fonctions cylindriques : leurs expressions en intégrales définies et en séries.**

(Compléments, p. 308*.)

419*. — **Calcul approché des mêmes fonctions quand leur variable est**

assez grande, au moyen de leurs expressions asymptotiques complétées grâce à la méthode de la variation des constantes.

(Compléments, p. 315*.)

420*. — Résolution rapide d'équations transcendantes où figurent les fonctions cylindriques.

(Compléments, p. 320*.)

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON.

*DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET DE LEUR INTÉGRATION SOUS FORME FINIE : ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

421*. — **Des équations aux dérivées partielles : idée de leur utilité.**

(Compléments, p. 322*.)

422*. — **Signification des équations aux dérivées partielles; existence et étendue de leurs intégrales générales, dans les cas où une des variables indépendantes peut être choisie comme variable principale.**

(Compléments, p. 323*.)

423*. — **Des cas où soit une variable désignée, soit même aucune des variables figurant dans les équations, ne peut jouer le rôle de variable principale.**

(Compléments, p. 327*.)

424*. — **Description des surfaces définies par une équation du premier ordre, au moyen de courbes, dites caractéristiques, ne dépendant que de cette équation et de données relatives à leur point de départ.**

(Compléments, p. 329*.)

425*. — **L'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre se réduit toujours à celle d'un système d'équations différentielles.**

(Compléments, p. 331*.)

426*. — **Forme plus simple de l'intégrale, quand l'équation est linéaire par rapport aux dérivées de la fonction inconnue.**

(Compléments, p. 333*.)

427*. — **De quelques cas où l'on sait ramener l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à celle d'équations différentielles; systèmes de Jacobi, linéaires par rapport aux dérivees.**

(Compléments, p. 334*.)

428*. — Exemples de l'intégration d'équations du premier ordre, linéaires par rapport aux dérivées de la fonction inconnue.

(Compléments, p. 336*.)

429*. — Exemple d'une équation non linéaire : surfaces développables, ou enveloppes d'une série de plans; enveloppe d'une suite de surfaces, etc.

(Compléments, p. 339*.)

430*. — Intégrales complètes et solution singulière d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

(Compléments, p. 343*.)

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON.

* SUITE DE L'INTÉGRATION, EN TERMES FINIS, DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES : ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

431*. — **Équations aux dérivées partielles du second ordre : méthode de Monge pour l'intégration de certaines d'entre elles.**

(Compléments, p. 346*.)

432*. — **Premier exemple : intégration de l'équation du second ordre qui caractérise les surfaces développables.**

(Compléments, p. 349*.)

433*. — **Deuxième exemple : équations aux dérivées partielles du second ordre immédiatement réductibles à des équations différentielles.**

(Compléments, p. 350*.)

434*. — **Aperçu des transformations d'Euler, de Laplace et de Legendre.**

(Compléments, p. 353*.)

435*. — **Intégration de l'équation de d'Alembert ou des cordes vibrantes, et d'une autre équation plus générale, qui régit les phénomènes de propagation d'ondes dans un milieu en mouvement.**

(Compléments, p. 358*.)

436*. — **Analogie de l'équation des cordes vibrantes, et, en général, des équations linéaires aux dérivées partielles, avec les équations différentielles linéaires, au point de vue des principes de superposition et de proportionnalité : cas où il y a égalité des racines de l'équation caractéristique.**

(Compléments, p. 360*.)

437*. — **De la détermination des fonctions arbitraires : applications aux ondes propagées dans un sens unique, et lois de deuxième approximation de ces ondes.**

(Compléments, p. 362*.)

438*. — Extension, à certaines équations et à certains systèmes aux dérivées partielles, des méthodes de décomposition des intégrales en solutions simples, et d'élimination, fondées sur l'emploi des facteurs symboliques $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \dots,$ et qui sont générales dans le cas d'équations différentielles linéaires sans seconds membres, à coefficients constants, amenées à leur forme normale.

(Compléments, p. 366*.)

QUARANTE-QUATRIÈME LEÇON.

*PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, SPÉCIAUX AUX PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE QUI CONCERNENT LES CORPS DE GRANDEUR FINIE : ÉTUDE D'ÉTATS VARIABLES EN FONCTION DU TEMPS.

439*. — **Idée générale des équations de la Physique mathématique.**

(Compléments, p. 374*.)

440*. — **Sur leur réduction à des systèmes d'une infinité d'équations différentielles, formées pour un réseau de points régulièrement alignés en files parallèles aux axes.**

(Compléments, p. 377*.)

441*. — **Démonstration, par des procédés spéciaux, de la détermination des problèmes de Physique mathématique.**

(Compléments, p. 381*.)

442*. — **Résolution générale des problèmes concernant l'état variable des corps, par la superposition d'une infinité de solutions simples, affectées, chacune, d'une constante arbitraire.**

(Compléments, p. 387*.)

443*. — **Formation directe des solutions simples; détermination de leurs coefficients respectifs, d'après l'état initial donné.**

(Compléments, p. 390*.)

444*. — **Difficultés subsistant encore dans cette question, et inconvénients de la solution indiquée.**

(Compléments, p. 394*.)

445*. — **Ses avantages, dans les cas où quelques-unes des solutions simples ont une influence prédominante; régularisation de certains phénomènes par extinction des termes à variation rapide.**

(Compléments, p. 396*.)

446*. — **Exemple d'états variables exprimés par des séries : corde vibrante fixée aux deux bouts, et refroidissement d'une barre par ses extrémités, maintenues à la température zéro.**

(Compléments, p. 397*.)

QUARANTE-CINQUIÈME LEÇON.

* SUITE DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE POUR LES CORPS DE DIMENSIONS FINIES : ÉTUDE D'ÉTATS PERMANENTS.

447*. — Extension des méthodes précédentes aux problèmes d'état permanent, quand une des coordonnées peut y jouer le rôle de variable principale : exemple relatif aux températures stationnaires d'un prisme.

(Compléments, p. 402*.)

448*. — Même problème des températures stationnaires pour un espace plan soit limité par un rectangle curviligne, soit annulaire : sa solution générale, dans le cas où l'on en connaît une solution particulière simple.

(Compléments, p. 407*.)

449*. — Exemples : secteur d'une couronne circulaire ; rectangles limités par deux familles d'arcs de cercles ou par une famille de lemniscates et une famille d'hyperboles, etc.

(Compléments, p. 413*.)

Note sur la réduction de Riemann, pour certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.

(Compléments, p. 418*.)

450*. — Solution soit approchée, soit quelquefois même exacte, au moyen d'expressions entières et finies, du problème des températures stationnaires pour un espace plan limité par un contour quelconque, et réduction, à ce problème, d'autres questions importantes de la Physique mathématique.

(Compléments, p. 419*.)

QUARANTE-SIXIÈME LEÇON.

* PROCÉDÉS D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, POUR LES CORPS D'UNE ÉTENDUE CENSÉE INFINIE : ÉQUATIONS NE CONTENANT QUE DES DÉRIVÉES D'UN MÊME ORDRE PAIR, ET QUI S'INTÈGRENT PAR DES POTENTIELS.

451*. — **Dans quelles circonstances les dimensions d'un corps peuvent être supposées infinies; des simplifications qui s'y produisent.**

(Compléments, p. 427*.)

452*. — **Intégration par les potentiels, dans des cas où les équations indéfinies, linéaires et à coefficients constants, ne contiennent que des dérivées paires d'un même ordre. — Premier exemple : problème de l'écoulement d'un liquide par un petit orifice, etc.**

(Compléments, p. 429*.)

453*. — **Deuxième exemple : équilibre intérieur d'un solide élastique dont les parties profondes sont maintenues fixes, pendant que sa surface éprouve des pressions ou des déplacements connus, s'annulant hors d'une région restreinte où ils sont arbitraires; forme générale de la solution.**

(Compléments, p. 430*.)

454*. — **Premier cas, où ce sont les déplacements à la surface que l'on donne.**

(Compléments, p. 432*.)

455*. — **Deuxième cas, où ce sont les pressions extérieures que l'on connaît.**

(Compléments, p. 434*.)

456*. — **Troisième et quatrième cas, où l'on se donne, à la surface, soit les composantes tangentielles des déplacements avec la composante**

normale des pressions, soit la composante normale des déplacements avec les composantes tangentielles des pressions.

(Compléments, p. 437*.)

457*. — **Troisième exemple : équilibre d'élasticité d'un solide, sous l'action de forces extérieures quelconques s'exerçant sur une partie de son volume très éloignée de sa surface, pendant que celle-ci est maintenue fixe.**

(Compléments, p. 441*.)

458*. — **Quatrième exemple : état permanent des températures, dans un corps pourvu, à son intérieur, de sources constantes de chaleur, et maintenu, loin de ces sources, à une température uniforme.**

(Compléments, p. 443*.)

459*. — **Cinquième exemple : intégration de l'équation du son par les potentiels sphériques.**

(Compléments, p. 443*.)

460*. — **Résultats immédiats de cette intégration : propagation du mouvement sans dissémination le long des trajets suivis ; ce qui entraîne la conservation, à toute distance, des caractères de l'état initial et rend possible la précision ainsi que l'infinie variété des sensations auditives et visuelles.**

(Compléments, p. 448*.)

Remarques sur la même intégration et sur ses résultats, pour les cas où il y a moins de trois coordonnées. (Note.)

(Compléments, p. 450*.)

QUARANTE-SEPTIÈME LEÇON.

* SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE : ÉQUATIONS OU FIGURENT DES DÉRIVÉES D'ORDRES DIFFÉRENTS, ET QUI S'INTÈGRENT PAR LES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIIIe LEÇON.

461*. — **Équations aux dérivées partielles, qui deviennent homogènes, relativement à l'ordre des dérivées, lorsque chaque couple de différentiations effectuées par rapport à certaines variables y est comptée pour une seule différentiation.**

(Compléments, p. 452*.)

462*. — **De l'intégration de ces équations par les intégrales définies de la XXXIIIe Leçon, quand ce sont les différentiations relatives aux coordonnées qui vont ainsi par couples; et, d'abord, formation de solutions particulières, contenant tout autant de fonctions arbitraires.**

(Compléments, p. 453*.)

463*. — **Exemples : formation de telles intégrales pour l'équation de la chaleur et pour celles du mouvement transversal des plaques ou des barres élastiques.**

(Compléments, p. 457*.)

464*. — **Usage de ces intégrales, pour les cas où la distance r à un centre fixe d'émanation a le rôle de variable principale.**

(Compléments, p. 460*.)

465*. — **Premier exemple : échauffement d'une barre, à travers sa base, par le rayonnement d'un milieu à température variable donnée.**

(Compléments, p. 466*.)

466*. — **Cas particulier de l'échauffement par contact.**

(Compléments, p. 468*.)

467*. — Deuxième exemple : échauffement d'un corps indéfini, à une, deux ou trois dimensions, par l'introduction continue, en un de ses points, de quantités données de chaleur.

(Compléments, p. 471*.)

468*. — Sur l'intégration des mêmes équations indéfinies dans d'autres cas, et notamment dans celui où le temps *t* est variable principale : application au problème du refroidissement des milieux.

(Compléments, p. 478*.)

469*. — Application au problème de la dissémination du mouvement transversal, le long d'une barre indéfinie.

(Compléments, p. 484*.)

470*. — Application à la dissémination du mouvement transversal dans une plaque indéfinie.

(Compléments, p. 487*.)

QUARANTE-HUITIÈME LEÇON.

*SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE : ÉQUATIONS QUI S'INTÈGRENT PAR L'EMPLOI SIMULTANÉ DES POTENTIELS ET DES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIIIe LEÇON.

471*. — **Intégrations effectuables par l'emploi simultané des potentiels et des intégrales définies de la XXXIIIe Leçon. — Équations du principal problème où elles se présentent, et qui est celui des ondes produites, à la surface d'un liquide pesant, par l'émersion d'un solide ou par une impulsion superficielle.**

(Compléments, p. 496*.)

472*. — **Premier cas, n'exigeant pas de potentiel sphérique : ondes produites dans un canal étroit ou propagées suivant un seul sens horizontal.**

(Compléments, p. 498*.)

473*. — **Équation qui y régit les déformations de la surface libre et la marche des ondes.**

(Compléments, p. 503*.)

474*. — **Deuxième cas, où devient nécessaire un potentiel sphérique : ondes produites dans un bassin et propagées suivant les deux sens horizontaux.**

(Compléments, p. 505*.)

475*. — **Équation qui y règle les déformations de la surface libre et le transport apparent des ondes.**

(Compléments, p. 510*.)

QUARANTE-NEUVIÈME LEÇON.

*RÉSULTATS GÉNÉRAUX CONCERNANT LA NATURE DES INTÉGRALES, DANS LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS OU MILIEUX INDÉFINIS; EMPLOI DE LA FORMULE DE FOURIER POUR RÉSOUDRE CES PROBLÈMES.

476*. — **Des solutions simples naturelles, dans les problèmes relatifs aux corps ou milieux indéfinis.**

(Compléments, p. 516*.)

Exemple d'un problème d'état non permanent où il n'y a pas de variable principale : températures d'un milieu sillonné par une source calorifique. (Note.)

(Compléments, p. 517*.)

477*. — **Double raison de la différence de nature existant entre ces solutions simples et celles des problèmes relatifs aux corps limités.**

(Compléments, p. 522*.)

478*. — **Leur formation possible par la formule de Fourier, au moyen de certaines des solutions simples convenant aux corps limités.**

(Compléments, p. 524*.)

Sur l'intégration générale, en séries d'exponentielles et par la formule de Fourier, de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. (Notes.)

(Compléments, pp. 526* et 528*.)

479*. — **Exemple de cette formation dans le problème de températures stationnaires résolu au n° 452*.**

(Compléments, p. 529*.)

480*. — **Exemples de la même formation, dans les problèmes du refroidissement des milieux et de la dissémination du mouvement transversal le long d'une barre ou à la surface d'une plaque.**

(Compléments, p. 532*.)

CINQUANTIÈME LEÇON.

CALCUL DES VARIATIONS.

481. — But du calcul des variations.

Les équations soit différentielles, soit aux dérivées partielles, admettent encore une application importante, qui fera l'objet de notre dernière Leçon. Elle consiste à déterminer la forme que doivent recevoir certaines fonctions, graduellement altérables et arbitraires, du moins entre des limites ou sous des conditions désignées, pour rendre maximum ou minimum une intégrale définie, soit simple, soit multiple, dont les divers éléments se trouvent dépendre des valeurs successives de ces fonctions. Des problèmes célèbres de Géométrie et de Mécanique, résolus d'abord, vers la fin du XVII[e] siècle, par des procédés spéciaux dont on verra plus loin un exemple (n° 493), ont donné naissance à cette dernière branche de l'Analyse, qu'Euler et Lagrange organisèrent définitivement, sous le nom de *Calcul des variations*, vers le milieu du siècle suivant.

Pour nous former une idée précise de son but, imaginons que, devant considérer dans le plan xOy [p. 248], entre un point connu A dont l'abscisse x est $O\alpha = a$ et un autre point connu B dont l'abscisse plus grande est $O\beta = b$, une courbe arbitrairement variable d'ailleurs, ou, ce qui revient au même, une infinité de courbes comme AMB, définies chacune par la fonction qui exprime en x leur ordonnée y, l'on donne en outre une fonction bien déterminée $f(x, y, y')$ de cette abscisse x, de l'ordonnée y et de quelques-unes des dérivées successives de celle-ci, dérivées que nous supposerons, pour plus de simplicité, se réduire à la première y', ou au coefficient angulaire $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{HN}}{\text{MH}}$ de la tangente MT menée au point considéré quelconque $M(x, y)$; enfin, que l'on demande de choisir la courbe AMB, c'est-à-dire la fonction inconnue y de x, de manière à rendre l'intégrale $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ le plus grande ou le plus petite possible, savoir, ou constamment plus

grande, ou constamment plus petite pour cette courbe AMB que pour toute autre infiniment voisine, comme AM′B. Obtenir ainsi, entre des limites fixées a, b, la fonction y de x qui fait atteindre son

Fig. 59.

maximum ou son minimum à une intégrale $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ dépendant de la forme de cette fonction, tel est, *dans les conditions les plus simples,* le problème général du calcul des variations.

482. — Sa méthode, considérée comme cas limite de la règle usuelle pour les maxima et minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes.

L'intervalle $b - a = \alpha\beta$ des deux limites se composant d'une infinité d'intervalles élémentaires dx, tels que PQ, compris entre des points de division de $\alpha\beta$ infiniment voisins définis chacun par leur abscisse x, et toute courbe qui va de A à B se trouvant évidemment caractérisée au moyen de ses ordonnées PM, QN, ... tirées par tous ces points de division, il est clair que la somme à étudier $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ constitue en réalité une fonction d'une infinité de variables, savoir, de toutes les ordonnées PM, QN, ..., existant entre αA et βB. Or ces ordonnées sont mutuellement indépendantes, en ce sens du moins qu'il n'existe aucune relation permettant de calculer l'une en fonction des autres. On pourra donc, malgré la complication introduite par une telle infinité de variables, essayer d'appliquer la règle ordinaire des maxima et minima (t. I, p. 171).

A cet effet, on cherchera l'accroissement total qu'éprouve la fonction considérée quand on fait changer infiniment peu chaque variable, autrement dit, quand on allonge chaque ordonnée PM d'une très petite quantité positive ou négative MM′; et, après avoir exprimé cet

accroissement de l'intégrale *à la manière d'une différentielle totale*, c'est-à-dire *en y isolant* la partie de l'accroissement qui correspond à l'augmentation MM' prise par *chaque* variable indépendante PM, il faudra égaler à zéro le terme ainsi obtenu, ou plutôt le coefficient dont s'y trouvera affectée l'augmentation MM' de la variable.

On appelle *variation* de l'ordonnée y, et l'on représente par δy, cette augmentation MM' donnée à chaque variable $y = \text{PM}$. On ne peut pas la représenter par dy, ni la nommer *différentielle;* car cette désignation s'applique déjà au changement $\text{HN} = dy$ qu'éprouve l'ordonnée *le long d'une même courbe* pour une augmentation infiniment petite $\text{PQ} = dx$ de l'abscisse. Il est d'ailleurs évident que la variation $\delta y = \text{MM}'$, qui devient NN' pour l'ordonnée suivante QN, sera, comme y, une fonction de x, ou, autrement dit, qu'elle variera d'une abscisse à l'autre et d'un élément à l'autre de l'intégrale.

La nouvelle courbe AM'B ayant ainsi pour ordonnée $y + \delta y$, le coefficient angulaire de sa tangente sera $\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta y}{dx}$; et l'on voit que, pour une même valeur de x, il dépassera le coefficient angulaire y', relatif à la première courbe, de la quantité $\frac{d\delta y}{dx}$; celle-ci s'appelle, naturellement, la *variation* de la dérivée y'. Et, de même, la variation de chaque élément $f(x, y, y')dx$ de l'intégrale sera l'accroissement qu'il éprouvera quand, sans changer ni x, ni dx, on passera de la courbe AMB à la courbe AM'B, variation évidemment égale à

$$\left[f\left(x, y + \delta y, y' + \frac{d\delta y}{dx}\right) - f(x, y, y')\right] dx,$$

ou à

$$\left[\frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dy'}\frac{d\delta y}{dx}\right] dx = \frac{df}{dy}\, dx\,\delta y + \frac{df}{dy'}\, d\delta y. \tag{1}$$

Enfin, la *variation* de l'intégrale proposée, qu'on représente par $\delta \int_a^b f(x, y, y')dx$, sera la somme des variations de tous ses éléments, puisque, par hypothèse, les limites a, b sont fixes et que, pour toutes les courbes AMB, AM'B, ..., le champ dx des éléments reste le même tant en situation qu'en grandeur. On aura donc

$$\delta \int_a^b f(x, y, y')\, dx = \int_{x=a}^{x=b} \frac{df}{dy}\, dx\,\delta y + \int_{x=a}^{x=b} \frac{df}{dy'}\, d\delta y. \tag{2}$$

Or il est facile de mettre en évidence, dans la dernière intégrale de cette relation, le coefficient total qui multiplie chaque variation δy,

telle que MM'. Comme $d\delta y$ exprime la différence, NN' — MM', de deux variations consécutives, chaque variation indépendante, MM' par exemple, paraît dans deux éléments de l'intégrale en question, savoir, dans celui, $\frac{df}{dy'}(\mathrm{NN'}-\mathrm{MM'})$, qui est relatif à l'intervalle $dx = \mathrm{PQ}$ compté à partir de l'abscisse actuelle $\mathrm{OP} = x$, et dans celui qui est relatif à l'intervalle précédent, compris entre les abscisses $x - dx$ et x, élément où le facteur $d\delta y$ exprime l'excédent de MM' sur la variation précédente et où $\frac{df}{dy'}$ a pour valeur, sensiblement, sa valeur actuelle diminuée de sa différentielle $d\frac{df}{dy'}$ corrélative à un accroissement dx de la variable. En résumé, la variation $\delta y = \mathrm{MM'}$ est multipliée par $\frac{df}{dy'} - d\frac{df}{dy'}$ dans l'un des deux éléments considérés, et par $-\frac{df}{dy'}$ dans l'autre; ce qui donne en tout le produit $-\left(d\frac{df}{dy'}\right)\delta y$.

Il en serait de même pour toutes les autres valeurs de δy entre A et B, à l'exception des deux variations extrêmes, savoir celles des ordonnées αA, βB, variations dont on peut ne pas s'occuper ici puisqu'on les suppose nulles. Ainsi le dernier terme de (2) revient à

$$(3)\qquad \int_{x=a}^{x=b}\left(-d\frac{df}{dy'}\right)\delta y.$$

On voit par cet examen direct comment le terme en question, où figurait la variation *non indépendante* $\delta y' = \frac{d\delta y}{dx}$, se transforme de manière à ne plus contenir que les variations *indépendantes* ou *arbitraires* δy. Or on serait arrivé au même résultat et, en quelque sorte, mécaniquement, en intégrant par parties l'expression $\frac{df}{dy'}d\delta y$ placée sous le signe $\int$, ou, ce qui revient au même, en écrivant

$$(4)\qquad \frac{df}{dy'}\,d\delta y = d\left(\frac{df}{dy'}\,\delta y\right) - \delta y\, d\,\frac{df}{dy'}$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \int_{x=a}^{x=b}\frac{df}{dy'}\,d\delta y = \left(\frac{df}{dy'}\,\delta y\right)_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b}\left(d\,\frac{df}{dy'}\right)\delta y.$$

En effet, cette expression se trouve réduite à son dernier terme, qui

n'est autre que (3), par l'annulation supposée de δy aux deux limites, annulation entraînant celle du terme intégré $\frac{df}{dy'}\delta y$.

C'est donc au moyen d'intégrations par parties, dans lesquelles ils prennent pour facteurs non intégrés les facteurs multipliant sous les signes $\int$ une différentielle de variation, que les géomètres parviennent facilement à éliminer les variations non arbitraires égales à de telles différentielles (ou aux dérivées correspondantes) prises par rapport aux variables d'intégration.

En résumé, remplaçons le dernier terme de (2) par sa valeur ainsi réduite (3), et l'expression définitive de la variation de $\int_a^b f(x,y,y')\,dx$, sous la forme voulue d'une différentielle totale, sera

$$(6)\qquad \delta\int_a^b f(x,y,y')\,dx = \int_{x=a}^{x=b}\left(\frac{df}{dy}\,dx - d\frac{df}{dy'}\right)\delta y.$$

D'après la règle énoncée des maxima et minima, il faudra y égaler à zéro le coefficient de chaque variation δy; ce qui donnera une infinité d'équations comprises dans la formule

$$(7)\qquad \frac{df}{dy}\,dx - d\frac{df}{dy'} = 0.$$

En d'autres termes, la relation (7) devra être vérifiée en tous les points de la courbe AMB : ce sera l'*équation différentielle* de cette courbe. Comme la fonction f et, par suite, les dérivées partielles $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dy'}$ dépendent généralement de x, y et y', la différentielle complète $d\frac{df}{dy'}$ sera $\left(\frac{d^2f}{dx\,dy'} + \frac{d^2f}{dy\,dy'}y' + \frac{d^2f}{dy'^2}y''\right)dx$, et l'équation (7), en y supprimant le facteur commun dx, deviendra

$$(8)\qquad \frac{df}{dy} - \frac{d^2f}{dx\,dy'} - \frac{d^2f}{dy\,dy'}y' - \frac{d^2f}{dy'^2}y'' = 0.$$

On voit qu'elle est du second ordre. Son intégration fera donc connaître la ligne AMB demandée; car les deux constantes arbitraires qu'elle introduira se détermineront en exprimant que la courbe passe par les points donnés A et B, ou qu'on doit y avoir $y = \alpha A$ pour $x = a$ et $y = \beta B$ pour $x = b$.

483*. — Justification directe de cette méthode.

(Compléments, p 536*.)

484. — Exemple : surface de révolution dont l'aire est minimum entre deux cercles parallèles donnés.

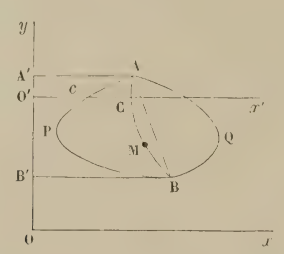
Proposons-nous, comme exemple, de mener entre les deux points donnés A, B (*fig.* 60) la ligne AMB qui, par sa rotation autour de l'axe des y, engendre la surface de révolution minima. Les circonférences décrites ayant ici l'expression $2\pi x$, cette aire est

$$2\pi x\,ds = 2\pi x\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

pour chaque élément ds de courbe; par suite, abstraction faite du coefficient constant 2π, l'intégrale à rendre minimum sera $\int x\,ds$ ou $\int x\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

Et d'abord, si la distance mutuelle des deux points A, B se trouve assez peu grande comparativement à leurs distances AA' et BB' de l'axe des y, le minimum cherché existera bien. Il est évident, en effet, que, parmi les lignes menées de A à B dans le plan des xy, celles qui s'éloigneront beaucoup de la droite AB et seront situées, les unes, comme APB, entre cette droite AB et sa projection A'B'

Fig. 60.



sur l'axe de la rotation, les autres, comme AQB, au delà de AB, ne pourront, tant les premières que les secondes, manquer de décrire autour de Oy des surfaces supérieures en étendue à l'aire engendrée par AB ou par les courbes plus ou moins voisines de AB. Il y aura donc l'une de celles-ci, comme ACMB, qui répondra au minimum demandé ou qui, du moins, ne décrira pas plus de surface qu'aucune autre ; et si, en exprimant que la variation de l'aire engendrée est nulle au passage de cette courbe à ses voisines, nous obtenons pour son ordonnée y une fonction déterminée de l'abscisse x, la ligne ainsi définie répondra bien à l'énoncé ou sera celle dont la révolution autour de l'axe des y décrit la surface la plus petite.

Observons encore que cette courbe jouira évidemment, dans toutes

ses parties, c'est-à-dire entre deux quelconques de ses points, de la même propriété de minimum; sans quoi son arc compris entre les deux points où elle cesserait d'en jouir devrait être remplacé par un autre dont l'aire engendrée serait moindre. Si donc il arrive que la courbe cherchée comprenne plusieurs segments, CA et CB, par exemple, ayant en partie même projection sur l'axe des x, on pourra former son équation différentielle en considérant *séparément* ces segments CA, CB comme dans le cas où leur point inconnu de jonction C serait une extrémité donnée; de manière que, sur chaque segment, l'abscisse x se trouve apte à servir de variable indépendante et même croisse sans cesse, d'un bout à l'autre, comme on l'a admis ci-dessus en présentant sous la forme $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ l'intégrale proposée.

Nous aurons donc ici, sur chaque segment CA ou CB,

$$f(x, y, y') = x\sqrt{1+y'^2}$$

et, par suite,

$$\frac{df}{dy} = 0, \qquad \frac{df}{dy'} = \frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Alors l'équation différentielle (7), réduite à $d\frac{df}{dy'} = 0$, s'intégrera immédiatement et donnera, pour chaque segment CA ou CB,

$$\frac{df}{dy'} = \text{une constante}.$$

D'ailleurs, cette constante sera commune, sauf le signe, aux deux segments contigus CA, CB; car, à leur point de jonction C (où $y' = \pm\infty$), le rapport $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ se réduit à ± 1, et, si l'on appelle c l'abscisse positive de ce point, l'expression de $\frac{df}{dy'}$ s'y réduit à $\pm c$, forme qu'elle peut évidemment prendre toujours, même quand il n'y a pas de sommet comme C ou que tout l'arc AMB appartient à un seul segment. Donc, en élevant au carré, puis résolvant par rapport à $dy^2 = y'^2\,dx^2$, on trouve, pour *toute* la courbe cherchée ACB, l'équation différentielle *unique*

$$(9) \qquad \frac{x^2 y'^2}{1+y'^2} = c^2 \qquad \text{ou} \qquad dy^2 = \frac{c^2\,dx^2}{x^2 - c^2}.$$

Tirons enfin la valeur $\pm c\frac{dx}{\sqrt{x^2-c^2}}$ de dy, positive de C en A, né-

gative de C en B, et qui, d'après la formule (26) de la page 50, est la différentielle de l'expression $\pm c[\log(x+\sqrt{x^2-c^2})-\log c]$ ou $\pm c \log \frac{x+\sqrt{x^2-c^2}}{c}$ nulle au point de départ C de chaque branche. Appelons c' l'ordonnée de ce point de départ, inconnue comme son abscisse c, et une intégration immédiate de $d(y-c')=dy$, effectuée à partir de C le long de chacun des deux segments, donnera

$$y-c'=\pm c \log \frac{x+\sqrt{x^2-c^2}}{c},$$

ou, pour l'équation finie générale de toute la courbe,

$$\left(\frac{y-c'}{c}\right)^2=\left(\log \frac{x+\sqrt{x^2-c^2}}{c}\right)^2. \tag{10}$$

Les deux constantes arbitraires c, c' qu'a introduites l'intégration se détermineront, comme il a été dit (p. 251), en faisant passer la courbe par les deux points donnés A et B. Une fois qu'elles sont connues, cette équation (10) se simplifie beaucoup si l'on adopte pour axe des x la perpendiculaire $O'Cx'$ menée par le sommet C à l'axe Oy de la rotation et pour unité de longueur la distance $O'C=c$ du même sommet à ce dernier axe. Ces choix reviennent, en effet, à prendre $c'=0$, $c=1$; d'où il résulte, au lieu de (10), en extrayant d'ailleurs les racines carrées des deux membres,

$$\pm y=\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Or passons des logarithmes aux nombres : nous aurons

$$x+\sqrt{x^2-1}=e^{\pm y};$$

et si nous résolvons enfin par rapport à x, en isolant d'abord le radical $\sqrt{x^2-1}$ qu'une élévation au carré fait ensuite disparaître, il viendra

$$x=\frac{e^{\pm 2y}+1}{2e^{\pm y}}=\frac{1}{2}(e^{\pm y}+e^{\mp y})=\operatorname{coh} y. \tag{11}$$

La courbe, évidemment symétrique de part et d'autre de l'axe $O'Cx'$, représentée par cette équation a reçu le nom de *chaînette,* parce que, si on la dispose de manière que l'axe $O'Cx'$ soit dirigé verticalement et vers le haut, elle dessine la forme d'équilibre d'un fil pesant homogène, fixé à ses deux extrémités. Une de ses propriétés

nous l'avait déjà fait connaître dans les *Compléments* (p. 63*). C'est Meusnier qui, vers 1776, lui a découvert celle d'engendrer la surface de révolution minima.

485*. — Extension de la méthode au cas d'une intégrale multiple; problème général des surfaces à aire minima, reliant un contour donné.

(Compléments, p. 538*.)

486. — Maxima et minima relatifs des intégrales; problèmes sur les courbes isopérimètres.

Nous avons supposé, jusqu'ici, complètement arbitraire entre les deux limites données $x = a$, $x = b$, la variation élémentaire δy de la fonction y dont dépend l'intégrale étudiée $\int_a^b f(x, y, y') \, dx$; car il s'agissait, au fond, de chercher les maxima ou minima *absolus* d'une fonction de toutes les valeurs successives de y *entre* ces limites, et rien, à part la condition de variation graduelle incapable de constituer une relation précise, ne restreignait l'indépendance mutuelle de ces valeurs. Mais admettons maintenant que les variables dont dépend l'intégrale, réduites encore aux valeurs d'une seule fonction y ou, parfois même, comprenant aussi celles d'autres fonctions inconnues, doivent vérifier d'après l'énoncé certaines équations dans lesquelles entreront soit quelques-unes de ces variables, savoir, par exemple, les valeurs de y qui correspondent à une ou plusieurs valeurs infiniment voisines de x, soit même tout leur ensemble; et que l'on ait, par conséquent, à chercher, pour l'intégrale proposée, comme $\int_a^b f(x, y, y') \, dx$, un minimum ou maximum *non plus absolu*, mais seulement *relatif*, c'est-à-dire une valeur ou plus petite, ou plus grande, non pas que toutes ses voisines, mais que toutes celles d'entre elles qui vérifient les conditions données.

Alors certaines des variations δy, ou autres analogues quand plus d'une fonction est à déterminer dans le problème, cesseront d'être arbitraires. Car les relations proposées, mises sous la forme $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ..., pourront évidemment se différentier en y faisant croître, par exemple, de δy chaque valeur de y qui y figure, c'est-à-dire en y modifiant très peu la forme des fonctions inconnues, et si l'on appelle $\delta\varphi$, ou $\delta\psi$, ... (*variation* de chaque premier membre φ, ψ, ...)

l'espèce de différentielle totale de φ, ou de ψ, ... ainsi obtenue, il est clair que les équations $\delta\varphi = 0$, $\delta\psi = 0$, ... détermineront autant de variations (comme est δy pour une valeur déterminée de x), en fonction *linéaire* des autres, qu'il y aura d'équations de condition données $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... On ne pourra donc égaler à zéro, dans l'expression de $\delta \int_a^b f(x, y, y')\,dx$, que le coefficient définitif ou total des *seules* variations *restées indépendantes;* et le nombre des équations de maximum ou minimum fournies par le principe de Képler se trouvera inférieur à celui des inconnues, qui sont les diverses valeurs de y ou fonctions analogues pourvues de variations. Mais les équations de condition $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... compléteront justement ce nombre.

L'élimination des variations non indépendantes se fait très élégamment par la méthode des facteurs indéterminés, expliquée au n° 109 (t. I, p. 179), à propos de la théorie des maxima et minima relatifs des fonctions d'un nombre fini de variables. On a vu (même numéro, p. 181) qu'il en résulte une règle pratique simple, consistant à opérer comme s'il s'agissait de rendre un maximum ou minimum *absolu*, non la fonction proposée, mais cette fonction accrue de la somme, $\lambda\varphi + \mu\psi + \ldots$, des premiers membres des équations de condition respectivement multipliés par des *constantes* indéterminées λ, μ, ... Cette manière de procéder est, d'ailleurs, évidente quand la fonction totale ainsi formée admet en effet un maximum ou un minimum absolu, du moins pour des valeurs de λ, μ, ... propres à annuler φ, ψ, ... à l'instant du maximum ou minimum ; car celui-ci, nécessairement plus grand ou nécessairement plus petit que toutes les valeurs voisines de la fonction totale, est bien, en particulier, soit toujours supérieur, soit toujours inférieur à celles d'entre elles qui vérifient sans cesse les conditions proposées $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... On obtient donc autant d'équations qu'il y a de variables inconnues, valeurs successives de y par exemple ; et l'on voit que les équations de condition $\varphi = 0$, $\psi = 0$, ... se vérifient grâce à un choix convenable des facteurs indéterminés en même nombre λ, μ, ...

Supposons, par exemple, que la courbe AMB (p. 248), le long de laquelle est prise l'intégrale $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ à rendre maximum ou minimum, doive donner une valeur constante connue K à une autre intégrale de forme analogue $\int_a^b \mathrm{F}(x, y, y')\,dx$. Il y aura donc à in-

troduire une condition

$$(18) \qquad \int_a^b \mathrm{F}(x, y, y')\, dx - \mathrm{K} = 0,$$

dans le genre de $\varphi = 0$; et l'on opérera, par suite, comme si l'on cherchait le maximum ou le minimum absolu de l'expression totale $\int_a^b f(x, y, y')\, dx + \lambda\left(\int_a^b \mathrm{F}(x, y, y')\, dx - \mathrm{K}\right)$, c'est-à-dire, plus simplement, de la somme

$$(19) \qquad \int_a^b [f(x,y,y') + \lambda \mathrm{F}(x,y,y')]\, dx,$$

vu la constance de λ et de K, qui permet de ne pas compter le terme *invariable* $-\lambda\mathrm{K}$. On aura ainsi à traiter une question analogue à celles des numéros précédents, sauf la détermination de λ qui restera finalement à effectuer par l'équation (18).

Les géomètres de la fin du XVIIe siècle ont résolu, dans ce genre, sur les courbes planes, de célèbres problèmes, qu'ils appelaient *Problèmes sur les isopérimètres,* parce qu'ils s'y donnaient comme condition que ces courbes eussent toutes *périmètre égal,* c'est-à-dire la même longueur $\mathrm{K} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Nous traiterons bientôt, au moyen de considérations directes plus simples que l'emploi du calcul des variations, quelques questions, particulièrement intéressantes, parmi lesquelles se trouvera le plus important de ces problèmes sur les courbes isopérimètres, relatif à la surface plane maxima d'une longueur de contour donnée.

487. — Courbes planes de longueur donnée, qui, menées entre deux points fixes, engendrent les deux surfaces maxima et minima de révolution autour d'un axe donné.

Contentons-nous ici d'appliquer la méthode générale à un exemple complétant la question du n° 484 (p. 252). Supposons que la courbe variable ACB à laquelle on veut faire décrire autour de Oy une surface de révolution, n'ait plus sa longueur totale $\int ds$ arbitraire, mais, au contraire, astreinte à égaler une droite connue K. Il est alors évident que, si les deux extrémités A, B sont données assez près l'une

de l'autre (de sorte que leur distance AB n'atteigne pas K), et, en même temps, assez loin de l'axe de révolution Oy, non seulement l'aire engendrée $2\pi\int x\,ds$ admettra un minimum *relatif*, puisqu'elle en aura un *absolu*, mais qu'elle comportera de plus un *maximum relatif*, par l'impossibilité de grandir indéfiniment où la mettront la longueur assignée K et les deux distances invariables extrêmes AA', BB', à l'axe de révolution, de l'arc générateur. Il y aura donc deux certaines formes de celui-ci, APB et AQB, par exemple, qui, dans la rotation autour de Oy, engendreront, l'une, l'aire la plus petite, l'autre, l'aire la plus grande.

Cette aire ayant pour expression (au facteur constant près 2π) $\int x\,ds$, l'intégrale (19) dont il y aura lieu d'annuler identiquement la variation sera $\int (x+\lambda)\,ds$; et il suffira d'un simple déplacement $(-\lambda)$ de l'origine O, sur l'axe même Ox, de manière à rendre $x+\lambda$ égal à une nouvelle abscisse X, pour la réduire à $\int X\,ds$, ou encore à $\pm\int X\,ds$, par un changement facultatif de sens des nouvelles abscisses positives, destiné à faire prendre celles-ci, autant que possible, en valeur absolue. Si x désigne finalement la nouvelle abscisse $\pm X$, l'on est donc ramené à chercher, de même qu'au n° 484, le minimum de $\int x\,ds = \int x\sqrt{1+y'^2}\,dx$; ce qui donne comme solution une chaînette ayant pour base le nouvel axe des y.

Ainsi, le minimum et le maximum demandés se trouvent représentés par les arcs APB, AQB de deux chaînettes dont les bases ou directrices seront parallèles à l'axe de révolution donné Oy et situées à des distances de celui-ci telles, que la longueur de ces arcs, entre les deux extrémités connues A, B, ait précisément la valeur donnée K.

488*. — Maxima ou minima des intégrales à champ d'intégration variable, et qui dépendent de fonctions variables aussi aux limites de ce champ.

(Compléments, p. 542*.)

489*. — Autre méthode, impliquant le choix de variables indépendantes qui assurent l'invariabilité du champ d'intégration; application à l'intégrale $\int F(x, y, z)\,ds$ prise le long d'une courbe.

(Compléments, p. 547*.)

490*. — Conditions de maximum ou de minimum relatives aux limites, pour des intégrales prises le long de lignes ayant leurs extrémités mobiles sur des courbes ou des surfaces données.

(*Compléments*, p. 553*.)

491*. — Cas où ces lignes sont astreintes à ne pas quitter une surface donnée; démonstration, par l'analyse, des propriétés générales des lignes géodésiques.

(*Compléments*, p. 556*.)

492*. — Minimum d'une intégrale plus générale que $\int F(x, y, z)\,ds$; principe de la moindre action.

(*Compléments*, p. 559*.)

493 — Brachistochrone ou courbe de plus rapide descente d'un mobile pesant.

Certains problèmes se résolvent par des considérations directes, surtout géométriques, plus rapidement que par les procédés uniformes du calcul des variations, même quand celui-ci y conduit à des équations différentielles ou aux dérivées partielles complètement intégrables. Tel est, en particulier, le cas du problème célèbre de la *brachistochrone*, traité en 1696 par Jean Bernoulli et qui a été comme le point de départ du calcul des variations.

Voici en quoi il consiste, et comment Jean Bernoulli l'a résolu en le rattachant au problème de Fermat (t. I, p. 167), qui dépend de la question des maxima et minima ordinaires des fonctions d'un nombre fini de variables ou plutôt même d'une seule variable.

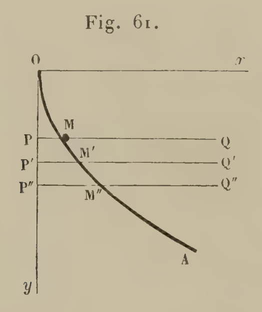
Un corps pesant M (p. 260), guidé par une courbe matérielle polie OA, doit tomber d'un point connu O et arriver ainsi à un autre point plus bas (ou du moins aussi bas) A, également assigné : il s'agit de donner à la courbe OA la forme, dite *brachistochrone,* propre à abréger le plus possible la durée du trajet.

Dans le plan qui contient la verticale Oy et le point d'arrivée A, prenons Oy pour axe des ordonnées et l'horizontale Ox, tirée par rapport à Oy du côté où se trouve le point A, pour axe des abscisses. On sait que, abstraction faite de la résistance de l'air et du frottement de la courbe, la vitesse acquise par le mobile après une

hauteur quelconque totale y de chute se trouve, à un facteur constant près, mesurée par la racine carrée, $\sqrt{y}$, de cette hauteur. Or il suit de là que la brachistochrone cherchée OA sera contenue tout entière dans le plan xOy; car, si elle en sortait et qu'on la comparât à sa projection sur xOy considérée aussi comme trajectoire possible du mobile, ses divers éléments seraient parcourus avec la même vitesse que les éléments correspondants, situés au même niveau, mais plus courts ou pour le moins aussi courts, de cette projection sur xOy, qui, dès lors, demanderait un temps de parcours moindre et devrait, plutôt qu'elle, être qualifiée de *brachistochrone*.

Cela posé, si l'on partage le plan des xy, par des parallèles à Ox, en une infinité de bandes horizontales, d'une largeur dy pareille

Fig. 61.



ou non, mais infiniment petite, le mobile M pourra, sauf erreur négligeable dans le calcul de la durée de son trajet, ou, par suite, dans la construction de sa trajectoire, être censé avoir la vitesse constante $\sqrt{y}$ à l'intérieur de la bande quelconque PQQ'P' comprise entre deux consécutives, $OP = y$, $OP' = y + dy$, de ses ordonnées, et prendre la vitesse $\sqrt{y+dy}$ dans la bande suivante P'Q'Q''P''. Soient MM' et M'M'' les deux éléments correspondants de sa trajectoire cherchée, dès lors rectilignes à la traversée de chaque bande. Comme, évidemment, la durée du trajet total ne peut être minima qu'à la condition de se trouver telle entre M et M'', la détermination du point intermédiaire M', sur la ligne de séparation P'Q' des deux bandes, rentrera dans le problème de Fermat (t. I, p. 168), où l'on supposerait, pour le premier milieu PQQ'P', la vitesse donnée V égale à $\sqrt{\mathrm{OP}}$, et, pour le second milieu, la vitesse V' égale à $\sqrt{\mathrm{OP'}}$. La loi des sinus (t. I, p. 169), en obser-

vant que l'angle d'*incidence i* sera le complément de QMM′ et, l'angle de *réfraction r*, le complément de Q′M′M″, donnera

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin r}{V'} \quad \text{ou} \quad \frac{\cos QMM'}{\sqrt{OP}} = \frac{\cos Q'M'M''}{\sqrt{OP'}}.$$

On voit donc que le rapport, à la racine carrée de l'ordonnée y, du cosinus $\frac{dx}{ds}$ de l'angle formé, par chaque élément ds du chemin décrit, avec sa projection positive dx sur l'axe des abscisses, devra être invariable le long de la courbe. Appelons $\frac{1}{\sqrt{2r}}$ ce rapport positif constant $\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dx}{ds}$: l'équation caractéristique de la brachistochrone sera ainsi

$$(61) \qquad \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2r}},$$

ou, après substitution de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ à ds et isolement du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$,

$$(62) \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{2r}{y} - 1}.$$

On y reconnaît (t. I, p. 225) l'équation différentielle caractéristique d'un arceau de cycloïde, décrit, au-dessous de Ox comme base, par un point d'une circonférence de rayon r. Ainsi, dans les conditions proposées, *la brachistochrone sera un arceau de cycloïde à base horizontale, ayant son point de départ, avec tangente verticale, au plus élevé,* O, *des deux points donnés,* et sa circonférence génératrice $2\pi r$ telle, que cet arceau aille passer par le second point A. Comme les équations (62) ou (61) restent satisfaites quand x, y, dx, dy, ds, r varient dans un même rapport quelconque, un pareil arceau, d'abord ramassé tout entier en O, balaye ou décrit l'angle xOy, dans toute son étendue, quand le paramètre r croît de zéro à l'infini; car chaque élément ds, de direction invariable, balaye alors pour sa part la fraction infiniment petite qui lui correspond (et ne correspond qu'à lui), de cet angle droit, en s'éloignant indéfiniment de O. Donc chaque point A du plan n'est atteint qu'une fois par la courbe mobile et ne l'est que par un seul de ses points; en sorte que l'on obtient bien, où que soit donné A dans l'angle xOy, un arceau et un seul pour la brachistochrone demandée. Sa partie comprise entre O et A se trouve

tout entière descendante à partir de O quand, en A, le rapport $\frac{y}{x}$ dépasse la valeur correspondant au point le plus bas des arceaux. Elle a une seconde partie, ascendante, dans le cas contraire. Cette seconde partie appartient bien, comme nous l'avons admis implicitement, au même arceau que la première; car, de part et d'autre du point le plus bas, où $\frac{dx}{ds} = 1$ et dont on peut appeler Y l'ordonnée, l'équation caractéristique (61) donne pour la constante $\frac{1}{\sqrt{2r}}$ une seule expression $\frac{1}{\sqrt{Y}}$ ou, pour le rayon r de la circonférence génératrice, la valeur unique $\frac{1}{2}$ Y, impliquant le choix de Ox comme base commune des deux demi-arceaux contigus.

494. — **Considérations générales touchant la ligne de longueur donnée, qui, tracée sur une surface plane ou même courbe, y entoure l'aire maxima, et touchant la superficie fermée qui, sous une certaine aire totale, embrasse le plus grand volume.**

C'est encore par des considérations géométriques que nous traiterons les deux questions les plus importantes peut-être de maximum ou de minimum relatif d'intégrales définies, que l'on puisse se poser, savoir, celles de la surface plane qui, dans un contour de longueur donnée, possède l'aire la plus grande, et du solide qui, sous une surface totale donnée, comprend le plus grand volume.

Les anciens s'étaient, de bonne heure, proposé ces deux beaux problèmes dont la solution (ou du moins son pressentiment) paraît remonter jusqu'à Pythagore, au VIe siècle avant notre ère.

Lorsqu'on fait varier entre des limites quelconques l'étendue d'une figure à deux ou à trois dimensions toujours semblable à elle-même, surface ayant un contour que nous appellerons C et une aire que nous désignerons par A, ou solide de surface S et de volume V, les rapports $\frac{A}{C^2}$ et $\frac{V}{S\sqrt{S}}$ restent invariables; car on sait qu'ils dépendent seulement de la forme de ces figures, non de leur grandeur. Les questions posées, dans les deux cas d'une aire plane et d'un volume quelconque, ont donc pour but de déterminer la forme qui rend ces rapports les plus grands possible, ou qui rend, par suite, minima leurs inverses $\frac{C^2}{A}$ et $\frac{S\sqrt{S}}{V}$. Ainsi, elles reviennent à chercher les plus petites valeurs du

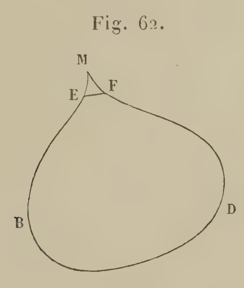
contour C ou de la surface S d'une figure soit plane, soit solide, qui a une certaine étendue donnée A ou V; et il est évident, surtout en se plaçant à ce point de vue, que les problèmes posés admettent bien une solution, c'est-à-dire que le minimum existe, du moins en tant que valeur inférieure à toute autre; car les fractions $\frac{C^2}{A}$, $\frac{S\sqrt{S}}{V}$, à dénominateurs positifs constants, auront inévitablement leurs numérateurs toujours plus grands que zéro.

On conçoit que la détermination de cette plus forte ou plus faible valeur des rapports directs ou inverses considérés présente un haut intérêt en Philosophie naturelle. Elle entraînera, par exemple, la connaissance de la forme que devra recevoir un corps d'un volume déterminé pour avoir le moins de surface possible ou, toutes choses égales d'ailleurs, le moins de *rapports extérieurs*, forme dont on devrait, par suite, l'écarter, s'il s'agissait, au contraire, de multiplier ses relations physiques avec le dehors; etc.

Une propriété presque évidente de cette forme cherchée, qui rend maximum le rapport $\frac{A}{C^2}$ ou $\frac{V}{S\sqrt{S}}$, c'est qu'*elle n'admet aucune discontinuité de la tangente ou du plan tangent, aucun point anguleux ou aucune arête.*

Si, en effet, une courbe plane fermée MBD (*fig.* 62) présente un point *saillant* ou *rentrant* M, il suffira d'y remplacer les deux éléments contigus du contour, ME et MF, par la droite EF qui joint leurs extrémités et dont le rapport à leur somme ME + MF est évidemment

Fig. 62.



moindre que 1, pour obtenir une nouvelle surface BEFD, dans laquelle le contour C sera inférieur au proposé d'une quantité ME + MF — EF, *du premier ordre de petitesse* comme ME ou MF, tandis que son aire ne différera de l'aire primitive BMD que par une partie EMF tout au plus comparable au produit EF × EM et, par suite, *du second ordre*

au moins, ou négligeable, à côté de la précédente, dans le rapport $\frac{A}{C^2}$. Donc ce rapport de l'aire au carré du contour grandit, quand on passe de la figure proposée BMD à la figure BEFD; et il n'était pas aussi grand que possible dans la première.

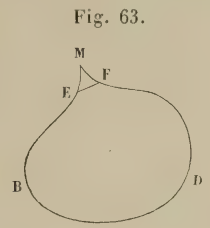
De même, si un solide donné présente soit une *pointe,* soit une *arête,* saillante ou rentrante, il suffit de les couper, en leur substituant une surface continue infiniment étroite, pour y diminuer l'aire d'une quantité comparable à la surface des parties remplacées, quantité infiniment supérieure, numériquement, au volume en même temps retranché ou ajouté, dont l'expression comprendra toujours comme facteur une dimension infiniment petite de plus. Ainsi, dans le rapport, $\frac{V}{S\sqrt{S}}$, du volume à la puissance $\frac{3}{2}$ de la surface, le dénominateur décroîtra sans que, pour ainsi dire, le numérateur varie; d'où il suit que ce rapport grandira et qu'il ne saurait être actuellement maximum.

Ce genre de raisonnement, un peu modifié, et sa conclusion, sous certaines réserves, s'étendent au cas où les figures à comparer en vue de choisir la plus étendue, sont les différentes portions d'une surface courbe, limitées par un contour de même longueur, diverses parties d'une sphère, par exemple. Et, cependant, l'on ne peut plus y faire appel aux considérations basées sur la similitude; car des figures semblables à celles de la surface proposée, mais construites à des échelles autres, ne pourraient généralement pas se placer sur elle et sont, par suite, étrangères à la catégorie qu'il s'agit d'étudier.

Alors une aire plus grande que toute autre existe, au moins dans chaque région définie de la surface, quand, eu égard aux dimensions et à la nature de cette région, le contour assigné ne se trouve pas trop long, mais non dans le cas contraire; et, entre ces limites, un très petit accroissement dC, donné au contour C qui entoure l'aire A la plus grande, en attribuant encore au nouveau contour $C + dC$ la forme et la situation pour lesquelles la nouvelle aire $A + dA$ est également maxima, entraîne une augmentation dA de celle-ci numériquement comparable à dC, sauf du moins pour des valeurs exceptionnelles de C; car A et C, nuls ensemble, acquièrent ensemble des grandeurs finies. Cela posé, si un tel contour BMD, sur la surface (*fig.* 63), présentait un point anguleux M, la suppression de celui-ci, ou le remplacement, sur la surface même, de BMD par le nouveau contour BEFD, réduirait d'une quantité du premier ordre, $-dC$, le périmètre C, sans faire varier dans une proportion comparable l'aire A;

et si, gardant alors la nouvelle longueur BEFD ou $C - dC$ du contour, on lui donnait la forme voulue pour laquelle l'aire correspon-

Fig. 63.



dante a la valeur maxima $A - dA$, celle-ci, d'après le principe admis que dA et dC sont comparables, se trouverait moindre que l'aire isopérimètre BEFD très sensiblement égale à A, alors que sa qualité d'aire maxima lui impose d'être plus grande.

Donc, *même sur une surface courbe* (*supposée bien continue*), *nulle ligne présentant un point anguleux ne saurait, dans sa longueur donnée, embrasser l'aire maxima.*

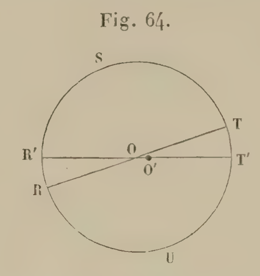
495. — **Courbe de longueur donnée qui, sur un plan ou sur une sphère, entoure l'aire maxima : cette courbe est un cercle.**

Le principe de continuité précédent ainsi établi, considérons en premier lieu le cas d'une surface plane; et soit RSTU (p. 266) celle dont l'aire, à périmètre égal, est la plus grande possible. Par un quelconque, R, de ses points, menons une corde ou sécante RT, et faisons-la tourner autour de R jusqu'à ce qu'elle partage le contour C en deux parties équivalentes. A ce moment, il y aura une des deux parties RTS, RTU de la surface qui sera ou plus étendue que l'autre ou, pour le moins, aussi étendue que l'autre. Soit RST cette partie. Si l'on prend sa symétrique par rapport à RT et qu'on lui adjoigne cette symétrique, on obtiendra évidemment une surface ayant contour équivalent à celui de la proposée et au moins autant d'aire. Par suite, d'après la propriété démontrée ci-dessus, les angles que feront, avec RT, les tangentes menées en R et en T à la courbe RST seront droits; sans quoi ceux, deux fois plus grands, que présenterait en R et en T la figure RST complétée par sa symétrique, différeraient de deux droits, et constitueraient une discontinuité inadmissible en vertu du principe précédent.

Ainsi, dans la surface considérée RSU, toute corde, RT par exemple, qui sous-tend un arc égal à la moitié du contour, *lui est perpendiculaire* à ses deux extrémités. Or, si l'on mène une seconde

corde pareille et infiniment voisine R′T′, on aura évidemment arc RST = arc R′ST′; d'où arc RR′ = arc TT′ et aussi, sensiblement, corde RR′ = corde TT′. D'ailleurs, RT et R′T′ se croisant évidemment

Fig. 64.



en un certain point O, les triangles ORR′, OTT′ que délimitent latéralement ces deux droites, peuvent être censés isoscèles (à cause de leurs angles à la base sensiblement droits) et donnent, sauf erreur *infiniment plus petite que* RR′, OR′ = OR, OT′ = OT; d'où R′T′ = RT, c'est-à-dire R′T′ — RT = une quantité d'un ordre de petitesse supérieur au premier, et, par suite, $d(\mathrm{RT}) = 0$ ou RT = une constante. Il résulte ensuite de la double égalité des angles au sommet O et des bases RR′, TT′ (à des erreurs relatives près négligeables), que les deux triangles sont égaux eux-mêmes, ou qu'on a de plus $\mathrm{OR} = \mathrm{OT} = \frac{1}{2}\mathrm{RT} =$ const., sauf écarts infiniment petits. Donc les normales RO, R′O′, ..., menées à la courbe en une suite de points voisins, et prolongées chacune jusqu'à leur intersection par la suivante, ne présentent entre elles que des différences d'un ordre de petitesse supérieur au premier, c'est-à-dire incapables de produire par leur accumulation un total fini. La différence R′O′ — RO se trouvant ainsi d'un ordre supérieur au premier, comme l'était déjà R′O — RO, il en sera évidemment de même de R′O′ — R′O = OO′, distance de deux points d'intersection successifs; et, par suite, toutes les normales, d'égale longueur, ne pourront manquer d'aboutir à un centre unique O. C'est dire que la courbe RSU se réduit à une circonférence, ou que *la surface plane à aire maximum, d'un périmètre donné, est un cercle.*

Le rapport $\frac{A}{C^2}$ de l'aire au carré du contour, dans une figure plane, a donc pour plus grande valeur possible

$$\frac{\pi R^2}{(2\pi R)^2} = \frac{1}{4\pi} = 0,079577\ldots,$$

c'est-à-dire l'inverse de la surface d'une sphère de rayon 1.

Si la courbe RSTU, au lieu d'être tracée sur un plan, devait se trouver sur une sphère et y entourer la surface sphérique la plus grande possible, la même démonstration s'appliquerait, sans autres changements que la substitution de plans diamétraux aux sécantes précédentes et d'arcs de grands cercles aux cordes RT, R′T′, RR′ TT′, ..., ou de triangles sphériques aux triangles rectilignes ROR′, TOT′. Il faudrait, toutefois, supposer les arcs RT, R′T′ inférieurs à un demi-grand cercle, pour pouvoir, de l'égalité de RR′ à TT′, conclure celle de OR à OT. Sous cette réserve, on obtiendrait encore, pour la courbe demandée, une circonférence, ayant son pôle en O. Ainsi, *la courbe fermée qui, sur une surface sphérique* (*et non pas seulement sur le plan*), *embrasse, à longueur égale, la plus grande superficie, est la circonférence,* pourvu toutefois que le maximum cherché existe. Evidemment, cela n'a lieu, dans le cas de la sphère, qu'autant que la circonférence en question ne devient pas celle d'un grand cercle.

Sauf cette restriction, on voit que, par exemple, à la surface de la terre, un pays d'une étendue déterminée offre la moindre longueur possible de frontières quand son contour est circulaire, ou quand sa forme se rapproche le plus possible de celle d'une simple calotte.

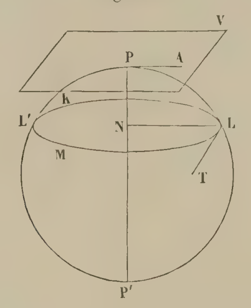
496. — Surface d'une étendue donnée enfermant le plus grand volume ; elle n'est autre qu'une sphère.

Considérons enfin la surface courbe fermée qui, sous une certaine aire totale S, comprend le plus grand volume, et soit KLM (p. 268) sa section par un plan quelconque. Je dis que cette section sera nécessairement circulaire.

Menons, en effet, à la surface un plan tangent PV parallèle à KLM et, dans ce plan, par le point P de contact, la tangente quelconque PA ; puis imaginons qu'un plan mené suivant PA tourne, autour de cette droite, jusqu'à l'instant où, coupant le solide suivant une certaine courbe PLP′L′, il partage la surface du solide en deux parties, PLP′K, PLP′M, équivalentes. Alors celle de ces deux parties qui recouvre le plus grand volume formera évidemment, avec sa symétrique par rapport au plan PLP′ qui la limite, une surface fermée de même aire que la proposée et contenant le volume le plus grand possible. Or la figure ainsi obtenue, symétrique de part et d'autre du plan PLP′L′, ne peut avoir une arête tout le long de son intersection avec ce plan ; et celui-ci est, dès lors, forcément normal en tous leurs points communs. Donc, ce plan PLP′ se trouve : 1° mené sui-

vant la normale PP′, en P, à la surface proposée, et, 2°, perpendiculaire à la tangente LT de la courbe KLM, comme l'étant à deux plans

Fig. 65.



qui se coupent suivant LT, savoir, au plan KLM dont il contient la perpendiculaire PP′ et au plan tangent en L à la surface.

Par suite, la normale LN à la courbe proposée KLM est dans le plan PLP′ et va passer par le pied N de la perpendiculaire PP′ abaissée du point P sur le plan de cette courbe. Comme il en serait évidemment de même pour tous les autres plans menés suivant PP′ et coupant la courbe KLM en des points quelconques, toutes les normales de cette courbe iront passer par le point N, auquel se réduira, dès lors, sa développée. Ainsi, la section plane KLM du solide proposé est bien une circonférence, dont le centre se trouve, avec tous ceux des sections analogues faites par des plans de même direction, sur la perpendiculaire PP′ commune à ces plans.

En conséquence, la surface courbe considérée a une forme de révolution autour de PP′; mais, comme son méridien constitue une autre de ses sections planes et ne peut manquer davantage d'être un cercle, elle se réduit forcément à une sphère. Donc, *la sphère est, de tous les corps de même surface, celui qui a le plus grand volume.*

Ce résultat capital, connu dès l'antiquité, et bien facile à démontrer, comme on voit, géométriquement, n'a pu encore être établi complètement par l'Analyse [1].

[1] Le calcul des variations y conduit, comme condition de maximum ou de minimum, à une équation aux dérivées partielles exprimant que la surface cherchée doit avoir partout même courbure moyenne (t. I, p. 250*); après quoi il ne reste plus qu'à reconnaître, en intégrant cette équation aux dérivées partielles, si la sphère est la seule surface continue à courbure moyenne constante. Or c'est bien ce qu'a fait M. Jellett (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* de Liouville, t. XVIII, p. 163; 1853) pour les surfaces qui ne sont rencontrées qu'en un point par les rayons vecteurs émanés d'une origine prise à leur intérieur, mais ce qu'on n'a pu faire encore d'une manière entièrement générale.

La plus forte valeur possible du rapport d'un volume V à la puissance $\frac{3}{2}$ de l'aire S qui le limite sera donc

$$\frac{V}{S\sqrt{S}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2 \sqrt{4\pi R^2}} = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} = 0,09403\ldots,$$

fraction sensiblement supérieure à celle, $\frac{1}{4\pi}$ ou $0,07957\ldots$, qui exprime le plus grand rapport possible d'une surface plane au carré de son contour.

497*. — Sur des cas où, pour distinguer entre un minimum, un maximum et l'absence tant de l'un que de l'autre, il convient d'attribuer, aux variations, des valeurs sensibles, au lieu de valeurs infiniment petites; application à l'intégrale $\int F\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds$, prise entre deux points fixes.

(Compléments, p. 564*.)

498*. — Application de la même méthode à des problèmes de maximum ou de minimum relatif; propriétés de minimum dont jouit la forme de l'onde solitaire.

(Compléments, p. 568*.)

499*. — Intégrales s'étendant, l'une, à tout le volume d'un corps, l'autre, à sa surface, et dont la somme est rendue minima par la fonction qui exprime les températures stationnaires de ce corps dans des conditions données.

(Compléments, p. 574*.)

500*. — Utilisation de cette propriété de minimum pour démontrer l'existence d'une solution générale du problème des températures stationnaires; autres problèmes, dans lesquels la même méthode atteint un résultat analogue et a, parfois aussi, facilité la mise en équation.

(Compléments, p. 577*.)

FIN DE LA PARTIE ÉLÉMENTAIRE DU TOME II.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
55, Quai des Grand.-Augustins, 55.

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CALCUL INTÉGRAL.

COMPLÉMENTS.


ΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕ

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE

A L'USAGE DES PERSONNES QUI ÉTUDIENT CETTE SCIENCE

EN VUE

DE SES APPLICATIONS MÉCANIQUES ET PHYSIQUES;

PAR J. BOUSSINESQ,
Membre de l'Institut,
Professeur de Mécanique physique à la Faculté des Sciences de Paris,
Ancien Professeur de Calcul différentiel et intégral
à la Faculté des Sciences de Lille et à l'Institut industriel du Nord.

TOME II.
CALCUL INTÉGRAL.

FASCICULE II.
COMPLÉMENTS.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

TABLE DES MATIÈRES

SPÉCIALES A CE FASCICULE II DU TOME SECOND.

COMPLÉMENT A LA VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

DES INTÉGRALES EULÉRIENNES DE SECONDE ESPÈCE.

COMPLÉMENT A LA VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES ET FONCTIONS ELLIPTIQUES; VALEUR MOYENNE GÉOMÉTRIQUE D'UNE FONCTION; CALCUL APPROCHÉ, PAR UNE INTÉGRATION, DU RESTE DE CERTAINES SÉRIES.

COMPLÉMENT A LA VINGT-SIXIÈME LEÇON.

ÉVALUATIONS DIVERSES D'AIRES PLANES; RECTIFICATIONS D'AIRES EN COORDONNÉES POLAIRES.

COMPLÉMENT A LA VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

AIRE DE L'ELLIPSOÏDE; ÉVALUATION DES VOLUMES ET DES SURFACES COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES.

COMPLÉMENT A LA VINGT-HUITIÈME LEÇON.

SIMPLIFICATION DE CERTAINES INTÉGRALES MULTIPLES, A LIMITES VARIABLES, PAR UN CHANGEMENT DE L'ORDRE DES INTÉGRATIONS, ETC.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

RÉDUCTION ET TRANSFORMATION DES INTÉGRALES MULTIPLES; ÉVALUATION APPROXIMATIVE, PAR CES INTÉGRALES, DES RESTES DE CERTAINES SÉRIES, ETC.

COMPLÉMENT A LA TRENTIÈME LEÇON.

INTÉGRALES DÉFINIES DIVERSES; DIFFICULTÉS QUE PRÉSENTE LA DIFFÉRENTIATION DE CERTAINES D'ENTRE ELLES.

TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

* EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES ET USAGE DE CES EXPRESSIONS.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

SUITE DES CALCULS D'EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES D'INTÉGRALES DÉFINIES : SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

DE L'EMPLOI DES INTÉGRALES DÉFINIES POUR EXPRIMER DES FONCTIONS ÉCHAPPANT GÉNÉRALEMENT AUX AUTRES MODES DE REPRÉSENTATION FOURNIS PAR L'ANALYSE : INTÉGRALES POURVUES, SOUS LES SIGNES $\int$, DE FONCTIONS ARBITRAIRES, ET DONT LES DÉRIVÉES ONT DES FORMES SIMPLES.

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

SUITE DE L'EMPLOI DES INTÉGRALES DÉFINIES POUR EXPRIMER CERTAINES FONCTIONS : THÉORIE GÉNÉRALE DES POTENTIELS ; POTENTIELS SPHÉRIQUES.

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

SUITE DE LA THÉORIE DES POTENTIELS : ÉTUDE SPÉCIALE DE CEUX DANS LESQUELS L'INTÉGRATION S'ÉTEND A TOUTE LA MASSE POTENTIANTE.

COMPLÉMENT A LA TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

SOLUTIONS SINGULIÈRES, SOLUTIONS ASYMPTOTES, LIEUX DE RÉUNION OU DE SÉPARATION D'INTÉGRALES; ÉQUATION DE RICCATI ET DE CLAIRAUT, ETC.

COMPLÉMENT A LA TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

SUR LES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES OU D'ORDRE SUPÉRIEUR; CERTAINS CAS D'ABAISSEMENT DE CES DERNIÈRES ÉQUATIONS, ETC.

COMPLÉMENT A LA TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

CONCERNANT LA THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

COMPLÉMENT A LA TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

CALCUL DE DIVERSES INTÉGRALES DÉFINIES, SE REPRODUISANT PAR DEUX OU PAR QUATRE DIFFÉRENTIATIONS ; INTÉGRATION DE CERTAINES ÉQUATIONS LINÉAIRES A SECOND MEMBRE.

QUARANTIÈME LEÇON.

ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECONDS MEMBRES, SOIT D'ORDRE SUPÉRIEUR, SOIT SIMULTANÉES : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS.

QUARANTE-ET-UNIÈME LEÇON.

SUITE DE L'ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS VARIABLES QUE L'ON SAIT INTÉGRER OU SOUS FORME FINIE, OU EN SÉRIE, OU PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES; FONCTIONS CYLINDRIQUES, ETC.

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON.

DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET DE LEUR INTÉGRATION SOUS FORME FINIE : ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON.

SUITE DE L'INTÉGRATION, EN TERMES FINIS, DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES : ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Pages.

QUARANTE-QUATRIÈME LEÇON.

PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, SPÉCIAUX AUX PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE QUI CONCERNENT LES CORPS DE GRANDEUR FINIE : ÉTUDE D'ÉTATS VARIABLES EN FONCTION DU TEMPS.

QUARANTE-CINQUIÈME LEÇON.

SUITE DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE POUR LES CORPS DE DIMENSIONS FINIES : ÉTUDE D'ÉTATS PERMANENTS.

Pages.

QUARANTE-SIXIÈME LEÇON.

PROCÉDÉS D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, POUR LES CORPS D'UNE ÉTENDUE CENSÉE INFINIE : ÉQUATIONS NE CONTENANT QUE DES DÉRIVÉES D'UN MÊME ORDRE PAIR, ET QUI S'INTÈGRENT PAR DES POTENTIELS.

QUARANTE-SEPTIÈME LEÇON.

SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE; ÉQUATIONS OU FIGURENT DES DÉRIVÉES D'ORDRES DIFFÉRENTS, ET QUI S'INTÈGRENT PAR LES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIII[e] LEÇON.

QUARANTE-HUITIÈME LEÇON.

*SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE ; ÉQUATIONS QUI S'INTÈGRENT PAR L'EMPLOI SIMULTANÉ DES POTENTIELS ET DES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIIIe LEÇON.

Pages.

QUARANTE-NEUVIÈME LEÇON.

RÉSULTATS GÉNÉRAUX CONCERNANT LA NATURE DES INTÉGRALES, DANS LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS OU MILIEUX INDÉFINIS ; EMPLOI DE LA FORMULE DE FOURIER POUR RÉSOUDRE CES PROBLÈMES.

COMPLÉMENT A LA CINQUANTIÈME LEÇON.

APPLICATION DU CALCUL DES VARIATIONS AUX PROBLÈMES DES SURFACES A AIRE MINIMA, DES COURBES DOUÉES DE DIVERSES PROPRIÉTÉS DE MAXIMUM OU DE MINIMUM ET A EXTRÉMITÉS MOBILES, DES LIGNES GÉODÉSIQUES, DE LA MOINDRE ACTION, DE LA STABILITÉ DE FORME DE L'ONDE SOLITAIRE, DES TEMPÉRATURES PERMANENTES D'UN SOLIDE, ETC.

ERRATA ET ADDITIONS.

Page 13*, dernière ligne, au dénominateur de la première fraction, *lire* « $e^h - 1$ ».

Page 21*, au dénominateur de la formule (5), *lire* « $f'(x)$ »; et, à la dernière ligne, *lire* « $f(x) = (x - c - h_1)(x - c - h_2)\dots$ ».

Page 35*, à la première formule (21), inscrire la limite supérieure « ∞ » de l'intégrale.

Page 36*, ligne 2 en remontant, *au lieu de* « XXXe Leçon », *lire* « XXXIe Leçon ».

Page 68*, ligne 7 en remontant, *au lieu de* « il », *lire* « elle ».

Pages 106*, 107*, 108* et 109*, *au lieu* de « A », *mettre partout, de préférence,* « K ».

Page 168*, ligne 6 en remontant, rétablir, au bas du premier signe $\int$, la limite inférieure $-\infty$.

Page 227*, ligne 2 en remontant, *au lieu de* « dz », *lire* « $z\,dz$ ».

Page 238*, ligne 4, ajouter :

« Ce faîte ou thalweg, sans être une enveloppe (sauf pour chaque *versant* considéré à part), représente donc une solution singulière et constitue, en même temps, le lieu des rebroussements des courbes qu'expriment les intégrales particulières. Il fournit un curieux exemple, tout à la fois : 1° de disjonction des deux propriétés de ligne enveloppe et de lieu de rebroussements, assez ordinairement unies sur une même courbe; 2° de réunion de la qualité de solution singulière avec la même propriété de lieu de rebroussements, dont elle se trouve le plus souvent séparée ».

Page 257*, à la deuxième ligne du titre du n° 385*, *lire* « linéaire homogène ».

Page 342*, ligne 17 en remontant, *au lieu de* « tangente en ce point à l'enveloppe », *lire* « menée par ce point de l'enveloppe ».

Page 355*, ligne 6 en remontant, à la fin, *lire* « $P_1 \gtrless 0$ ».

Page 378*, ligne 18 en remontant, *au lieu de* « dérivées premières de u, qui deviennent ... », *lire* « dérivées premières de u en x, y, z, qui deviennent ... ».

Page 495*, ligne 2, *au lieu de* « que l'autre », *lire* « qu'il parvenait à l'autre ».

Page 512*, dernière ligne, *au lieu de* « développons-la », *lire* « développons-le ».

COURS
D'ANALYSE INFINITÉSIMALE.

CALCUL INTÉGRAL.

PARTIE COMPLÉMENTAIRE.

COMPLÉMENT A LA VINGT ET UNIÈME LEÇON.

DIFFÉRENTIELLES TOTALES IMPLICITES.

220*. — De l'intégrabilité des différentielles totales implicites.

L'expression donnée d'une différentielle totale se trouve quelquefois implicite ; c'est lorsque ses coefficients, M, N, ..., sont fonctions non seulement des variables indépendantes x, y, ..., mais aussi de la fonction même φ qu'il s'agit de trouver par l'intégration. Pour nous faire une idée de la manière dont on procédera dans un tel cas, supposons qu'il n'y ait à considérer que deux variables indépendantes x et y, coordonnées des divers points d'un plan horizontal des xy, et représentons par l'ordonnée verticale z d'une surface l'une quelconque des fonctions primitives cherchées $z = \varphi(x, y)$, dont la différentielle totale $M\,dx + N\,dy$ contient, par hypothèse, z, en même temps que x et y, dans les expressions données de ses coefficients M et N. Il arrivera souvent alors, en réduisant ces expressions à un même dénominateur convenablement choisi Z, et en les écrivant $M = \frac{-X}{Z}$, $N = \frac{-Y}{Z}$, que les trois fonctions X, Y, Z de x, y, z seront

finies, continues et bien déterminées en tous les points (x, y, z) de l'espace situés aux distances finies de l'origine. Et l'on aura tout avantage à mettre l'équation $dz = \mathrm{M}\,dx + \mathrm{N}\,dy$ proposée sous la forme plus symétrique

$$(15) \qquad \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = 0.$$

Au lieu de chercher de suite les surfaces demandées, dont les éléments rectilignes, y joignant un point quelconque (x, y, z) à tout autre voisin $(x + dx, y + dy, z + dz)$, vérifient cette équation (15), contentons-nous d'abord de construire, dans l'espace indéfini, des lignes qui y satisfassent, lignes dont une famille existera sur telle surface que l'on voudra, représentée par une équation de la forme $f(x, y, z) = 0$. En effet, l'on peut se déplacer sur une telle surface, à partir d'un quelconque (x, y, z) de ses points, le long de tout élément rectiligne situé dans le plan tangent, ou ayant ses projections dx, dy, dz sur les axes dans les rapports mutuels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ qui donnent $\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0$. Or, rien n'empêche de compléter la détermination de ces deux rapports en leur faisant vérifier comme seconde équation, également du premier degré, la relation (15). Et si l'on opère sans cesse de même, à partir du point $(x + dx, y + dy, z + dz)$ où l'on sera ainsi parvenu, le chemin suivi de proche en proche sur la surface $f = 0$ satisfera bien à (15). Donc, en y prenant un nouveau point de départ à côté du premier, puis un troisième, etc., l'on obtiendra, sur cette surface quelconque donnée, toute la famille dont il s'agit, de lignes vérifiant l'équation (15). Mais la question en vue est de savoir si, parmi toutes les surfaces possibles, il en existe de telles, que des lignes *quelconques* menées par chacun de leurs points, et non pas une seule, y satisfassent ainsi à (15).

A cet effet, choisissons préalablement, comme surfaces sur lesquelles nous tracerons une famille de lignes vérifiant (15), les simples plans horizontaux $z = \text{const.}$, afin de ne faire varier d'abord que les coordonnées x et y. Autrement dit, construisons dans l'espace les lignes *de niveau* qui satisfont à (15) et qui, si les surfaces demandées existent, seront forcément leurs propres courbes de niveau. Comme on aura, le long d'une telle ligne, $dz = 0$, et que la valeur constante de z y sera donnée, l'équation (15), devenue $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy = 0$, y fera partout connaître le rapport $\frac{dy}{dx}$, ou y', en fonction des coordonnées variables x, y et de la coordonnée constante z ; ce qui déterminera de proche

en proche, soit en projection horizontale, soit dans l'espace avec l'adjonction de l'équation $z = \text{const.}$, la direction suivant laquelle on devra marcher pour construire les lignes en question. Si donc on peut *intégrer*, comme on dit, *l'équation différentielle* $y' = -\frac{X}{Y}$ qui les régit, c'est-à-dire former l'équation générale de la famille de telles courbes situées sur chaque plan horizontal $z = \text{const.}$, cette équation contiendra un paramètre c, sorte de numéro d'ordre caractérisant la courbe dans sa famille (t. I, p. 125), en outre de z qui est un second paramètre servant à distinguer chaque famille des autres; et, supposée résolue par rapport à c, elle sera de la forme $c = F(x, y, z)$, où F désignera une fonction désormais connue. Partout, d'ailleurs, les deux dérivées de F en x et y seront respectivement proportionnelles à X et à Y, puisque la valeur de $\frac{dy}{dx}$ tirée de cette équation $c = F$ sans faire varier z ni c, valeur qui est le quotient de $-\frac{dF}{dx}$ par $\frac{dF}{dy}$, égale identiquement $-\frac{X}{Y}$. Donc, si l'on appelle λ le quotient de $\frac{dF}{dx}$ par X, quotient désormais connu en fonction de x, y et z, on aura

$$\text{(16)} \qquad \frac{dF}{dx} = \lambda X, \quad \frac{dF}{dy} = \lambda Y.$$

Or les courbes de niveau $c = F(x, y, z)$, ainsi définies par deux paramètres z et c, pourront, d'une infinité de manières, en passant de chacune d'elles à toute autre juxtaposée ou très voisine, et ainsi de suite, être associées en séries, couvrant et dessinant des surfaces parmi lesquelles se trouveront évidemment celles qu'on cherche, si elles existent. Il est clair que, dans toutes ces surfaces, ainsi formées de bandes élémentaires comprises entre deux lignes de niveau $c = F(x, y, z)$, le paramètre c varie avec z ou se trouve fonction de z. Donc leur équation commune peut s'écrire $c = F(x, y, z)$, pourvu que c y désigne une fonction arbitraire de la forme $\psi(z)$. Et il ne reste qu'à choisir, s'il est possible, cette fonction $c = \psi(z)$, de manière à faire vérifier (15) par tous les éléments rectilignes de la bande comprise entre deux lignes de niveau consécutives, éléments qui joindront un point quelconque (x, y, z) de l'une d'elles $F(x, y, z) = c$ à tout point voisin $(x + dx, y + dy, z + dz)$ de l'autre $F(x, y, z) = c + dc$. Or, d'après les deux équations évidentes,

$$c = F(x, y, z) \qquad \text{et} \qquad c + dc = F(x + dx, y + dy, z + dz),$$

la relation entre dx, dy, dz caractéristique, sur cette bande, de la

région avoisinant le point (x, y, z), est $dc = \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz$ ou, vu les expressions (16) des deux dérivées de F en x et y,

$$dc = \lambda(X\,dx + Y\,dy) + \frac{dF}{dz}dz. \tag{17}$$

On voit donc, en éliminant $X dx + Y dy$ entre celle-ci et (15), puis divisant par dz, que la bande de surface comprise entre les deux lignes de niveau considérées vérifiera la relation voulue (15), à la condition, nécessaire et suffisante, que l'on ait, pour le rapport $\frac{dc}{dz}$, constant tout le long de la bande, mais d'ailleurs arbitraire, la valeur

$$\frac{dc}{dz} = \frac{dF}{dz} - \lambda Z. \tag{18}$$

Ainsi, il faudra et il suffira, pour l'existence de la bande cherchée de surface, que l'expression $\frac{dF}{dz} - \lambda Z$ soit invariable tout le long de la ligne de niveau $c = F(x, y, z)$, c'est-à-dire lorsqu'on y fera changer x et y seulement, et de manière à avoir $X\,dx + Y\,dy = 0$, ou dy et dx proportionnels à X et à $-$ Y. Il viendra donc, comme condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité entre deux lignes de niveau consécutives et puis, de proche en proche, dans tout l'espace où l'on veut construire des surfaces satisfaisant à l'équation (15),

$$X\frac{d}{dy}\left(\frac{dF}{dz} - \lambda Z\right) - Y\frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dz} - \lambda Z\right) = 0. \tag{19}$$

Indiquons, dans celle-ci, les différentiations à faire des deux termes du binôme $\frac{dF}{dz} - \lambda Z$, puis remplaçons les deux dérivées secondes $\frac{d^2F}{d(y,x)\,dz}$ par $\frac{d}{dz}\frac{dF}{d(y,x)} = \frac{d(\lambda Y, \lambda X)}{dz}$, et ajoutons enfin au premier membre, pour compléter sa symétrie, la quantité identiquement nulle $Z\left(\frac{d}{dy}\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\frac{dF}{dy}\right)$, c'est-à-dire $Z\left(\frac{d.\lambda X}{dy} - \frac{d.\lambda Y}{dx}\right)$. Nous aurons

$$X\left(\frac{d.\lambda Y}{dz} - \frac{d.\lambda Z}{dy}\right) + Y\left(\frac{d.\lambda Z}{dx} - \frac{d.\lambda X}{dz}\right) + Z\left(\frac{d.\lambda X}{dy} - \frac{d.\lambda Y}{dx}\right) = 0, \tag{20}$$

relation où chaque double terme du premier membre, à partir du deuxième, se déduit du précédent par une permutation tournante opérée sur les lettres x, y, z et X, Y, Z. Effectuons-y les différentiations indiquées des produits λX, λY, λZ, et, après avoir observé que les termes affectés

des dérivées de λ s'y détruisent deux à deux, divisons tous les autres par λ. Il viendra la relation, non moins symétrique que la précédente, mais débarrassée de λ,

$$(21)\qquad X\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)+Y\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right)+Z\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)=0.$$

Telle est donc, sous une forme ne contenant que les fonctions *données* X, Y, Z et, par conséquent, immédiatement applicable, la *condition d'intégrabilité* nécessaire et *suffisante* pour que l'équation (15) convienne à des surfaces passant par un point quelconque (x, y, z) ou pour que l'équation (15) établisse entre x, y et z, à partir d'un système arbitraire donné de valeurs de ces variables, une relation déterminant l'une d'elles en fonction des deux autres regardées comme indépendantes, savoir, z, par exemple, en fonction de x et de y. La nécessité de cette relation (21), il est bon de l'observer, résultait immédiatement de ce que, si z est fonction de x et de y, les deux dérivées *complètes* respectives, en x et en y, de $N=-\frac{Y}{Z}$ et de $M=-\frac{X}{Z}$, savoir

$$\frac{dN}{dx}+\frac{dN}{dz}M \quad \text{et} \quad \frac{dM}{dy}+\frac{dM}{dz}N,$$

sont égales d'après (5) [p. 12], ou donnent

$$(22)\qquad \frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}+M\frac{dN}{dz}-N\frac{dM}{dz}=0;$$

formule qui devient bien (21) en remplaçant M et N par les rapports de $-X$ et $-Y$ à Z, puis effectuant les différentiations de ces rapports, supprimant deux termes en $\frac{dZ}{dz}$ qui se détruisent et multipliant par Z^2.

Mais on voit que le calcul de cette fonction z, démontrée ainsi exister dans toute étendue à trois dimensions où la relation (21) est identiquement satisfaite, ne se ramène pas, comme si sa différentielle totale était explicite, à des intégrations dans le genre de $\int f(x)\,dx$: car, d'abord, c'est l'*équation* différentielle $\frac{dy}{dx}=-\frac{X}{Y}$, et non pas une simple différentielle, qui y détermine de proche en proche les lignes de niveau $c=F(x, y, z)$; de plus, après qu'on a, par l'équation $c=F(x, y, z)$, éliminé de (18) y et, par suite, x dont on sait que les changements ne modifient pas ce second membre tant que c et z sont invariables, la relation (18) devient une seconde équation différentielle, ou donne $\frac{dc}{dz}$ en fonction non seulement de z, mais aussi, le plus

souvent, de c. Le paramètre c se trouve bien, de la sorte, généralement déterminé de proche en proche, à partir d'une première valeur choisie arbitrairement pour la valeur initiale que l'on voudra attribuer à z; mais le calcul n'en est que rarement réductible à des intégrations de différentielles explicites, comme on verra plus loin dans l'étude des équations différentielles.

Voici un exemple où ces difficultés se lèvent aisément.

Soit, entre x, y, z et dx, dy, dz, l'équation

$$(23) \qquad yz\,dx - zx\,dy + xy\,dz = 0,$$

dans laquelle les coefficients $X = yz$, $Y = -zx$, $Z = xy$ vérifient bien la condition d'intégrabilité (21). Ici l'équation $X dx + Y dy = 0$ sera identiquement, en divisant par $-zx^2$, $d\frac{y}{x} = 0$; ce qui donne, pour l'équation finie des lignes de niveau, $\frac{y}{x} = c$, relation représentant toutes les droites horizontales émanées de l'axe des z. Par suite, si c est regardé comme fonction de z, il vient, en différentiant sa valeur $\frac{y}{x}$, $dc = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$, ou bien, par la substitution à $x\,dy - y\,dx$ de sa valeur $\frac{xy}{z}dz$ déduite de (23), $dc = \frac{y}{x}\frac{dz}{z}$. Éliminons, de celle-ci, y et, par suite, x, au moyen de l'équation des lignes de niveau; et nous aurons la seconde équation différentielle cherchée, $dc = \frac{c\,dz}{z}$. Or celle-ci revient à $z\,dc - c\,dz = 0$, ou est de la même forme que la première, $x\,dy - y\,dx = 0$. Intégrée, elle donnera donc $\frac{c}{z} =$ une constante arbitraire $\frac{1}{C}$; d'où $c = \frac{z}{C}$, valeur qui, portée dans l'équation $c = \frac{y}{x}$ des lignes de niveau, fournit enfin la relation finie cherchée entre x, y et z, savoir $zx - Cy = 0$. C'est l'équation d'une famille de *paraboloïdes hyperboliques*, appelés aussi *plans gauches* (dans le sens de *plans gauchis*), que coupent suivant des droites non seulement les plans de niveau $z =$ const., mais aussi tous les plans $x =$ const., parallèles aux yz, puisque l'on y a, sur chacun de ceux-ci, $\frac{z}{y} =$ la constante $\frac{C}{x}$. Et en effet, la relation trouvée, qu'on peut écrire $\frac{zx}{y} = C$, revient, en la différentiant, à poser $d\frac{zx}{y} = 0$: or il suffit de développer dans celle-ci les calculs, puis de multiplier par y^2, pour

avoir $y(z\,dx + x\,dz) - zx\,dy = 0$, ce qui est bien l'équation proposée (23).

D'après la manière même dont a été obtenue la relation (21) équivalente à (19), il suffit que cette condition d'intégrabilité ne soit pas satisfaite pour que le second membre de (18) varie le long d'une ligne de niveau $c = \text{const.}$; par conséquent, ce second membre y devient alors, en un ou plusieurs points, égal au premier membre ou à la dérivée de c, sans qu'on ait eu besoin de faire un choix déterminé de la fonction $c = \psi(z)$, mais pourvu que $\psi'(z)$, sur la ligne de niveau en question, tombe entre les limites comprenant les variations du second membre. Aux points où l'équation (18) est ainsi vérifiée sur les diverses lignes de niveau de la surface $\psi(z) = F(x, y, z)$, points dont le lieu sera, naturellement, une certaine courbe de la surface, l'équation proposée (15) se trouve évidemment, comme l'avait remarqué Monge, satisfaite par tous les éléments rectilignes de la surface; et, s'il n'y a pas alors une famille de surfaces régies dans toute leur étendue par cette équation (15), il existe du moins, à la place, une infinité de familles [qu'on obtiendra en faisant varier la forme de $\psi(z)$] où elle est vérifiée sur une bande infiniment étroite longeant certaines lignes de chacune de leurs surfaces, outre qu'elle l'est partout pour leurs lignes de niveau.

Il est clair aussi que, même dans ce cas, un seul *élément plan,* ou fragment de superficie infiniment borné, comprend encore tous les *éléments rectilignes* issus d'un point quelconque (x, y, z) et dont les projections dx, dy, dz satisfont à (15). Mais ces éléments plans, ces rudiments de surfaces, pour ainsi dire, ne se raccordent pas de manière à former ou à *envelopper* des surfaces effectives, quoique leurs directions soient graduellement variables d'un point à l'autre. Ceux qu'on mène, par exemple, aux divers points de chaque surface $\psi(z) = F(x, y, z)$ la coupent sous des angles *finis* suivant ses lignes de niveau, sauf le long de la bande dont il vient d'être parlé, où ils lui sont tangents. On peut, il est vrai, en choisissant convenablement $\psi(z)$ de proche en proche, diriger cette bande suivant toute courbe compatible avec (15); ce qui donne, à partir de chaque point (x, y, z), une infinité d'associations possibles des éléments plans considérés en *suites* qui se raccordent. Mais on n'obtient ainsi que des séries *linéaires*, incapables d'engendrer les *deux* dimensions d'une étendue superficielle.

COMPLÉMENT A LA VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

DE QUELQUES DIFFÉRENCES FINIES QUI SE SOMMENT FACILEMENT : FACTORIELLES, PROGRESSIONS; SINUS ET COSINUS D'ARCS ÉQUIDISTANTS; EXPONENTIELLES A VARIABLE IMAGINAIRE, ETC.

223*. — Extension, au cas de différences finies, de certaines des précédentes formules de sommation : factorielles; progressions arithmétiques et leurs sommes successives.

Quelques-unes des formules précédentes (1) d'intégration, savoir, celle qui est relative à $\int x^m dx$, pour les valeurs entières (autres que -1) de m, et les trois qui concernent $\int e^x dx$, $\int \cos x dx$, $\int \sin x dx$, sont les cas limites de relations simples et importantes permettant de sommer non plus des différentielles, mais des différences finies obtenues en donnant à la variable x des valeurs équidistantes, dont Δx ou h désignera l'intervalle.

Occupons-nous d'abord de la première, où l'expression dont on somme les valeurs devient $x^m dx$ quand on fait tendre vers zéro l'accroissement Δx ou h. La fonction x^m, pour m entier et positif, s'y trouve remplacée par l'expression $x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h]$, qu'on appelle une *factorielle,* et qui deviendrait, comme on voit, une puissance entière de x si h s'annulait. Par suite, l'expression, analogue à $x^m dx$, dont il s'agit de sommer les valeurs successives quand x y croît par intervalles h égaux, depuis une valeur initiale arbitraire a jusqu'à une autre la dépassant d'un multiple quelconque de h, est $x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h]\times h$, que l'on réduirait à h si m était nul. Et la somme en question s'écrira

$$\Sigma\, x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h]\,h,$$

par analogie avec $\int x^m dx$. Mais je supposerai, en vue de simplifier le plus possible certaines formules, que le dernier terme effectivement compris dans cette somme soit celui qui précède le terme même inscrit à la suite du signe Σ pour les représenter tous, et où x désignera la dernière valeur de la variable que l'on veuille avoir à considérer dans les calculs. Ici, par exemple, la somme Σ s'arrêtera au

terme

$$(x-h)(x-2h)\dots(x-mh)$$

inclusivement. La relation qu'il s'agit d'établir sera d'ailleurs, en suivant pour le second membre $\frac{x^{m+1}}{m+1}+c$ de la formule (1) à généraliser la même analogie que pour le premier membre,

$$(2) \quad \begin{cases} \Sigma x(x-h)(x-2h)\dots[x-(m-1)h]h \\ \qquad = \dfrac{x(x-h)(x-2h)\dots(x-mh)}{m+1}+c. \end{cases}$$

En effet, si le premier membre s'accroît d'un nouveau terme, où $x-h$ se trouvera changé en x, ce nouveau terme sera celui-même qui s'y trouve inscrit sous le signe Σ, savoir

$$x(x-h)\dots[x-(m-1)h]h.$$

Or c'est précisément de cette quantité que grandira le second membre, dont la différence finie ou l'accroissement sera (Δc étant nul)

$$\begin{cases} \Delta \dfrac{x(x-h)\dots(x-mh)}{m+1} \\ \quad = \dfrac{(x+h)x(x-h)\dots[x-(m-1)h]-x(x-h)(x-2h)\dots(x-mh)}{m+1} \\ \quad = x(x-h)\dots[x-(m-1)h]\dfrac{(x+h)-(x-mh)}{m+1} \\ \quad = x(x-h)\dots[x-(m-1)h]h. \end{cases}$$

Donc la différence des deux membres se maintient constante quand x s'éloigne de plus en plus de a, par accroissements h tous pareils; et ces deux membres seront bien égaux constamment, si l'on met pour c une valeur les rendant tels alors que le premier membre n'a encore aucun terme, c'est-à-dire alors que, dans le second membre de (2), x se réduit à a. On posera donc

$$(3) \qquad c = -\frac{a(a-h)(a-2h)\dots(a-mh)}{m+1}.$$

Dans le cas le plus simple (sauf celui de m nul), on a $m=1$; ce qui, après substitution à c de sa valeur (3), change la formule (2), divisée d'ailleurs par h, en celle-ci

$$(4) \qquad \Sigma x = \frac{x(x-h)-a(a-h)}{2h} = \frac{(a+x-h)(x-a)}{2h}.$$

On voit que les *éléments* a, $a+h$, $a+2h$, ..., $x-h$ de la somme

Σx forment une progression par différence, dont le dernier terme, que j'appellerai l, a pour expression $a+(n-1)h$, si n désigne leur nombre. Or, le troisième membre, en y remplaçant $a+x-h$ par $a+l$ et $x-a$ par nh, devient bien l'expression connue, $\frac{1}{2}(a+l)n$, de cette somme. Ainsi, la formule (2) qui, par l'hypothèse $h=dx$, comprend la première (1) dans le cas de m entier et positif, constitue une généralisation importante de la règle élémentaire concernant la somme des progressions arithmétiques.

Laissons maintenant m quelconque dans (2), mais attribuons, pour plus de simplicité, la valeur 1 à h et la valeur zéro à a. La relation (3) donnera $c=0$; et la formule (2), divisée par le facteur constant $1.2.3\ldots m$, deviendra

$$(5)\qquad \sum \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)}{1.2.3\ldots m} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m)}{1.2.3\ldots(m+1)}.$$

Le second membre y a la même expression générale que chacun des termes du premier; mais x y dépasse de 1 sa dernière ou plus forte valeur dans le premier membre, et m s'y trouve remplacé de même par $m+1$. Comme, dans le cas $m=1$, les divers termes du premier membre forment la progression arithmétique 0, 1, 2, ..., $x-1$, dont le second membre exprime la somme, on voit, en faisant successivement $m=1$, $m=2$, $m=3$, ..., que ces quantités figurant au second membre, également représentatives, comme on sait, des nombres de combinaisons de x objets pris 2 à 2, 3 à 3, ..., seront des sommes de sommes de progressions arithmétiques.

Quand l'exposant m, toujours entier, devient négatif et présente d'ailleurs, en valeur absolue, une certaine différence μ d'avec l'unité, un facteur comme $x-(m-1)h$ ou $x-\mu h$, dans la factorielle ci-dessus généralisée de x^m, se trouve naturellement remplacé par $x+\mu h$ et, de plus, passe en dénominateur. Par suite, la formule de $\int x^m\,dx$, devenue $\int \frac{dx}{x^{1+\mu}} = -\frac{1}{\mu x^\mu}+c$, a pour analogue, au lieu de (2),

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{h}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+\mu h)} \\ &\quad = -\frac{1}{\mu}\,\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(\mu-1)h]}+c. \end{aligned} \right.$$

Et, en effet, si l'on fait croître x de h, de manière à ajouter au premier membre le terme écrit après le signe Σ, le second membre

grandit justement de ce terme, vu qu'on a identiquement

$$\Delta\left\{-\frac{1}{\mu}\frac{1}{x(x+h)\ldots[x+(\mu-1)h]}\right\}$$
$$=-\frac{1}{\mu}\left\{\frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+\mu h)}-\frac{1}{x(x+h)\ldots[x+(\mu-1)h]}\right\}$$
$$=-\frac{1}{\mu}\frac{x-(x+\mu h)}{x(x+h)\ldots(x+\mu h)}=\frac{h}{x(x+h)\ldots(x+\mu h)}.$$

Il suffit donc de choisir c de manière que l'égalité des deux membres de (6) ait lieu *initialement,* en entendant par *état initial* de la somme Σ non pas, précisément, l'état où elle se trouve réduite à son premier terme, pour lequel $x=a$, mais plutôt celui où elle n'a encore aucun terme, et où x égale a dans le second membre, valeur de cette somme. Il vient ainsi

$$(7)\qquad c=\frac{1}{\mu}\frac{1}{a(a+h)(a+2h)\ldots[a+(\mu-1)h]}.$$

Pour faire une application de la formule (6), portons-y cette expression de c et, prenant simplement $h=1$, proposons-nous de trouver la somme

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+\mu)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+\mu+1)}\\&\qquad+\frac{1}{(a+2)\ldots(a+\mu+2)}+\ldots,\end{aligned}\right.$$

prolongée à l'infini. Il suffira évidemment de poser $x=\infty$ dans le second membre de (6); ce qui donnera, pour cette somme, la valeur même de c, ou, d'après (7), le produit du premier terme

$$\frac{1}{a(a+1)\ldots(a+\mu)}$$

par le rapport $\frac{a+\mu}{\mu}=1+\frac{a}{\mu}$.

224*. — Suite : sommation des progressions géométriques à termes, soit réels, soit imaginaires, ce qui comprend celle de sinus ou cosinus d'arcs équidistants; différentielle d'une exponentielle imaginaire, etc.

Si la formule $\int x^m\,dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c$, dans le cas de m entier et positif, peut être regardée comme une généralisation de la règle élémentaire d'Arithmétique qui sert à sommer les progressions par

différence, la formule $\int e^x\,dx = e^x + c$ est, de son côté, une conséquence simple de la règle non moins élémentaire concernant la somme d'une progression par quotient A, Aq, Aq^2, ..., Aq^{n-1}. Soient, dans celle-ci, a et h les logarithmes népériens du premier terme A et de la raison q. La somme, $e^a + e^{a+h} + e^{a+2h} + \ldots + e^{a+(n-1)h}$, s'écrira, avec nos notations, Σe^x; et sa valeur bien connue $\frac{Aq^n - A}{q-1}$, ou $\frac{e^{a+nh} - e^a}{e^h - 1}$, sera $\frac{e^x - e^a}{e^h - 1}$. Donc, en multipliant par h et posant finalement $-\frac{h}{e^h-1}e^a = c$, on aura la formule, que je dis se réduire à $\int e^x\,dx = e^x + c$ dans le cas limite $h = dx$,

$$\Sigma e^x h = \frac{h}{e^h - 1}(e^x - e^a) = \frac{h}{e^h - 1}e^x + c. \tag{8}$$

Et, en effet, d'une part, si l'on ajoute un terme de plus au premier membre, savoir le terme $e^x h$, le second membre croîtra bien d'autant; car

$$\Delta \frac{he^x}{e^h - 1} = \frac{h}{e^h - 1}(e^{x+h} - e^x) = \frac{h}{e^h - 1}e^x(e^h - 1) = e^x h:$$

il suffit, par suite, pour l'égalité, que les deux membres de (8) aient la même valeur initiale, c'est-à-dire que, à l'instant où $x = a$ et où le premier membre ne comprend encore aucun terme, le second membre soit nul; ce qui aura lieu en prenant $c = -\frac{h}{e^h - 1}e^a$. Ainsi se trouve établie directement la formule (8), d'où se déduirait alors la règle de sommation des progressions géométriques. Or, d'autre part, quand h tend vers zéro ou devient dx, le dénominateur $e^h - 1$, nul à la limite, se réduit au produit de dx par la dérivée en h de $e^h - 1$ pour $h = 0$, c'est-à-dire par 1; ce qui réduit bien aussi la formule (8) à $\int e^x\,dx = e^x + c$.

Après avoir, pour simplifier, divisé les deux premiers membres de (8) par h, et écrit

$$\Sigma e^x = \frac{e^x - e^a}{e^h - 1}, \tag{9}$$

supposons a, h et, par conséquent, x imaginaires, ou remplacés par des symboles de la forme $A + B\sqrt{-1}$, en convenant de traiter ces symboles, dans les modes algébriques de combinaison appelés *addition, soustraction* et *multiplication,* comme si $\sqrt{-1}$ était une constante de grandeur indéterminée dont le carré vaudrait -1, et en

regardant, bien entendu, le facteur $\frac{1}{e^h - 1}$, où $e^h - 1$ sera, par exemple, $M + N\sqrt{-1}$, comme représentant le binôme

$$\frac{M}{M^2 + N^2} - \frac{N}{M^2 + N^2}\sqrt{-1},$$

qui, multiplié par $M + N\sqrt{-1}$, donne l'unité. Cette formule (9) n'en continuera pas moins à être une identité, grâce à la relation symbolique ou générale $e^{x+h} = e^x e^h$ démontrée dans la troisième Leçon (t. I, p. 34*); car le second membre, évidemment nul, comme le premier, pour $x = a$, ou alors que le premier membre n'aura encore aucun terme, croîtra de la quantité imaginaire

$$\frac{1}{e^h - 1}(e^{x+h} - e^x) = \frac{1}{e^h - 1}(e^h - 1)e^x = e^x,$$

quand on ajoutera un terme de plus, e^x, au premier membre, ou chaque fois que x croîtra symboliquement de h. Il suffira donc de faire, dans les deux membres de (9), la séparation des deux parties réelles (ou affectées des puissances paires de $\sqrt{-1}$), puis celle des parties imaginaires (ou affectées des puissances impaires de $\sqrt{-1}$), et de les égaler chacune à chacune, pour extraire de cette formule les deux relations réelles qu'elle contient d'une manière symbolique.

Dans ce but, et nous bornant, pour simplifier, au cas d'une valeur initiale a nulle, où les valeurs successives de x sont de simples multiples de h, posons $x = (\alpha + \beta\sqrt{-1})u$, ou appelons α et $\beta\sqrt{-1}$ les deux rapports constants de la partie réelle et de la partie imaginaire de x à une quantité réelle u, uniformément variable, comme x, à partir de zéro. Alors, en désignant par k l'accroissement constant Δu ainsi éprouvé par u d'un terme à l'autre, on aura

$$h \quad \text{ou} \quad \Delta x = (\alpha + \beta\sqrt{-1})k.$$

Par suite, si l'on remplace e^x et e^h, ou $e^{\alpha u + \sqrt{-1}\beta u}$ et $e^{\alpha k + \sqrt{-1}\beta k}$, par leurs expressions explicites

$$e^{\alpha u}\cos\beta u + \sqrt{-1}\, e^{\alpha u}\sin\beta u, \quad e^{\alpha k}\cos\beta k + \sqrt{-1}\, e^{\alpha k}\sin\beta k,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{e^h - 1} = \frac{(e^{\alpha k}\cos\beta k - 1) - \sqrt{-1}\, e^{\alpha k}\sin\beta k}{(e^{\alpha k}\cos\beta k - 1)^2 + (e^{\alpha k}\sin\beta k)^2},$$

la formule (9), où l'on fera d'ailleurs $e^a = 1$, deviendra

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma e^{\alpha u}\cos\beta u + \sqrt{-1}\,\Sigma e^{\alpha u}\sin\beta u \\ &\quad = \frac{\left[(e^{\alpha k}\cos\beta k - 1) - \sqrt{-1}\,e^{\alpha k}\sin\beta k\right]\left[(e^{\alpha u}\cos\beta u - 1) + \sqrt{-1}\,e^{\alpha u}\sin\beta u\right]}{(e^{\alpha k}\cos\beta k - 1)^2 + (e^{\alpha k}\sin\beta k)^2}. \end{aligned}\right.$$

Le calcul s'achève aisément, et, en remplaçant par $\cos\beta(u-k)$ ou par $\sin\beta(u-k)$ les développements de ces cosinus et sinus de la différence $\beta u - \beta k$, il vient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma e^{\alpha u}\cos\beta u &= \frac{e^{\alpha(u+k)}\cos\beta(u-k) - e^{\alpha u}\cos\beta u - e^{\alpha k}\cos\beta k + 1}{e^{2\alpha k} - 2e^{\alpha k}\cos\beta k + 1}, \\ \Sigma e^{\alpha u}\sin\beta u &= \frac{e^{\alpha(u+k)}\sin\beta(u-k) - e^{\alpha u}\sin\beta u + e^{\alpha k}\sin\beta k}{e^{2\alpha k} - 2e^{\alpha k}\cos\beta k + 1}. \end{aligned}\right.$$

Les premiers membres $\Sigma e^{\alpha u}\cos\beta u$ et $\Sigma e^{\alpha u}\sin\beta u$ représentent les deux sommes respectives

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &e^0(\cos 0 \text{ ou } \sin 0) + e^{\alpha k}(\cos\beta k \text{ ou } \sin\beta k) \\ &\quad + e^{2\alpha k}(\cos 2\beta k \text{ ou } \sin 2\beta k) + \ldots \\ &\quad + e^{\alpha(u-k)}[\cos\beta(u-k) \text{ ou } \sin\beta(u-k)], \end{aligned}\right.$$

où α, β, k sont trois constantes quelconques et u le multiple positif de k qui figure dans les seconds membres de (11).

Cet exemple, où nous voyons la simple formule de la somme d'une progression par quotient permettre d'effectuer des additions aussi complexes que celles des termes de (12), est bien propre à montrer toute la profondeur et la fécondité des transformations qu'opère le symbole $\sqrt{-1}$.

Tirons de ces formules (11), quoique nous devions bientôt l'obtenir directement, la somme soit des cosinus, soit des sinus, des n multiples $0, k, 2k, 3k, \ldots, (n-1)k$ de l'arc quelconque k. Il suffira de poser $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $u = nk$. Les seconds membres seront

$$\frac{\cos(n-1)k - \cos nk - \cos k + 1}{2(1-\cos k)}, \qquad \frac{\sin(n-1)k - \sin nk + \sin k}{2(1-\cos k)},$$

ou bien, en remplaçant la différence des cosinus ou des sinus de $(n-1)k$ et de nk par des doubles produits de sinus ou de cosinus, puis $1-\cos k$, $\sin k$ par $2\sin^2\frac{k}{2}$, $2\sin\frac{k}{2}\cos\frac{k}{2}$ et réduisant,

$$\frac{\sin(n-\frac{1}{2})k}{2\sin\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}, \qquad \frac{\cos\frac{k}{2} - \cos(n-\frac{1}{2})k}{2\sin\frac{k}{2}}.$$

Il vient donc, si l'on retranche de la première somme la quantité $\frac{1}{2}$,

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}+\cos k+\cos 2k+\ldots+\cos(n-1)k=\dfrac{\sin(n-\frac{1}{2})k}{2\sin\dfrac{k}{2}}, \\ \sin k+\sin 2k+\ldots+\sin(n-1)k \\ \qquad =\dfrac{\cos\dfrac{k}{2}-\cos(n-\frac{1}{2})k}{2\sin\dfrac{k}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{nk}{2}\sin\dfrac{(n-1)k}{2}}{\sin\dfrac{k}{2}}. \end{cases}$$

On rend la première de ces deux relations, qui est la plus simple, tout à fait symétrique, en la multipliant par 2, puis en remplaçant le premier terme, 1, par $\cos 0$, et les termes suivants, tels que $2\cos k$, par $\cos k+\cos(-k)$, etc. Elle exprime alors que *la somme des cosinus des* $2n-1$ *multiples tant négatifs que positifs de* k, *compris entre* $-nk$ *et* nk *exclusivement, égale le rapport, au sinus de l'arc moitié* $\frac{k}{2}$, *du sinus de son* $(2n-1)^{ième}$ *multiple positif* $(n-\frac{1}{2})k$.

Établissons directement les deux formules (13), dont la première nous servira plus loin. Il suffit, pour cela, d'observer qu'elles sont évidentes pour $n=1$, ou alors que leurs premiers membres se trouvent réduits à leurs termes indépendants de k, et de démontrer qu'elles restent vérifiées quand on ajoute, autant de fois qu'on le veut, un terme de plus aux premiers membres, en faisant, dans les seconds, croître n d'une unité. Autrement dit, il ne s'agit que de reconnaître si un nouveau terme $\cos nk$ ou $\sin nk$, ajouté aux premiers membres, représente bien l'augmentation simultanée des seconds membres, où $(n-\frac{1}{2})k$ devient alors $(n+\frac{1}{2})k$.

Pour plus de généralité, remplaçons nk par un arc variable quelconque u, dont l'accroissement constant serait k, et vérifions si l'on a bien

$$(14)\qquad \cos u=\frac{\Delta\sin\left(u-\dfrac{k}{2}\right)}{2\sin\dfrac{k}{2}},\qquad \sin u=\frac{-\Delta\cos\left(u-\dfrac{k}{2}\right)}{2\sin\dfrac{k}{2}}.$$

Or, c'est ce que montre de suite l'effectuation des calculs, après développement des sinus et cosinus de $u\pm\frac{k}{2}$ suivant les sinus et cosinus de u et de $\frac{k}{2}$, dans les expressions de $\Delta\sin\left(u-\frac{k}{2}\right)$ et

$\Delta \cos\left(u - \frac{k}{2}\right)$, qui sont

$$\Delta \sin\left(u - \frac{k}{2}\right) = \sin\left(u + \frac{k}{2}\right) - \sin\left(u - \frac{k}{2}\right),$$
$$\Delta \cos\left(u - \frac{k}{2}\right) = \cos\left(u + \frac{k}{2}\right) - \cos\left(u - \frac{k}{2}\right).$$

Multiplions par $\Delta u = k$ les deux relations (14), puis changeons-y u en x, k en Δx, et, faisant varier x depuis une première valeur quelconque jusqu'à une autre $x - \Delta x$ qui la dépasse d'un multiple quelconque de Δx, prenons les sommes respectives des accroissements successifs exprimés par les seconds membres. Il viendra évidemment

$$(15)\quad \begin{cases} \Sigma \cos x\,\Delta x = \dfrac{\frac{\Delta x}{2}}{\sin\frac{\Delta x}{2}} \sin\left(x - \dfrac{\Delta x}{2}\right) + \text{const.}, \\[2ex] \Sigma \sin x\,\Delta x = -\dfrac{\frac{\Delta x}{2}}{\sin\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x - \dfrac{\Delta x}{2}\right) + \text{const.} \end{cases}$$

Telles sont les deux formules, analogues à celles de $\int \cos x\,dx$ et $\int \sin x\,dx$, qu'il nous restait à établir. Si Δx, s'évanouissant, devient dx, le rapport de $\frac{\Delta x}{2}$ à $\sin\frac{\Delta x}{2}$ y tendra vers l'unité et l'on aura bien, à la limite, $\int \cos x\,dx = \sin x + c$, $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$.

On voit, par les exemples tant de ce numéro que du précédent, combien la continuité ou l'hypothèse d'accroissements infiniment petits, au lieu d'accroissements sensibles de la variable, simplifie l'expression des différences Δ et de leurs sommes. Ainsi cherchons encore, pour conclure, de quels termes s'accroît symboliquement (c'est-à-dire dans ses deux parties, l'une réelle et l'autre affectée de $\sqrt{-1}$) l'expression analytique, où $\sqrt{-1}$ est assimilé à une constante ayant pour carré -1, d'une exponentielle imaginaire e^x, quand x y éprouve un accroissement dx de la forme $\varepsilon + \zeta\sqrt{-1}$, avec ε et ζ réels, mais infiniment petits. L'expression symbolique de e^x s'augmente alors, comme on a vu après la formule (9) [p. 13*], de

$$e^x(e^{dx} - 1) = e^x\left(e^{\varepsilon+\zeta\sqrt{-1}} - 1\right).$$

Or on a

$$e^{\varepsilon+\zeta\sqrt{-1}} - 1 = (e^\varepsilon \cos\zeta - 1) + \sqrt{-1}\,e^\varepsilon \sin\zeta,$$

ou bien, en observant que ε et ζ sont des infiniment petits du premier

ordre et que, par suite, à des erreurs près négligeables d'ordre supérieur, e^{ε}, $\cos\zeta$, $\sin\zeta$ se réduisent à $1+\varepsilon$, 1, ζ,

$$e^{\varepsilon+\zeta\sqrt{-1}}-1=\varepsilon+\zeta\sqrt{-1}.$$

Donc il vient

$$(16)\qquad d.e^{x}=e^{x}\left(\varepsilon+\zeta\sqrt{-1}\right)=e^{x}\,dx,$$

comme si x était une variable réelle.

Si, par exemple, $x=\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)u$ [d'où résultera

$$dx=\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)du],$$

cette formule (16), multipliée par $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, donnera

$$(17)\qquad d\left[\left(\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})u}\right]=(\alpha^2+\beta^2)\,e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})u}\,du.$$

Remplaçons-y $e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})u}$ par son expression

$$e^{\alpha u}\left(\cos\beta u+\sqrt{-1}\sin\beta u\right),$$

puis développons au premier membre la multiplication symbolique indiquée entre crochets, et égalons séparément, des deux côtés du signe $=$, soit la partie réelle, soit la partie affectée de $\sqrt{-1}$, que nous savons devoir être, de part et d'autre, respectivement identiques (à des infiniment petits près d'ordre supérieur). Il viendra

$$d[e^{\alpha u}(\alpha\cos\beta u+\beta\sin\beta u)]=(\alpha^2+\beta^2)\,e^{\alpha u}\cos\beta u\,du,$$
$$d[e^{\alpha u}(\alpha\sin\beta u-\beta\cos\beta u)]=(\alpha^2+\beta^2)\,e^{\alpha u}\sin\beta u\,du,$$

comme le prouveraient directement les différentiations indiquées aux premiers membres de celles-ci. Intégrons, en changeant d'ailleurs les membres de place et divisant par $\alpha^2+\beta^2$. Nous aurons les deux intégrales, très importantes,

$$(18)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int e^{\alpha u}\cos\beta u\,du=\frac{\alpha\cos\beta u+\beta\sin\beta u}{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha u}+\text{const.},\\[2ex] \displaystyle\int e^{\alpha u}\sin\beta u\,du=\frac{\alpha\sin\beta u-\beta\cos\beta u}{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha u}+\text{const.}\end{cases}$$

On aurait pu aussi les déduire, comme cas limite, des formules (11) multipliées par k, qui expriment des sommes de différences finies tendant vers $\int e^{\alpha u}\cos\beta u\,du$ et $\int e^{\alpha u}\sin\beta u\,du$ lorsque k ou Δu y devient un infiniment petit du. Nous les retrouverons, du reste, sans l'emploi des imaginaires, à la fin de la Leçon (p. 33), sous des formes équivalentes, où u, α et β s'appelleront respectivement x, $-a$ et b.

228*. — Sommation des différences finies exprimées par une fonction entière d'une variable dont les valeurs successives sont équidistantes; application à des sommes de carrés et de cubes.

Rien, dans la démonstration des deuxième et troisième règles énoncées ci-dessus (¹), n'a exigé la supposition que les accroissements successifs de x fussent infiniment petits. Ces règles s'appliqueront donc également à des différences finies ; et, grâce à la sommation immédiate, précédemment effectuée, des factorielles, elles permettront, dans le cas d'accroissements constants $\Delta x = h$ de la variable, de sommer celles d'entre ces différences qui seront rationnelles et entières, ou exprimées par un polynôme $f(x) = \mathrm{A}x^m + \mathrm{B}x^{m-1} + \ldots$.

Si l'on observe, en effet, que x^m est le terme le plus élevé de la factorielle $x(x-h)(x-2h)\ldots[x-(m-1)h]$, la première partie, $\mathrm{A}x^m$, du polynôme proposé, pourra être remplacée par

$$\mathrm{A}x(x-h)\ldots[x-(m-1)h],$$

pourvu qu'on ajoute à l'autre partie, $\mathrm{B}x^{m-1}+\ldots$, le produit de A par l'excédent de x^m sur cette factorielle. Le polynôme se dédoublera ainsi en un terme proportionnel à la factorielle de son degré m et un polynôme du degré $m-1$. En extrayant de même, de ce nouveau polynôme, le produit de son premier coefficient par la factorielle du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré

$$x(x-h)\ldots[x-(m-2)h],$$

et ainsi de suite, on aura finalement décomposé l'expression proposée en termes, proportionnels à des factorielles, dont chacun, sommé séparément, donnera, à une constante près, un résultat proportionnel à la factorielle dont le degré dépassera le sien de 1. Il ne restera donc plus qu'à ajouter au total une quantité c constante ou plutôt sans différence finie, et dont la grandeur, arbitraire jusque-là, se déterminera de manière à annuler l'expression totale pour la valeur a de x choisie à volonté comme *initiale,* c'est-à-dire correspondant à l'instant où la somme Σ qu'on veut évaluer n'a encore aucun terme.

Comme le résultat sera un certain polynôme du $(m+1)^{\text{ième}}$ degré, $\mathrm{F}(x)$, et que les coefficients de celui-ci, abstraction faite de son terme constant sans influence sur $\Delta\mathrm{F}(x)$, se trouvent être en même nombre que ceux du proposé $f(x)$, on peut encore, sans décomposer $f(x)$ en termes proportionnels à des factorielles, appliquer au calcul de $\mathrm{F}(x)$

(¹) *Voir* la *Partie élémentaire,* p. 20.

la méthode des coefficients indéterminés, c'est-à-dire prendre provisoirement pour $F(x)$ le polynôme le plus général du $(m+1)^{\text{ième}}$ degré, en écrivant que ses coefficients doivent être choisis de manière à donner, pour une infinité de valeurs de x,

$$(19) \qquad \Delta F(x) = f(x) \quad \text{ou} \quad F(x+h) - F(x) = f(x).$$

Or l'identification, dans les deux membres de (19), des termes d'un même degré quelconque en x, fournit évidemment autant d'équations du premier degré, entre les coefficients des termes variables de $F(x)$, qu'il y a de tels coefficients ou qu'il y a de termes dans $\Delta F(x)$. La résolution de ces équations fera donc connaître l'expression de $F(x)$, à une quantité arbitraire près c ayant sa différence finie Δc nulle, et que l'on déterminera en se donnant la valeur initiale a de x.

Comme exemple simple, proposons-nous d'évaluer les sommes Σx^2 et Σx^3 des carrés et des cubes des nombres entiers $0, 1, 2, \ldots, (x-1)$. On aura ici $h=1$, $a=0$, et comme les décompositions de x^2, x^3 en factorielles donneront de suite

$$x^2 = x(x-1) + x, \qquad x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x,$$

il viendra, par des sommations immédiates de ces factorielles, à partir de la valeur initiale $x=0$ qui les annule toutes,

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma x^2 &= \frac{x(x-1)(x-2)}{3} + \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}, \\ \Sigma x^3 &= \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4} \\ &\qquad + x(x-1)(x-2) + \frac{x(x-1)}{2} = \left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2. \end{aligned} \right.$$

On a donc les deux formules

$$(20\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (x-1)^2 &= \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (x-1)^3 &= \left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2 \\ &= [1 + 2 + \ldots + (x-1)]^2. \end{aligned} \right.$$

COMPLÉMENT A LA VINGT-TROISIÈME LEÇON.

FORMATION DIRECTE DES FRACTIONS SIMPLES COMPRISES DANS UNE FRACTION RATIONNELLE DONNÉE; INTÉGRALES INDÉFINIES OU LA FONCTION SOUS LE SIGNE $\int$ EST PRISE LE LONG D'UNE COURBE UNICURSALE; RÉDUCTION DES INTÉGRALES DE CERTAINES DIFFÉRENTIELLES IRRATIONNELLES A QUELQUES-UNES D'ELLES SEULEMENT.

241*. — **Formules générales des fractions simples, à numérateurs constants, provenant de la décomposition d'une fraction rationnelle.**

Quand les facteurs du polynôme $f(x)$, dans la fraction rationnelle et sans partie entière $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, sont réductibles au premier degré (ce qui arrive toujours en employant au besoin des expressions imaginaires d'où l'on éliminera plus tard $\sqrt{-1}$ par des groupements convenables), les numérateurs, alors constants, des fractions simples admettent des expressions générales faciles à former.

Supposant d'abord toutes inégales les n racines du polynôme $f(x)$, désignons-les par $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, et appelons $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ les numérateurs correspondants des fractions simples. Alors la relation (2) peut s'écrire simplement

$$(3) \qquad \varphi(x) - A_1 \frac{f(x)}{x-a_1} - A_2 \frac{f(x)}{x-a_2} - \ldots - A_n \frac{f(x)}{x-a_n} = 0,$$

où les quotients de $f(x)$ par $x-a_1, x-a_2, \ldots, x-a_n$ sont les produits de tous ces facteurs du premier degré autres que celui par lequel on divise et, d'une part, s'annulent avec un quelconque de ces autres facteurs, tandis que, d'autre part, ils deviennent évidemment la dérivée $f'(x)$, c'est-à-dire $\lim \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, quand c'est le facteur considéré lui-même, de la forme $x-a$, qui s'annule. Les n valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de x réduisent donc (3), respectivement, à

$$\varphi(a_1) - A_1 f'(a_1) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi(a_n) - A_n f'(a_n) = 0;$$

ce qui conduit immédiatement aux valeurs cherchées de A_1,

$A_2, \ldots, A_n$,

$$(4) \qquad A_1 = \frac{\varphi(a_1)}{f'(a_1)}, \qquad A_2 = \frac{\varphi(a_2)}{f'(a_2)}, \qquad \ldots, \qquad A_n = \frac{\varphi(a_n)}{f'(a_n)}.$$

D'ailleurs, l'équation (3) se trouve bien alors satisfaite quel que soit x; car son premier membre, polynôme du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré seulement, ne peut s'annuler ainsi pour les n valeurs *distinctes* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de x, sans avoir tous ses coefficients réduits à zéro.

Observons que, si $\varphi(x) = Hx^{n-1} + \ldots$, ou si H désigne, dans $\varphi(x)$, le coefficient du terme de degré $n-1$, c'est-à-dire le plus élevé possible, le coefficient total de x^{n-1} dans le premier membre de (3) sera $H - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n)$; ce que l'on peut exprimer par $H - \Sigma A$. On aura donc $\Sigma A = H$, ou, en remplaçant, dans ΣA, les divers termes $A_1, A_2, \ldots$ par leurs valeurs (4),

$$(5) \qquad \sum \frac{\varphi(x)}{f'(x)} = H,$$

le signe Σ de sommation, au premier membre, s'étendant à toutes les racines $x = a_1, x = a_2, \ldots, x = a_n$, de l'équation $f(x) = 0$.

Passons maintenant au cas où il y a p racines égales. Il ne se produit que pour certaines valeurs des coefficients de $f(x)$; de sorte que l'on y arrive, à partir du cas de racines toutes inégales, en supposant variable un groupe quelconque de ces coefficients et en les faisant tendre vers les valeurs désignées. Admettons donc que, grâce à de telles variations continues, p racines, $a_1, a_2, \ldots, a_p$, deviennent égales; et soient c leur valeur finale commune, $h_1, h_2, \ldots, h_p$ les petits excédents inégaux, mais tous évanouissants, qu'elles présentent sur c un peu avant de s'y réduire. La partie du développement de $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ qui correspondra aux racines $c + h_1, c + h_2, \ldots, c + h_p$, sera, d'après (4),

$$(6) \qquad \frac{\varphi(c+h_1)}{f'(c+h_1)} \frac{1}{x - (c+h_1)} + \ldots .$$

Isolons-y, dans $f'(c+h_1)$, ou dans $f'(c+h_2), \ldots$, les facteurs infiniment petits. Comme $f'(c+h_1)$ remplace ici le quotient, pour $x = c + h_1$, de $f(x)$ par $x - (c+h_1)$, il y a lieu de considérer spécialement, dans $f(x)$, les facteurs qui tendent vers $x - c$ (c'est-à-dire vers zéro quand on fera $x = c$), et, d'un autre côté, le produit de ceux qui n'y tendent pas. Appelons $\psi(x)$ ce produit, différent de zéro pour $x = c$, même à la limite où $h_1, h_2, \ldots, h_p$ s'annulent; et écrivons, par conséquent,

$$f(x) = (x - c - h_1)(x - c - h_2)\ldots(x - c - h_p)\psi(x).$$

Alors, par exemple, le quotient, $f'(c+h_1)$, de $f(x)$ par $x-c-h_1$, à la limite $x=c+h_1$, prend la valeur

$$(h_1-h_2)(h_1-h_3)\ldots(h_1-h_p)\psi(c+h_1)$$

ou bien, évidemment, la valeur $\chi'(h_1)\psi(c+h_1)$, si l'on appelle $\chi(h)$ la fonction $(h-h_1)(h-h_2)\ldots(h-h_p)$, qui est un polynôme du degré p par rapport à la variable auxiliaire h. Ainsi le premier terme de (6) devient $\frac{1}{\chi'(h_1)}\frac{\varphi(c+h_1)}{\psi(c+h_1)}\frac{1}{x-(c+h_1)}$; et, les suivants ayant des formes analogues en $h_2,\ldots,h_p$, l'expression (6) peut s'écrire d'une manière abrégée

$$(7)\qquad \sum \frac{1}{\chi'(h)}\frac{\varphi(c+h)}{\psi(c+h)}\frac{1}{x-(c+h)},$$

s'il est entendu que la somme Σ s'étend aux p racines $h=h_1$, $h=h_2$, $\ldots$, $h=h_p$ de l'équation $\chi(h)=0$. Or, actuellement, on peut, dans chacun des p termes de (7), développer par la formule de Taylor, suivant les puissances de la quantité évanouissante h qui y figure, la fonction $\frac{\varphi(c+h)}{\psi(c+h)}\frac{1}{x-(c+h)}$ de $c+h$, fonction qui ne devient pas infinie, non plus que ses dérivées, pour $h=0$ [car alors le dénominateur $\psi(c)$ n'est pas nul]. Il vient

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\varphi(c+h)}{\psi(c+h)}\frac{1}{x-(c+h)}\\&\qquad=\frac{\varphi(c)}{\psi(c)}\frac{1}{x-c}+\frac{h}{1}\frac{d.\frac{\varphi(c)}{\psi(c)}\frac{1}{x-c}}{dc}+\frac{h^2}{1.2}\frac{d^2.\frac{\varphi(c)}{\psi(c)}\frac{1}{x-c}}{dc^2}+\ldots;\end{aligned}\right.$$

et l'expression (7), en s'y arrêtant aux termes du degré $p-1$ (en h) inclusivement, est

$$(8)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\varphi(c)}{\psi(c)}\frac{1}{x-c}\sum\frac{1}{\chi'(h)}\\&\quad+\frac{1}{1}\frac{d.\frac{\varphi(c)}{\psi(c)}\frac{1}{x-c}}{dc}\sum\frac{h}{\chi'(h)}+\ldots\\&\qquad+\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}\frac{d^{p-1}.\frac{\varphi(c)}{\psi(c)}\frac{1}{x-c}}{dc^{p-1}}\sum\frac{h^{p-1}}{\chi'(h)}.\end{aligned}\right.$$

Les termes complémentaires, non écrits, des séries auraient leurs numérateurs de l'ordre de h^p et, par suite, incomparablement plus petits que les dénominateurs $\chi'(h)$ dont le degré en h, h_1, h_2, $\ldots$, h_p

est le $(p-1)^{\text{ième}}$ seulement : ces termes s'évanouiraient donc à la limite, et ils sont bien négligeables.

Cela posé, appliquons la relation (5) aux fractions rationnelles $\frac{1}{\chi(h)}, \frac{h}{\chi(h)}, \frac{h^2}{\chi(h)}, \ldots, \frac{h^{p-1}}{\chi(h)}$, dont les numérateurs sont, en h, des polynômes du degré $p-1$, ayant leurs coefficients nuls, à l'exception d'un seul dont la valeur est l'unité. Cette formule (5) donnera

$$\left\{\begin{array}{lll} \sum \frac{1}{\chi'(h)} = 0, & \sum \frac{h}{\chi'(h)} = 0, & \ldots, \\ & \sum \frac{h^{p-2}}{\chi'(h)} = 0, & \sum \frac{h^{p-1}}{\chi'(h)} = 1. \end{array}\right.$$

L'expression (8) se réduit, par conséquent, à

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)} \frac{d^{p-1}}{dc^{p-1}}\left[\frac{\varphi(c)}{\psi(c)} \frac{1}{x-c}\right].$$

On voit donc, en faisant tendre les coefficients de $f(x)$ vers les limites pour lesquelles l'équation $f(x)=0$ a les racines simples ou multiples demandées, et en appelant alors a une racine simple quelconque, c une racine multiple quelconque, dont p désignera le degré de multiplicité, que la fraction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ se décompose comme il suit,

$$(9) \qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} \frac{1}{x-a} + \sum \frac{1}{1.2\ldots(p-1)} \frac{d^{p-1}}{dc^{p-1}}\left[\frac{\varphi(c)}{\psi(c)} \frac{1}{x-c}\right],$$

$\psi(a)$ ou $\psi(c)$ exprimant, dans chaque terme, la fonction qui reste quand on supprime de $f(x)$ son facteur $x-a$ ou $(x-c)^p$ dans lequel figure la racine a ou c à laquelle se rapporte ce terme, puis quand on y remplace x par a ou par c, et les deux signes de sommation Σ s'étendant à autant de termes, de la forme de l'expression écrite à la suite, qu'il y a de racines simples a ou de racines multiples c. Il est d'ailleurs évident que les $p-1$ différentiations indiquées, par rapport à c, de la fraction $\frac{\varphi(c)}{\psi(c)} \frac{1}{x-c}$, donneront des termes en $\frac{1}{(x-c)^2}, \frac{1}{(x-c)^3}, \ldots, \frac{1}{(x-c)^p}$, par une ou plusieurs différentiations du second facteur $\frac{1}{x-c}$, en outre d'un premier terme,

$$\frac{d^{p-1}}{dc^{p-1}}\left[\frac{\varphi(c)}{\psi(c)}\right] \cdot \frac{1}{x-c},$$

provenant des $p-1$ différentiations à effectuer sur le premier facteur $\frac{\varphi(c)}{\psi(c)}$.

Observons enfin que, si l'on réduit au dénominateur commun $f(x)$ toutes les fractions du second membre de (9) et qu'on les ajoute ensuite, la somme $\varphi(x)$ de leurs nouveaux numérateurs aura sa partie du degré $n-1$ fournie uniquement par les fractions simples dont les dénominateurs, dans le second membre développé, contiendront $x-a$ ou $x-c$, ..., au premier degré seulement, fractions qui sont $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}\frac{1}{x-a}$, ..., $\frac{1}{1.2\ldots(p-1)}\frac{d^{p-1}}{dc^{p-1}}\left[\frac{\varphi(c)}{\psi(c)}\right]\cdot\frac{1}{x-c}$, ... La réunion, dans le résultat, de tous les coefficients de x^{n-1}, donnera donc, en appelant encore H le coefficient du terme le plus élevé (ou en x^{n-1}) de $\varphi(x)$,

$$(10)\qquad \sum\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}+\sum\frac{1}{1.2\ldots(p-1)}\frac{d^{p-1}}{dc^{p-1}}\left[\frac{\varphi(c)}{\psi(c)}\right]=\mathrm{H}.$$

Cette formule, qui se réduit à (5) quand il n'y a pas de racines égales c, nous sera indispensable dans la trente-sixième Leçon (n° 412*), pour intégrer d'une manière entièrement satisfaisante une importante catégorie d'équations différentielles.

249*. — Forme intégrable de différentielles irrationnelles, qui comprend les types les plus élémentaires de ces différentielles, et où figure, sous le signe $\int$, une fonction rationnelle des deux coordonnées d'une courbe unicursale.

Les deux types de différentielles irrationnelles considérés jusqu'ici (n°s 245, 246 et 247) sont de la forme $f(x,y)\,dx$, en y appelant y le radical proposé $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{a'x+b'}}$ ou $\sqrt{\mathrm{A}+\mathrm{B}x\pm x^2}$, que l'on peut, si la variable x représente une abscisse rectiligne, considérer comme l'ordonnée perpendiculaire des divers points de la courbe définie par l'une des deux équations

$$(27)\qquad ax+b=(a'x+b')y^m,\qquad \mathrm{A}+\mathrm{B}x\pm x^2=y^2.$$

La fonction sous le signe $\int$, dans $\int f(x,y)\,dx$, se trouve donc, à mesure que x varie, prise le long de cette courbe; et, si nous avons pu donner à l'expression $f(x,y)\,dx$ une forme rationnelle, ç'a été, comme on a vu, grâce à l'existence d'une variable auxiliaire t, en fonction de laquelle l'abscisse x et le radical ou l'ordonnée y s'exprimaient rationnellement. M. Cayley a appelé, en général, *courbe uni-*

cursale, toute ligne (nécessairement algébrique) dont les coordonnées x, y sont ainsi des fonctions rationnelles d'une variable t, qu'il suffit, par conséquent, d'y faire croître de $-\infty$ à ∞ pour décrire, *comme d'un seul trait*, la *totalité* de la courbe. Il est clair qu'une différentielle de la forme $f(x, y)\,dx$, où les valeurs successives de x et y seront les coordonnées des divers points de cette courbe, deviendra rationnelle et, par conséquent, intégrable, si l'on y introduit la variable t, pourvu que la fonction $f(x, y)$ soit elle-même rationnelle.

A part le cas où, comme dans la première relation (27), l'une des deux coordonnées, x par exemple, n'entre qu'au premier degré dans l'équation de la courbe et où, par suite, l'autre, y, peut être prise pour la variable auxiliaire t, les courbes planes unicursales les plus simples sont celles que les droites d'inclinaison variable émanant d'un de leurs points (x_0, y_0), convenablement choisi, coupent au plus en un autre point (x, y), ayant son abscisse x donnée par une équation du premier degré. C'est ce qui arrive lorsque, en prenant le point (x_0, y_0) comme origine de nouvelles coordonnées X et Y, ou, en posant $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$, l'équation de la courbe, exprimée au moyen de X et de Y, ne contient que des termes du degré même, n, de la courbe et du degré immédiatement inférieur $n - 1$. Alors, en effet, si l'on appelle t la pente $\frac{Y}{X}$ des *rayons vecteurs* émanés de la nouvelle origine, ou si l'on pose $Y = tX$, t étant ainsi le paramètre caractéristique de ces droites, les termes du degré n en X, Y et ceux du degré $n - 1$ prendront respectivement les formes

$$X^n F_n(t), \quad X^{n-1} F_{n-1}(t),$$

où F_n désigne un polynôme du degré n et F_{n-1} un polynôme du degré $n - 1$. Donc l'équation de la courbe, abstraction faite de $n - 1$ racines égales $X = 0$ qui correspondent au point d'intersection fixe choisi comme origine, se réduit à $X F_n(t) + F_{n-1}(t) = 0$, et donne X, puis $Y = tX$, en fonction rationnelle de la *pente* t des rayons vecteurs. Par suite, la différentielle proposée

$$f(x, y)\,dx \quad \text{ou} \quad f(x_0 + X, y_0 + Y)\,dX$$

devient elle-même rationnelle quand on l'exprime au moyen de cette variable auxiliaire t.

Lorsque la courbe est du second degré, comme celle que représente la deuxième relation (27), un quelconque de ses points peut être choisi pour la nouvelle origine (x_0, y_0); car son équation en X et Y, devant être satisfaite par les nouvelles coordonnées $X = 0$, $Y = 0$ de celle-ci,

ne contiendra pas de terme constant ou n'aura que des termes des deux degrés $n=2$, $n-1=1$. Et la variable auxiliaire $t=\frac{y-y_0}{x-x_0}$, qui rendra la différentielle $f(x,y)\,dx$ rationnelle, sera bien, conformément aux deux premières des transformations indiquées dans les nos 246 et 247 (pp. 47 et 49) : 1° $t=\frac{y}{x-\alpha}=\frac{\sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)}}{x-\alpha}$, si, le radical y étant de la forme $\sqrt{\pm(x-\alpha)(x-\beta)}$, on convient de poser $x_0=\alpha$ (d'où $y_0=0$); 2° $t=\frac{\sqrt{a^2+Bx\pm x^2}-a}{x}$, si l'on a $y=\pm\sqrt{a^2+Bx\pm x^2}$, et que l'on prenne, par suite, $x_0=0$, $y_0=a$. Quant à la troisième transformation, $t=x+y$, propre au cas où le radical y est $\sqrt{A+Bx+x^2}$, elle rentre dans la deuxième, si l'on a soin de réduire d'abord ce radical (en en faisant sortir le facteur x) à $\sqrt{1+\frac{B}{x}+\frac{A}{x^2}}$, et si, posant ensuite $\frac{1}{x}=\xi$ ou $x=\frac{1}{\xi}$ et $dx=-\frac{d\xi}{\xi^2}$, on met la différentielle proposée sous la forme $F(\xi,\sqrt{1+B\xi+A\xi^2})\,d\xi$. Alors, en effet, la nouvelle variable t est, d'après la deuxième transformation, $\frac{\sqrt{1+B\xi+A\xi^2}\mp 1}{\xi}$ ou encore, en y réintroduisant $\frac{1}{x}$ au lieu de ξ, $\sqrt{A+Bx+x^2}\mp x$; ce qui comprend bien la valeur de t indiquée dans la troisième transformation (p. 49).

Dès qu'on laisse les coniques, ou courbes du second degré, pour passer aux *cubiques* ou courbes du troisième degré, on ne les trouve plus qu'exceptionnellement unicursales. C'est quand elles possèdent un point singulier, comme il arrive, par exemple, dans le cas de la seconde parabole cubique. Et, alors, elles admettent encore comme variable auxiliaire t la pente $\frac{Y}{X}$ des droites émanées d'une origine convenable : mais il faut, pour celle-ci, choisir le point singulier. En effet, leur équation en X et Y mise sous la forme $\varphi(X,Y)=0$, devant être satisfaite, et avoir même les deux dérivées $\frac{d\varphi}{dX}$, $\frac{d\varphi}{dY}$ de son premier membre nulles, pour $X=0$ et $Y=0$, se trouvera privée non seulement du terme constant, mais aussi de ceux du premier degré : elle n'aura donc plus que ses deux parties des degrés $2=n-1$ et $3=n$. Par conséquent, une intégrale de la forme $\int f(x,y)\,dx$, où la fonction $f(x,y)$ sous le signe $\int$ est rationnelle et prise le long d'une telle cubique, peut s'obtenir par la méthode d'intégration des différentielles rationnelles, si l'on a soin d'y introduire comme variable auxiliaire t la pente des rayons vecteurs émanés de son point singulier.

252*. — Réduction de l'exposant hors de la parenthèse et de l'exposant de la parenthèse, dans l'intégration des différentielles binômes et polynômes.

Comme les procédés de réduction dont il s'agit ([1]) s'étendent, sans se compliquer aucunement (du moins dans leur esprit), à des *différentielles polynômes* quelconques, c'est-à-dire de la forme

$$x^m(a+bx^n+cx^{2n}+\ldots)^p\,dx,$$

je les exposerai sur celles-ci, en me bornant toutefois, pour fixer les idées, au cas d'une différentielle trinôme $x^m(a+bx^n+cx^{2n})^p\,dx$. Le trinôme $a+bx^n+cx^{2n}$ devant figurer souvent, il sera bon de le désigner par une seule lettre, et je l'appellerai U. Ainsi je poserai, dans ce qui suit,

$$(30)\qquad \mathrm{U}=a+bx^n+cx^{2n};\qquad \text{d'où}\qquad d\mathrm{U}=(nbx^{n-1}+2ncx^{2n-1})\,dx;$$

et l'expression à intégrer sera de la forme $x^m\mathrm{U}^p\,dx$.

Si nous observons que

$$\left\{\begin{aligned} x^{m+1-2n}\,d.\mathrm{U}^{p+1} &= (p+1)x^{m+1-2n}\mathrm{U}^p\,d\mathrm{U}\\ &= nb(p+1)x^{m-n}\mathrm{U}^p\,dx+2nc(p+1)x^m\mathrm{U}^p\,dx,\end{aligned}\right.$$

il viendra, en intégrant par parties le premier membre de cette identité et, terme à terme, le troisième,

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} &x^{m+1-2n}\mathrm{U}^{p+1}-(m+1-2n)\textstyle\int x^{m-2n}\mathrm{U}^{p+1}\,dx\\ &\quad = nb(p+1)\textstyle\int x^{m-n}\mathrm{U}^p\,dx+2nc(p+1)\int x^m\mathrm{U}^p\,dx+\text{const.}\end{aligned}\right.$$

C'est une relation linéaire entre l'expression algébrique $x^{m+1-2n}\mathrm{U}^{p+1}$ et les trois intégrales $\int x^{m-2n}\mathrm{U}^{p+1}\,dx$, $\int x^{m-n}\mathrm{U}^p\,dx$, $\int x^m\mathrm{U}^p\,dx$. Si donc, par exemple, n se trouvant positif, m est lui-même positif et supérieur à $2n$, enfin p négatif et d'une valeur absolue plus grande que l'unité, cette formule permettra d'exprimer $\int x^m\mathrm{U}^p\,dx$ en fonction de $\int x^{m-n}\mathrm{U}^p\,dx$ et de $\int x^{m-2n}\mathrm{U}^{p+1}\,dx$, où les exposants respectifs de x et de U seront plus simples que m et p. Si, au contraire, $m-2n$ est négatif et $p+1$ positif, plus grand que 1, c'est par rapport à $\int x^{m-2n}\mathrm{U}^{p+1}\,dx$ que l'on résoudra la relation (31), afin de ramener cette intégrale aux deux, alors plus simples, $\int x^{m-n}\mathrm{U}^p\,dx$ et $\int x^m\mathrm{U}^p\,dx$.

Dans les autres cas, il y a lieu d'observer que

$$\mathrm{U}^{p+1}=\mathrm{U}^p(a+bx^n+cx^{2n})$$

([1]) *Voir* la *Partie élémentaire,* à la fin du n° 251, p. 54.

et que, par suite, $\int x^{m-2n} U^{p+1} dx$ se décompose en trois termes,

$$a\int x^{m-2n} U^p dx, \quad b\int x^{m-n} U^p dx, \quad c\int x^m U^p dx,$$

dont les deux derniers, semblables à ceux du second membre de (31), se réduiront avec eux. La formule (31) deviendra donc une relation linéaire entre l'expression algébrique $x^{m+1-2n} U^{p+1}$ et les trois intégrales $\int x^m U^p dx$, $\int x^{m-n} U^p dx$, $\int x^{m-2n} U^p dx$, où l'exposant p de la parenthèse U est le même, et qui permettra, par suite, suivant que m sera positif et au moins égal à $2n$, ou non, d'exprimer soit la première de ces trois intégrales, soit la troisième, en fonction (chaque fois) des deux autres plus simples. On pourra donc réduire toutes les intégrales de la forme $\int x^m U^p dx$ à un nombre relativement petit d'entre elles, savoir à celles où l'exposant m de x hors de la parenthèse est compris dans un intervalle désigné égal à $2n$, comme, par exemple, entre zéro et $2n$.

Les plus simples différentielles trinômes qui admettent cette réduction s'obtiennent en supposant $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, enfin m entier. On peut d'ailleurs s'y borner au cas de m pair; car, pour m impair, de la forme $2\mu + 1$, la différentielle proposée $x^m U^p dx$, où l'on aura

$$U = a + bx^2 + cx^4,$$

deviendra $\frac{y^\mu dy}{2\sqrt{a + by + cy^2}}$ en faisant $x^2 = y$, et se trouvera comprise dans le second type élémentaire, toujours intégrable sous forme finie, étudié aux n°s 246 et 247. En supposant donc m pair et opérant un nombre suffisant de fois, sur m, l'abaissement (en valeur absolue) de $n = 2$ unités qui vient d'être indiqué, on voit que toutes les intégrales comprises dans le type proposé $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}$ se réduiront à deux seulement, qui seront, par exemple,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}}.$$

On ramène encore à deux intégrales de ce type toutes celles qui sont de la forme $\int \frac{f(u) du}{\sqrt{(u - \alpha)(Au^2 + Bu + C)}}$, où $f(u)$ est supposé désigner un polynôme quelconque et où la quantité sous le radical exprime tout quadrinôme du troisième degré, que l'on sait admettre toujours au moins un diviseur réel linéaire $u - \alpha$. Il suffit, en effet, de poser $\sqrt{u - \alpha} = x$, ou $u = x^2 + \alpha$ et $du = 2x\, dx$, pour transformer

immédiatement une telle intégrale en celle-ci,

$$\int \frac{2f(x^2+\alpha)\,dx}{\sqrt{A(x^2+\alpha)^2+B(x^2+\alpha)+C}},$$

évidemment formée de termes rentrant bien, à des facteurs constants près, dans le type $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a+bx^2+cx^4}}$.

Comme exemple, proposons-nous de réduire à $\int x^2 U^{-\frac{1}{2}}dx$ et à $\int U^{-\frac{1}{2}}dx$ l'intégrale $\int x^{-2}U^{-\frac{1}{2}}dx$, où U représente le polynôme

$$(1-x^2)(1-k^2x^2) = 1-(1+k^2)x^2+k^2x^4.$$

Ici, les trois exposants désignés dans (31) par $m-2n$, $m-n$ et m sont -2, 0, 2; en sorte qu'il faut y prendre $m=n=2$, avec $p=-\frac{1}{2}$ et $a=1$, $b=-(1+k^2)$, $c=k^2$. Cette formule devient

$$\left\{\begin{aligned} & x^{-1}\sqrt{U}+\int x^{-2}[1-(1+k^2)x^2+k^2x^4]\frac{dx}{\sqrt{U}} \\ & \qquad = -(1+k^2)\int\frac{dx}{\sqrt{U}}+2k^2\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{U}}+\text{const.},\end{aligned}\right.$$

ou bien, grâce à des réductions évidentes,

$$\frac{\sqrt{U}}{x}+\int\frac{dx}{x^2\sqrt{U}} = k^2\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{U}}+\text{const.},$$

et, résolue par rapport à son second terme, elle donne la relation cherchée

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} & \int\frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ & \qquad = -\frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x}+k^2\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\text{const.}\end{aligned}\right.$$

Mais revenons à la différentielle trinôme générale, de la forme $\int x^m U^p dx$. On pourra encore soit y diminuer, soit y augmenter, algébriquement, d'autant d'unités qu'on le voudra, l'exposant de la parenthèse U, tout en maintenant dans l'intervalle $2n$ désigné l'exposant de x hors de la parenthèse. Et d'abord, pour le diminuer, on aura la formule évidente

$$(33)\quad \int x^m U^{p+1}dx = a\int x^m U^p dx + b\int x^{m+n}U^p dx + c\int x^{m+2n}U^p dx,$$

dans laquelle il suffira de remplacer $\int x^{m+2n}U^p dx$ par son expression en fonction de $\int x^m U^p dx$ et de $\int x^{m+n}U^p dx$, puis, au besoin (c'est-

à-dire si $m+n$ atteint au moins $2n$), $\int x^{m+n} U^p\, dx$ par son expression analogue en fonction de $\int x^m U^p\, dx$ et $\int x^{m-n} U^p\, dx$. L'intégrale $\int x^m U^{p+1}\, dx$ se trouvera donc ramenée à $\int x^m U^p\, dx$ et à $\int x^{m\pm n} U^p\, dx$, où l'exposant $m \pm n$ sera compris dans l'intervalle $2n$ assigné.

Si l'on veut, au contraire, augmenter algébriquement d'une unité l'exposant de U, cette formule, où l'intégrale $\int x^m U^{p+1}\, dx$ seule sera censée alors connue, ne suffira pas pour donner à la fois $\int x^m U^p\, dx$ et $\int x^{m\pm n} U^p\, dx$; car elle ne constituera qu'une équation du premier degré entre ces deux quantités inconnues. Mais on pourra y changer m en $m \pm n$; ce qui donnera une équation linéaire entre l'intégrale, censée connue, $\int x^{m\pm n} U^{p+1}\, dx$, et les deux intégrales inconnues $\int x^{m\pm n} U^p\, dx$ et $\int x^{m\pm 2n} U^p\, dx$, dont la seconde pourra être elle-même remplacée par sa valeur en fonction des deux intégrales demandées $\int x^m U^p\, dx$ et $\int x^{m\pm n} U^p\, dx$. Il viendra donc, de la sorte, une seconde équation du premier degré entre ces deux intégrales et les deux, auxquelles on veut les réduire,

$$\int x^m U^{p+1}\, dx \quad \text{et} \quad \int x^{m\pm n} U^{p+1}\, dx;$$

de sorte que la résolution du couple obtenu d'équations du premier degré à deux inconnues permettra d'accroître algébriquement de 1 l'exposant de la parenthèse.

Par conséquent, si p est négatif et d'une valeur absolue supérieure à 1, on le réduira, par des additions successives d'unités, à tomber finalement entre les limites $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, tout comme on l'aurait fait, par la formule (33), s'il s'était trouvé positif.

253*. — Application à certaines intégrales, dépendant des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

Pour donner un exemple de ce genre de réduction, soient les deux intégrales

$$(34) \qquad I = \int \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)\sqrt{U}}, \qquad J = \int \frac{dx}{(\beta^2 + x^2)\sqrt{U}},$$

où U désigne le trinôme bicarré

$$(35) \qquad U = (\alpha^2 + x^2)(\beta^2 + x^2) = \alpha^2\beta^2 + (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + x^4,$$

et que nous écrirons, de préférence,

$$(36) \qquad I = \int (\beta^2 + x^2) U^{-\frac{3}{2}}\, dx, \qquad J = \int (\alpha^2 + x^2) U^{-\frac{3}{2}}\, dx.$$

Les intégrales proposées I, J, dans lesquelles il est permis de sup-

poser $\alpha^2 > \beta^2$, se ramènent donc immédiatement à deux, $\int U^{-\frac{3}{2}} dx$ et $\int x^2 U^{-\frac{3}{2}} dx$, où les exposants de x hors de la parenthèse U, savoir zéro pour la première et 2 pour la seconde, restent compris entre les deux limites 0 et $2n$, n étant ici, visiblement, 2 ; en sorte qu'il n'y a pas lieu de réduire ces exposants. Mais on peut vouloir y simplifier l'exposant p, égal à $-\frac{3}{2}$, en le réduisant à $-\frac{1}{2}$ par l'addition d'une unité, et ramener ainsi ces intégrales, comme toutes celles qui se composeraient d'autres de la forme $\int x^{2\mu} U^p dx$ avec p multiple de $\frac{1}{2}$, aux deux $\int \frac{dx}{\sqrt{U}}$, $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{U}}$. Toutefois, on trouve avantage à introduire, au lieu de cette dernière $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{U}}$, l'intégrale $\int \frac{\alpha^2 + x^2}{\beta^2 + x^2} \frac{dx}{\sqrt{U}}$ ou $\int (\alpha^2 + x^2)^2 U^{-\frac{3}{2}} dx$, qui admet, comme on verra bientôt, une signification géométrique importante : elle est évidemment décomposable en intégrales de la classe considérée et peut ainsi tenir lieu de l'une d'elles comme terme de comparaison ou moyen d'expression. Nous appellerons $\frac{\alpha E}{\beta^2}$ et $\frac{F}{\alpha}$ (avec Legendre) les deux intégrales *types* ainsi adoptées, c'est-à-dire que nous poserons

$$(37) \qquad \int \frac{\alpha^2 + x^2}{\beta^2 + x^2} \frac{dx}{\sqrt{U}} = \frac{\alpha E}{\beta^2}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{U}} = \frac{F}{\alpha}.$$

En dédoublant, dans la première, le numérateur $\alpha^2 + x^2$ en $\alpha^2 - \beta^2$ et $\beta^2 + x^2$, on la dédouble elle-même en $(\alpha^2 - \beta^2)J$ et en $\frac{F}{\alpha}$; ce qui fait déjà connaître J et donne (à une constante arbitraire près)

$$(38) \qquad J = \frac{\alpha^2 E - \beta^2 F}{\alpha\beta^2(\alpha^2 - \beta^2)}.$$

Il suffit donc de trouver une relation où entrent I, J, F ; et, comme la méthode générale de réduction consiste en des combinaisons de l'identité (33) avec la formule (31), nous aurons nécessairement à faire une application convenable de celle-ci. En conséquence, prenons-y $p = -\frac{3}{2}$, $m = 4$ (outre $n = 2$, $b = \alpha^2 + \beta^2$, $c = 1$), pour que l'intégrale $\int x^{m-2n} U^{p+1} dx$, à laquelle cette formule doit ramener les proposées, soit bien celle que l'on a en vue, savoir $\int U^{-\frac{1}{2}} dx$. Il vient, abstraction faite de la constante arbitraire,

$$(39) \qquad \frac{x}{\sqrt{U}} - \int \frac{dx}{\sqrt{U}} = -(\alpha^2 + \beta^2) \int x^2 U^{-\frac{3}{2}} dx - 2\int x^4 U^{-\frac{3}{2}} dx.$$

Or il y a lieu d'éliminer le dernier terme, où figure, sous le signe $\int$, un numérateur x^4 qui n'entre dans aucune des intégrales en lesquelles se dédoublent visiblement les proposées I, J définies par (36). A cet effet, il suffit de remplacer, dans le dernier terme en question de (39), le facteur x^4 par la différence identiquement équivalente $U - (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 x^2)$; et des réductions immédiates, avec transposition, dans le premier membre, d'un terme $-2\int\frac{dx}{\sqrt{U}}$ ainsi obtenu au second, donnent

$$\frac{x}{\sqrt{U}} + \int\frac{dx}{\sqrt{U}} = \int(2\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 x^2 + \beta^2 x^2)\,U^{-\frac{3}{2}}dx,$$

relation où le deuxième membre n'est autre chose, d'après (36), que $\alpha^2 I + \beta^2 J$. Il vient donc, pour l'équation cherchée, en rétablissant la constante arbitraire dont on faisait abstraction,

$$(40)\qquad \alpha^2 I + \beta^2 J = \frac{x}{\sqrt{U}} + \int\frac{dx}{\sqrt{U}} + \text{const.} = \frac{x}{\sqrt{U}} + \frac{F}{\alpha} + \text{const.}$$

Transportons-y la valeur (38) de J, et celle de I sera enfin, du moins quant à sa partie variable,

$$(41)\qquad I = \frac{x}{\alpha^2\sqrt{U}} + \frac{F - E}{\alpha(\alpha^2 - \beta^2)}.$$

Les expressions, définies par (37), de E et de F, se simplifient en introduisant comme variable l'arc φ qui a pour tangente le rapport de x à β. Posons, en effet,

$$(42)\qquad \begin{cases} x = \beta\,\text{tang}\,\varphi; \qquad \text{d'où} \qquad dx = \dfrac{\beta\,d\varphi}{\cos^2\varphi}, \qquad \beta^2 + x^2 = \dfrac{\beta^2}{\cos^2\varphi}, \\ \alpha^2 + x^2 = \dfrac{\alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \dfrac{\alpha^2}{\cos^2\varphi}\left(1 - \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}\sin^2\varphi\right); \end{cases}$$

et regardons α, β comme le demi grand axe et le demi petit axe d'une ellipse, dont $\sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2}}$ serait par suite l'excentricité, que j'appellerai k, rapport de la distance focale $2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ au grand axe 2α. Le radical $\sqrt{U}$ s'écrira $\frac{\alpha\beta}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$ et les formules (37) deviendront simplement

$$(43)\qquad E = \int\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi, \qquad F = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

On convient de déterminer la constante arbitraire, dans ces inté-

grales E, F, de manière à les faire annuler en même temps que leur variable φ.

Nous verrons plus loin que l'une d'elles, E, est propre à exprimer la longueur des arcs d'ellipse. Aussi Legendre l'a-t-il appelée *intégrale elliptique;* et il a étendu ce nom à l'autre, F, à cause de son analogie d'expression avec E. Pour les distinguer, il a qualifié d'*intégrale elliptique de première espèce* celle qui est, comme on le reconnaîtra bientôt, la plus simple, savoir F, et d'*intégrale elliptique de seconde espèce,* l'autre, E : il est clair qu'elles dépendent de la variable φ, appelée *amplitude*, et du paramètre k (compris entre zéro et 1), dit *module*. Pour pouvoir intégrer toutes les différentielles algébriques affectées d'un radical carré portant sur un polynôme du quatrième degré, Legendre a eu à considérer en outre un troisième type d'intégrales, appelées aussi *elliptiques,* mais plus complexes que les deux précédentes, car il y entre deux paramètres distincts ([1]). Je ne pense pas devoir en parler, parce que ces intégrales ne se présentent guère dans les applications et que, d'ailleurs, on n'en a pas de *Tables* permettant de les utiliser avec toute la facilité désirable, comme il en existe pour les intégrales E, F. C'est Legendre lui-même qui a calculé celles-ci, dites *Tables elliptiques*, par des procédés dont il sera prochainement donné un aperçu.

Les deux intégrales E, F prennent une forme, à différentielle algébrique, très usuelle et très simple (forme appelée *canonique* pour ces deux raisons), quand on y adopte comme variable le sinus même de l'angle φ. Pour l'obtenir, posons donc, dans (43),

$$\sin\varphi = u \quad \text{ou} \quad \varphi = \arc\sin u, \quad d\varphi = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

([1]) Les géomètres ont été ainsi amenés à appeler, en général, *intégrale elliptique,* toute intégrale réductible à ces trois types, c'est-à-dire de la forme $\int f(x,y)\,dx$, où f désigne une fonction rationnelle quelconque de deux variables et y un radical carré portant sur un polynôme en x du quatrième degré. Quelques-uns d'entre eux ont ensuite considéré, sous le nom d'*intégrales ultra-elliptiques* (ou *hyper-elliptiques*), les expressions de la même forme $\int f(x,y)\,dx$, où y est encore un radical carré, mais portant sur un polynôme d'un degré supérieur au quatrième. Enfin, une dernière généralisation, bien plus étendue, a conduit ces géomètres au cas où y serait l'ordonnée d'une courbe algébrique quelconque ayant x pour abscisse : alors l'intégrale $\int f(x,y)\,dx$ est dite *abélienne,* du nom d'Abel, profond analyste norvégien (mort en 1829 à l'âge de 27 ans), qui en a commencé l'étude et y a découvert un théorème remarquable dont la formule d'Euler ci-après (p. 42*), sur le sinus elliptique d'une somme, n'est qu'une application particulière.

Il viendra

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned} E &= \int \frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \int \frac{(1-k^2u^2)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},\\ F &= \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \end{aligned}\right.$$

On voit que la différence F — E est le produit de k^2 par

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Donc, comme nous savons (pp. 28*, 29*, 30*) qu'on ramène à cette dernière et à l'intégrale F toutes celles qui sont de la forme

$$(45)\qquad \int u^{2m}[(1-u^2)(1-k^2u^2)]^p\,du,$$

avec m entier, positif ou négatif, et p multiple positif ou négatif de $\frac{1}{2}$, il est clair qu'on pourra évaluer cette classe étendue d'intégrales au moyen des Tables elliptiques de Legendre.

On est passé, en résumé, de la forme (37), où la quantité U sous le radical est $(\alpha^2+x^2)(\beta^2+x^2)$ avec $\alpha^2>\beta^2$, à la forme (44), où la quantité analogue est $(1-u^2)(1-k^2u^2)$ avec $k^2<1$, en posant

$$x = \beta \operatorname{tang}\varphi = \frac{\beta\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{\beta u}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{1-u^2}\,\sqrt{x^2+\beta^2}=\beta.$$

Le radical serait évidemment devenu, au contraire, de la forme $\sqrt{(1-u^2)(1+k'^2u^2)}$, avec k'^2 $\left(\text{égal à } \frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}\right)$ variable de zéro à l'infini, si l'on avait pris $x=\alpha\operatorname{tang}\varphi$ ou $\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{x^2+\alpha^2}=\alpha$.

On obtient encore ces formes, avec d'autres, toutes bicarrées, qui se présentent parfois, du trinôme sous le radical, en adoptant une nouvelle variable v en raison soit directe, soit inverse, de l'un des facteurs ($\sqrt{\alpha^2+x^2}$, $\sqrt{\beta^2+x^2}$ dans notre exemple) du radical que contient la différentielle proposée. Tel est le principe simple de transformation qui, appliqué une ou plusieurs fois, permettra, le cas échéant, de réduire à la *forme canonique* (45) un certain nombre de différentielles polynômes à radical carré, et de les rendre, par là, intégrables au moyen des deux fonctions E, F de Legendre.

COMPLÉMENT A LA VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

DES INTÉGRALES EULÉRIENNES DE SECONDE ESPÈCE.

261*. — Autre exemple d'intégrales finies, quoique prises dans un intervalle infini : fonction Γ.

Considérons encore l'expression $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$, *où n désigne un paramètre positif*, intégrale importante, qu'on représente, d'une manière abrégée, par $\Gamma(n)$, et qui, étudiée d'abord par Euler, puis surtout par Legendre, a reçu de ce dernier le nom d'*intégrale eulérienne de seconde espèce*. Elle est déterminée, malgré sa limite supérieure infinie, à cause de l'exponentielle e^{-x} dont l'ordre de petitesse croît indéfiniment quand x grandit (t. I, p. 139), et aussi malgré la valeur infinie, à la limite inférieure, de la fonction sous le signe $\int$ quand n est plus petit que 1 ; car ce serait seulement pour n nul ou négatif que le degré d'*infinitude* de cette fonction, approximativement réduite à x^{n-1} près de la limite inférieure, atteindrait l'unité et rendrait infinie l'intégrale (t. II, p. 64).

Si nous observons que $e^{-x}\,dx = d(-e^{-x})$ et si nous appliquons l'intégration par parties, il viendra

$$\int x^{n-1}e^{-x}\,dx \text{ ou } -\int x^{n-1}\,de^{-x} = -x^{n-1}e^{-x} + (n-1)\int x^{n-2}e^{-x}\,dx.$$

Prenons la différence des valeurs de chaque terme aux deux limites $x=0$, $x=\infty$, en supposant d'ailleurs $n>1$; et rappelons-nous que, pour $x=\infty$, c'est l'exponentielle qui l'emporte dans le terme

$$-x^{n-1}e^{-x} = -\frac{x^{n-1}}{e^x}$$

(t. I, p. 139), en sorte que $\lim x^{n-1}e^{-x} = 0$ pour x infini. Le terme intégré $-x^{n-1}e^{-x}$ ne donnera rien aux deux limites, et nous aurons la formule de réduction

$$(21)\quad \begin{cases} (\text{pour } n>1) \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = (n-1)\int_0^\infty x^{n-2}e^{-x}\,dx \\ \quad\text{ou} \\ \qquad \Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1). \end{cases}$$

Appliquée un nombre suffisant de fois, cette formule permettra, comme on voit, de retrancher à la variable n toutes ses unités entières, de manière qu'il suffira de posséder une table des valeurs de la fonction $\Gamma(n)$, entre les limites $n=0$ et $n=1$, pour en déduire ses autres valeurs. Par exemple, en partant de

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=(-e^{-x})_0^\infty=1,$$

et faisant successivement, dans (21), $n=2, =3, =4, \ldots, =n$, il viendra

$$(22)\quad (\text{pour } n \text{ entier})\quad \Gamma(n) \quad \text{ou} \quad \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx=1.2.3\ldots(n-1).$$

Ainsi, le produit des $n-1$ premiers nombres entiers, à partir de l'unité, peut se mettre très simplement sous la forme d'une intégrale définie, puisqu'il n'est autre que $\Gamma(n)$.

La fonction $\Gamma(n)$, quand on y pose $x=u^2$, $dx=2u\,du$, et que, par suite, l'on y fait varier $u=\sqrt{x}$ depuis $\sqrt{0}$, qui est zéro, jusqu'à $\sqrt{\infty}$, qui est infinie, devient évidemment

$$(23)\qquad \Gamma(n)=2\int_0^\infty u^{2n-1}e^{-u^2}\,du.$$

Sous cette forme, nous la retrouverons plus loin, après le calcul de l'intégrale définie très importante, dite quelquefois *intégrale de Poisson*, $\int_0^\infty e^{-u^2}du=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$; et nous achèverons alors d'obtenir $\Gamma(n)$, grâce à (21), pour toutes les valeurs de n multiples de $\frac{1}{2}$. Mais quant à une expression générale de $\Gamma(n)$, il n'en existe pas de finie : aussi nous contenterons-nous de donner, vers le commencement de la XXXe Leçon, la plus simple de celles qui peuvent représenter la fonction avec une approximation indéfinie.

COMPLÉMENT A LA VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

QUELQUES PROPRIÉTÉS SIMPLES DES INTÉGRALES ET FONCTIONS ELLIPTIQUES; VALEUR MOYENNE GÉOMÉTRIQUE D'UNE FONCTION; CALCUL APPROCHÉ, PAR UNE INTÉGRATION, DU RESTE DE CERTAINES SÉRIES.

269*. — **Transformation montrant la proportionnalité inverse de l'intégrale elliptique complète de première espèce à la moyenne arithmético-géométrique de l'unité et du module complémentaire.**

Pour donner une idée des procédés auxquels il vient d'être fait allusion (p. 86), ou destinés à faciliter le calcul des intégrales elliptiques, je choisirai comme exemple une élégante transformation (due en principe à Landen, géomètre anglais du XVIIIe siècle) dont l'application, indéfiniment répétée, à l'intégrale de première espèce $F(k, \varphi)$, y fait tendre le module vers zéro et a conduit Gauss à une curieuse expression de l'intégrale complète $F^1(k)$.

En vue de rendre les formules plus symétriques, j'y diviserai par une quantité positive quelconque a la fonction $F(k, \varphi)$, qui n'est autre que $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + (1-k^2)\sin^2\varphi}}$, de manière à mettre le quotient $\frac{F(k,\varphi)}{a}$ sous la forme $\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$, b désignant la quantité positive $a\sqrt{1-k^2}$, moindre que a. Il s'agira de le remplacer par une intégrale de la même forme, $\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi_1 + b_1^2\sin^2\varphi_1}}$, où l'amplitude φ_1 se trouve comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$ si la proposée φ l'est elle-même, et où a_1, b_1 soient respectivement les deux moyennes des deux nombres donnés a, b, l'une, arithmétique, $a_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, l'autre, géométrique, $b_1 = \sqrt{ab}$. Comme on a identiquement

$$a_1^2 - b_1^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

et, par suite,

(27) $$\frac{a_1^2 - b_1^2}{a^2 - b^2} = \frac{1}{4}\frac{a-b}{a+b} < \frac{1}{4},$$

la différence $a_1^2 - b_1^2$ sera tout au plus le quart de ce qu'est la différence analogue $a^2 - b^2$ dans l'intégrale proposée. Donc, en répétant un nombre suffisant n de fois la transformation, il viendra une intégrale encore de même forme, mais où, sous le radical paraissant dans la différentielle à intégrer, le coefficient du carré du cosinus de la variable ne dépassera celui du carré du sinus que d'une quantité inférieure à $\frac{a^2 - b^2}{4^n}$ et aussi faible qu'on le voudra, sans que ces coefficients, évidemment compris entre a^2 et b^2, tendent eux-mêmes à s'annuler; d'où il suit bien que le carré du module, rapport de la différence des deux coefficients au plus grand d'entre eux, s'approchera indéfiniment de zéro.

La relation qu'il y a lieu d'établir entre φ et φ_1, pour effectuer cette transformation, est

$$(28) \qquad \frac{\sin\varphi}{a} = \frac{\sin\varphi_1}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1^2 \sin^2\varphi_1}}:$$

ce qui donne un rapport $\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_1}$ égal à la quantité essentiellement positive $\frac{a}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1^2 \sin^2\varphi_1}}$, décroissante de $\frac{a}{a_1}$ à $\frac{a}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1^2}} = 1$ quand φ_1 croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$; et ce qui, par conséquent, fait graduellement varier φ de zéro à $\frac{\pi}{2}$ en même temps que φ_1, tout en maintenant φ_1 inférieur dans l'intervalle. De (28), où a peut être remplacé par $a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1^2}$, on déduit aisément pour $\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi}$ l'expression

$$(29) \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{a_1^2 \cos^2\varphi_1 + b_1^2 \sin^2\varphi_1}}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1^2 \sin^2\varphi_1}} \cos\varphi_1.$$

D'ailleurs, en différentiant (28), il vient

$$\frac{\cos\varphi \, d\varphi}{a} = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - b_1^2 \sin^2\varphi_1}}{[a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1^2 \sin^2\varphi_1}]^2} \cos\varphi_1 \, d\varphi_1;$$

d'où, après substitution, à $\cos\varphi$, de sa valeur (29),

$$(30) \qquad d\varphi = a \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - b_1^2 \sin^2\varphi_1}}{a_1 + \sqrt{a_1^2 - b_1^2 \sin^2\varphi_1}} \frac{d\varphi_1}{\sqrt{a_1^2 \cos^2\varphi_1 + b_1^2 \sin^2\varphi_1}}.$$

D'autre part, si, dans le radical proposé $\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}$ ou $a\sqrt{\cos^2\varphi + \left(\frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - b_1^2}}{a} \sin\varphi\right)^2}$, l'on remplace $\frac{\sin\varphi}{a}$ par sa

valeur (28) et $\cos\varphi$ par la sienne (29) après avoir mis partout, dans celle-ci, $\sqrt{1-\sin^2\varphi_1}$ à la place de $\cos\varphi_1$, il viendra

$$(31)\qquad \sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=a\,\frac{a_1-\sqrt{a_1^2-b_1^2\sin^2\varphi_1}}{a_1+\sqrt{a_1^2-b_1^2\sin^2\varphi_1}}.$$

Divisons enfin (30) par (31), puis intégrons entre les limites zéro et φ, ou zéro et φ_1. Nous aurons la formule cherchée

$$(32)\qquad \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{\sqrt{a_1^2\cos^2\varphi_1+b_1^2\sin^2\varphi_1}}.$$

De même que le premier membre exprime $\frac{F(k,\varphi)}{a}$ quand on y pose $k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, de même aussi, le second membre sera $\frac{F(k_1,\varphi_1)}{a_1}$, si l'on appelle k_1 le module $\frac{\sqrt{a_1^2-b_1^2}}{a_1}$ ou $\frac{a-b}{a+b}$. Or, k' désignant toujours le module $\sqrt{1-k^2}$ complémentaire de k, on a $b=ak'$ et, par suite, $k_1=\frac{1-k'}{1+k'}$. Donc faisons $a=1$ ou, par suite, $a_1=\frac{1+k'}{2}$, et la formule (32) prendra la forme sous laquelle elle est propre à transformer l'intégrale $F(k,\varphi)$ en une autre de module moindre :

$$(33)\qquad F(k,\varphi)=\frac{2}{1+k'}\,F\left(\frac{1-k'}{1+k'},\ \varphi_1\right).$$

Examinons, en particulier, avec Gauss, le cas de l'intégrale complète, où les limites supérieures φ et φ_1, atteignant toutes les deux la valeur $\frac{1}{2}\pi$, deviennent égales comme les limites inférieures. Alors la transformation (32), appliquée à l'intégrale du second membre dont les deux paramètres a_1, b_1 sont compris entre a et b, donnera une nouvelle intégrale analogue, ayant toujours les limites zéro, $\frac{\pi}{2}$, mais, au lieu des deux paramètres a_1 et b_1, leurs deux moyennes arithmétique et géométrique, que j'appellerai a_2, b_2, moins distantes encore l'une de l'autre que n'étaient a_1 et b_1. En continuant de même, on formera évidemment une série de moyennes arithmétiques a_3, a_4, ..., a_n, de plus en plus petites, et une série de moyennes géométriques, b_3, b_4, ... b_n, de plus en plus grandes, dont l'intervalle mutuel tendra vers zéro d'après l'inégalité (27). C'est dire qu'il existe une certaine limite commune M des moyennes arithmétiques et géométriques ainsi formées successivement à partir des deux nombres

donnés a, b : on l'appelle la *moyenne arithmético-géométrique* de ces nombres. L'intégrale proposée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}}$, sans changer de valeur, prendra donc une infinité de formes et tendra finalement vers celle où, sous le radical, les deux coefficients de $\cos^2\varphi$ et $\sin^2\varphi$ auraient la valeur commune M^2. Or, *sous cette forme limite*, elle est immédiatement intégrable, puisque

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{M^2 \cos^2\varphi + M^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{M} = \frac{\pi}{2M}.$$

Donc, sa valeur étant $\frac{\pi}{2M}$, l'on a

$$(34) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2M},$$

ou bien, en remplaçant le premier membre par $\frac{F^1(k)}{a} = \frac{1}{a} F^1\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$ et résolvant par rapport à M,

$$(35) \qquad \text{Moyenne arithmético-géométrique de } a \text{ et } b = \frac{\pi a}{2F^1\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)}.$$

Ainsi, une Table des valeurs de l'intégrale elliptique complète de première espèce permet d'obtenir aisément la moyenne arithmético-géométrique de deux nombres donnés quelconques, dont le plus grand est appelé a et le plus petit b. A l'inverse, et vu la convergence rapide, vers leur limite, des moyennes arithmétiques et géométriques successives, formées à partir de deux nombres donnés a, b, le calcul approché de cette limite permettra d'évaluer très vite l'expression

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}},$$

c'est-à-dire de former une Table des valeurs de l'intégrale complète $F^1(k)$. Si l'on fait $a = 1$ et $b = k'$, la formule (35) signifiera que *le produit de l'intégrale complète de première espèce,* $F^1(k)$, *par la moyenne arithmético-géométrique de l'unité et du module complémentaire* k', *égale* $\frac{\pi}{2}$: l'intégrale complète est donc inversement proportionnelle à cette moyenne arithmético-géométrique.

270*. — Des fonctions elliptiques; théorème d'Euler sur les sinus et cosinus elliptiques d'une somme.

Nous avons vu (p. 84) qu'une intégrale elliptique F ou E, d'un module donné constant k, et l'amplitude φ de cette intégrale sont deux variables nulles en même temps et indéfiniment croissantes ou décroissantes en même temps; de telle sorte même que, pour chaque accroissement de φ égal à π, F ou E croît de la quantité constante $2F^1$ ou $2E^1$, et que, à deux valeurs de φ équidistantes de $\frac{\pi}{2}$, correspondent des valeurs de F ou de E pareillement équidistantes de F^1 ou de E^1. Il suit de là que les trois quantités φ, E, F varient simultanément d'une manière très commode pour se suppléer dans le rôle de variable indépendante (du moins tant qu'il s'agit seulement de valeurs réelles), et que toute fonction bien déterminée de φ sera, si l'on y regarde φ comme dépendant de F ou de E, une fonction non moins bien déterminée de F ou de E. Or, Euler, Abel, Jacobi ont reconnu que l'on obtient ainsi des fonctions jouissant de propriétés aussi nombreuses que belles, et constituant d'admirables généralisations des fonctions trigonométriques auxquelles elles se réduisent dans l'hypothèse simple $k=0$ (où $\varphi = F = E$), quand on considère comme exprimés au moyen de F le sinus circulaire de l'amplitude φ, son cosinus circulaire ou du moins la fonction $\sqrt{1-\sin^2\varphi}$ (en y réglant les changements de signes par la loi de continuité), et la tangente circulaire de φ, ou plutôt le rapport de $\sin\varphi$ à la précédente fonction $\sqrt{1-\sin^2\varphi}$. On peut les appeler sinus, cosinus et tangente *elliptiques* de F; et on les représente soit avec Jacobi, par sin am F, cos am F, tang am F (c'est-à-dire sinus, cosinus, tangente *de l'amplitude de* F), soit plus simplement, avec Gudermann, par sn F, cn F, tn F.

Si l'on y joint la fonction, toujours positive (pour φ réel), $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, que l'on représente par dn F et qui, analogue à $\sqrt{1-\sin^2\varphi} = \text{cn}\,F$ (qu'elle égale pour $F=0$), est aussi une sorte de cosinus, on aura ce qu'on appelle les *fonctions elliptiques* d'une variable F. Celle-ci, elle-même, F, prend le nom d'*argument*, censé être une généralisation du mot *arc* qui la désigne dans le cas particulier $k=0$; et l'on applique au besoin la même dénomination d'argument à la variable des sinus, cosinus et tangente hyperboliques. Peut-être emploiera-t-on un jour ces fonctions sn, cn, dn, tn dans certaines questions soit de la Mécanique physique, soit de la Mécanique céleste. Mais, jusqu'à présent, leur intérêt ne s'est guère révélé que dans l'Analyse pure et dans

la Mécanique rationnelle. Aussi leur étude détaillée sortirait-elle complètement du cadre de ce Cours.

Il est bon toutefois de connaître la première base, posée par Euler, de leur théorie, consistant en une propriété qui montre l'analogie du sinus elliptique avec le sinus circulaire, et celle des fonctions $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ avec le cosinus circulaire. Si, nous bornant d'abord au sinus, nous appelons x et y deux valeurs quelconques de F, et que, pour abréger, $\operatorname{sn}' F$ désigne la dérivée de la fonction $\operatorname{sn} F$, le sinus elliptique de la somme $x+y$ sera donné par la formule

$$(36) \qquad \operatorname{sn}(x+y) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{sn}' y + \operatorname{sn} y \operatorname{sn}' x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 y},$$

qui se réduit bien, pour $k=0$, à la formule classique du sinus circulaire de la somme de deux arcs x et y, savoir, $\sin x \sin' y + \sin y \sin' x$, c'est-à-dire $\sin x \cos y + \sin y \cos x$.

Pour démontrer cette relation (36), nous n'aurons qu'à raisonner comme lorsqu'il s'agissait (t. I, p. 8*) d'établir les relations analogues concernant les sinus et cosinus de la différence ou de la somme de deux arcs. Faisons varier x et y, mais de manière à maintenir constante la somme $x+y$, que nous appellerons c, ou prenons, par suite, $dy = -dx$; de sorte que la dérivée en x des fonctions $\operatorname{sn} y$, $\operatorname{sn}' y$ égale leur dérivée en y changée de signe. Nous constaterons que la dérivée totale du second membre est nulle; ce qui prouvera l'invariabilité de ce second membre. Et il suffira de poser alors $y=0$, $x=c$, pour reconnaître que sa valeur est bien $\operatorname{sn} c$.

Il y a donc à former d'abord la dérivée $\operatorname{sn}' F$ de la fonction de fonction $\sin\varphi$, où φ se trouve lié à F de telle manière que, par définition, $dF = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$. Nous aurons évidemment $\operatorname{sn}' F = \frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dF}$, c'est-à-dire

$$(37) \qquad \operatorname{sn}' F = \cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

Pour la valeur *initiale* $F=0$ de la variable (d'où $\varphi=0$), on voit que $\operatorname{sn} F = 0$ et $\operatorname{sn}' F = 1$.

En élevant (37) au carré, puis remplaçant $\sin\varphi$ par $\operatorname{sn} F$ et $\cos^2\varphi$ par $1-\operatorname{sn}^2 F$, cette relation donne l'équation différentielle

$$(38) \qquad (\operatorname{sn}' F)^2 = 1-(1+k^2)\operatorname{sn}^2 F + k^2 \operatorname{sn}^4 F.$$

Comme nous aurons besoin de connaître la dérivée $\operatorname{sn}'' F$ de $\operatorname{sn}' F$, différentions les deux membres de (38) par rapport à F; et supprimons, de part et d'autre, le facteur commun $2\operatorname{sn}' F$ différent de zéro. Il

viendra

$$(39)\qquad \operatorname{sn}''F = -\operatorname{sn}F(1 + k^2 - 2k^2\operatorname{sn}^2F).$$

Si donc, pour abréger l'écriture, nous appelons X la fonction $\operatorname{sn}x$ de x, Y la fonction $\operatorname{sn}y$ de y, les dérivées X', X'' et Y', Y'' de ces deux fonctions, par rapport à leur variable respective x ou y, vérifieront, d'après (38) et (39), les relations

$$(40)\qquad \begin{cases} X'^2 = 1 - (1 + k^2)X^2 + k^2X^4, & X'' = -X(1 + k^2 - 2k^2X^2), \\ Y'^2 = 1 - (1 + k^2)Y^2 + k^2Y^4, & Y'' = -Y(1 + k^2 - 2k^2Y^2), \end{cases}$$

qui donnent immédiatement

$$(41)\qquad \begin{cases} X^2Y'^2 - Y^2X'^2 = (1 - k^2X^2Y^2)(X^2 - Y^2), \\ YX'' - XY'' = 2k^2XY(X^2 - Y^2). \end{cases}$$

Cela posé, considérons le second membre $\dfrac{XY' + YX'}{1 - k^2X^2Y^2}$ de (36), et observons que, $\dfrac{dy}{dx}$ ou y' valant -1, la dérivée totale en x de son numérateur est simplement $YX'' - XY''$ (grâce à la destruction mutuelle de deux termes $\pm X'Y'$), tandis que celle de son dénominateur $1 - k^2(XY)^2$ est $2k^2XY(XY' - YX')$. Par suite, la dérivée de ce second membre aura pour numérateur $(1 - k^2X^2Y^2)(YX'' - XY'') - 2k^2XY(X^2Y'^2 - Y^2X'^2)$, et, son dénominateur $(1 - k^2X^2Y^2)^2$ ne devenant ni nul, ni infini, elle s'annulera à la condition nécessaire et suffisante que ce numérateur s'annule. Or les valeurs (41) des deux binômes $X^2Y'^2 - Y^2X'^2$ et $YX'' - XY''$ montrent qu'il est bien nul en effet.

Donc l'expression $\dfrac{XY' + YX'}{1 - k^2X^2Y^2}$ se trouve fonction seulement de la somme $x + y$ ou c; et il suffit d'y faire $x = c$, $y = 0$ (d'où aussi $Y = 0$ et $Y' = 1$), pour la réduire à $XY' = X = \operatorname{sn}c$, ce qui est la valeur cherchée.

De la relation (36) on déduit aisément, pour les fonctions cn et dn, les deux formules, dues également à Euler,

$$(42)\qquad \begin{cases} \operatorname{cn}(x + y) = \dfrac{\operatorname{cn}x\operatorname{cn}y - \operatorname{cn}'x\operatorname{cn}'y}{1 - k^2\operatorname{sn}^2x\operatorname{sn}^2y}, \\[2ex] \operatorname{dn}(x + y) = \dfrac{\operatorname{dn}x\operatorname{dn}y - \frac{1}{k^2}\operatorname{dn}'x\operatorname{dn}'y}{1 - k^2\operatorname{sn}^2x\operatorname{sn}^2y}, \end{cases}$$

qui mettent en évidence l'analogie de ces fonctions entre elles et avec le cosinus circulaire, auquel se réduit la première pour $k = 0$.

En effet, l'on a identiquement, pour ce qui concerne $\text{cn}\,(x+y)$,

$$(43)\quad \text{cn}^2(x+y) = 1 - \text{sn}^2(x+y) = \frac{(1-k^2X^2Y^2)^2 - (XY'+YX')^2}{(1-k^2X^2Y^2)^2}.$$

Or $1-k^2X^2Y^2$ est, à volonté, soit $(1-X^2)+X^2(1-k^2Y^2)$, c'est-à-dire $\text{cn}^2 x + \dfrac{X^2Y'^2}{\text{cn}^2 y}$, soit $(1-Y^2)+Y^2(1-k^2X^2)$ ou $\text{cn}^2 y + \dfrac{Y^2X'^2}{\text{cn}^2 x}$. Le carré $(1-k^2X^2Y^2)^2$ peut donc être remplacé, dans le numérateur du troisième membre de (43), par

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\text{cn}^2 x + \frac{X^2Y'^2}{\text{cn}^2 y}\right)\left(\text{cn}^2 y + \frac{Y^2X'^2}{\text{cn}^2 x}\right) \\ &\quad = \text{cn}^2 x\,\text{cn}^2 y + X^2Y'^2 + Y^2X'^2 + \frac{X^2X'^2Y^2Y'^2}{\text{cn}^2 x\,\text{cn}^2 y}; \end{aligned}\right.$$

ce qui réduit évidemment ce numérateur à $\left(\text{cn}\,x\,\text{cn}\,y - \dfrac{XX'YY'}{\text{cn}\,x\,\text{cn}\,y}\right)^2$. Mais les équations $\text{cn}^2 x = 1 - X^2$, $\text{cn}^2 y = 1 - Y^2$, différentiées, donnent $\text{cn}\,x\,\text{cn}'x = -XX'$, $\text{cn}\,y\,\text{cn}'y = -YY'$ et, par suite,

$$\frac{XX'YY'}{\text{cn}\,x\,\text{cn}\,y} = \text{cn}'x\,\text{cn}'y.$$

Donc la formule (43) revient, en y extrayant la racine carrée, à prendre pour $\text{cn}(x+y)$ l'une ou l'autre des valeurs $\pm\dfrac{\text{cn}\,x\,\text{cn}\,y - \text{cn}'x\,\text{cn}'y}{1-k^2\,\text{sn}^2 x\,\text{sn}^2 y}$. Or, si l'on suppose, par exemple, x constant et y variable, c'est le signe supérieur seul qui convient à l'instant où $y=0$, car cette expression doit alors se réduire à $\text{cn}\,x$; et, aux instants où, y s'étant éloigné de zéro, elle s'annulera pour changer de signe, la fonction $\text{cn}(x+y)$, cosinus d'un arc φ croissant ou décroissant, en changera aussi, de sorte que le signe supérieur continuera seul à convenir. On obtiendra donc bien la première formule (42).

Quant à la seconde, elle se démontrera de même, en observant, d'une part, que

$$(44)\quad \text{dn}^2(x+y) = 1 - k^2\,\text{sn}^2(x+y) = \frac{(1-k^2X^2Y^2)^2 - k^2(XY'+YX')^2}{(1-k^2X^2Y^2)^2},$$

et, d'autre part, que, $1-k^2X^2Y^2$ égalant soit

$$(1-k^2X^2)+k^2X^2(1-Y^2),$$

c'est-à-dire $\text{dn}^2 x + \dfrac{k^2X^2Y'^2}{\text{dn}^2 y}$, soit $\text{dn}^2 y + \dfrac{k^2Y^2X'^2}{\text{dn}^2 x}$, le numérateur du troisième membre de (44) revient au carré $\left(\text{dn}\,x\,\text{dn}\,y - \dfrac{k^2XX'YY'}{\text{dn}\,x\,\text{dn}\,y}\right)^2$,

où les formules $\mathrm{dn}^2 x = 1 - k^2 X^2$, $\mathrm{dn}^2 y = 1 - k^2 Y^2$, différentiées, permettent enfin de remplacer $\frac{k^2 XX'YY'}{\mathrm{dn}\, x\, \mathrm{dn}\, y}$ par $\frac{1}{k^2} \mathrm{dn}' x\, \mathrm{dn}' y$.

271*. — De la double périodicité des fonctions elliptiques.

Si les définitions mêmes, $\sin\varphi$, $\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$ ou $\cos\varphi$ (du moins pour φ réel), et $\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, des fonctions $\mathrm{sn}\, F$, $\mathrm{cn}\, F$, $\mathrm{dn}\, F$, ne montraient pas que ces fonctions reprennent leurs valeurs absolues quand φ croît de π ou F de $2F^1(k)$, et qu'elles sont, par suite, périodiques, en ayant pour périodes, les deux premières, $4F^1(k)$ et, la troisième, $2F^1(k)$, cette périodicité résulterait des formules (36) et (42), dans lesquelles il faut concevoir les dérivées $\mathrm{sn}' x$, $\mathrm{sn}' y$, $\mathrm{cn}' x$, $\mathrm{cn}' y$, $\mathrm{dn}' x$, $\mathrm{dn}' y$ remplacées par leurs valeurs $\mathrm{cn}\, x\, \mathrm{dn}\, x$, $\mathrm{cn}\, y\, \mathrm{dn}\, y$, $-\mathrm{sn}\, x\, \mathrm{dn}\, x$, $-\mathrm{sn}\, y\, \mathrm{dn}\, y$, $-k^2 \mathrm{sn}\, x\, \mathrm{cn}\, x$, $-k^2 \mathrm{sn}\, y\, \mathrm{cn}\, y$, résultant de formules employées ci-dessus. Il suffirait, en effet, d'y faire d'abord $x = F^1$ et $y = F^1$ [où F^1 désigne, pour abréger, $F^1(k)$], en observant que $\mathrm{sn}\, F^1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\mathrm{cn}\, F_1 = 0$ et $\mathrm{dn}\, F_1 = \sqrt{1-k^2} = k'$, pour obtenir les valeurs $\mathrm{sn}\, 2F_1 = 0$, $\mathrm{cn}\, 2F_1 = -1$, $\mathrm{dn}\, 2F^1 = 1$; après quoi une nouvelle application de ces formules (36) et (42), où l'on poserait $y = 2F^1$, donnerait bien

$$\mathrm{sn}(x+2F^1) = -\mathrm{sn}\, x, \quad \mathrm{cn}(x+2F^1) = -\mathrm{cn}\, x, \quad \mathrm{dn}(x+2F_1) = \mathrm{dn}\, x.$$

Ainsi les fonctions elliptiques possèdent, comme leurs analogues circulaires, une période *réelle*. Mais elles s'en distinguent en ayant de plus une période *imaginaire ;* de sorte qu'elles sont *doublement périodiques* et cumulent, d'une certaine manière, avec les propriétés des fonctions trigonométriques, pourvues seulement d'une période réelle, celles des fonctions exponentielles ou hyperboliques, pourvues seulement (t. I, p. 35*) d'une période imaginaire.

Pour nous faire une idée de cette période imaginaire des fonctions elliptiques, donnons, à partir de l'*état initial*, $\varphi = 0$, $F = 0$ et $\mathrm{sn}\, F = 0$, de φ, F et $\mathrm{sn}\, F$, des valeurs imaginaires à ces variables simultanées φ, F, $\mathrm{sn}\, F$, que relient par définition les équations $\mathrm{sn}\, F = \sin\varphi$ et

$$\frac{d\varphi}{dF} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}.$$

A cet effet, posons-y $\varphi = \psi\sqrt{-1}$, $F = G\sqrt{-1}$ (avec ψ, G réels) et par suite, $\mathrm{sn}\, F = \sin(\psi\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\, \mathrm{sih}\psi$, d'après la définition même (t. I, p. 33*) de la fonction sinus d'une variable imaginaire. L'équa-

tion qui relie φ à F deviendra, en ψ et G, $\frac{d\psi}{dG} = \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sih}^2\psi}$; et la fonction elliptique sn F, transformée en $\sqrt{-1}\operatorname{sih}\psi$, croîtra (abstraction faite, provisoirement, du facteur $\sqrt{-1}$) depuis $-\infty$ jusqu'à ∞, en même temps que ψ. Cette fonction ne serait donc pas plus périodique que le sinus hyperbolique, si ψ était sa vraie variable, ou si cette vraie variable, $G\sqrt{-1}$, grandissait de $-\infty\sqrt{-1}$ à $\infty\sqrt{-1}$ quand ψ croît de $-\infty$ et ∞. Mais l'équation $\frac{d\psi}{dG} = \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sih}^2\psi}$, en donnant $G = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{sih}^2\psi}}$, montre que G varie seulement, en tout, de $2\int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{sih}^2\psi}}$, quand ψ, parti, comme G, de la valeur zéro, a épuisé tout le champ de ses variations en allant de zéro à $+\infty$ et de zéro à $-\infty$.

Or la quantité $2\int_0^\infty \frac{d\psi}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{sih}^2\psi}}$ est finie; car, si l'on y pose

$$\operatorname{sih}\psi = \operatorname{tang} u,$$

où u désigne ainsi un arc croissant de zéro à $\frac{\pi}{2}$ pendant que ψ grandit de zéro à l'infini, et si l'on observe par suite que la différentiation donne

$$\operatorname{coh}\psi\, d\psi = \frac{du}{\cos^2 u}, \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{1 + \operatorname{sih}^2\psi}\, d\psi = \frac{du}{\cos^2 u},$$

ou enfin

$$d\psi = \frac{du}{\cos^2 u \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 u}} = \frac{du}{\cos u},$$

elle devient

$$\left\{\begin{aligned} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\cos u \sqrt{1 + k^2 \operatorname{tang}^2 u}} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - (1 - k^2)\sin^2 u}} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 u}} = 2F^1(k'). \end{aligned}\right.$$

Donc, la variable indépendante G n'a besoin de croître en tout que de $2F^1(k')$, savoir depuis $G = -F^1(k')$ jusqu'à $G = F^1(k')$, pour que la variable auxiliaire ψ, définie de proche en proche, à partir de $G = 0$ et $\psi = 0$, par l'équation différentielle $\frac{d\psi}{dG} = \sqrt{1 + k^2 \operatorname{sih}^2\psi}$, passe, de $-\infty$ à ∞, par tous les états de grandeur. Et si l'on fait sortir G des

limites $\pm F^1(k')$, l'équation différentielle astreindra ψ à reprendre les mêmes séries de valeurs qui, entre ces limites, précédaient ou suivaient la première qu'on attribuera à ψ en deçà de $G = -F^1(k')$ ou au delà de $G = F^1(k')$. Or on ne peut réellement pas choisir à volonté cette première valeur. Il convient, en effet, aux moments où le passage d'une fonction par l'infini porte atteinte à sa continuité parfaite, d'y atténuer du moins, autant que possible, la discontinuité, et cela de deux manières, savoir, d'une part, en empêchant la discontinuité d'atteindre aucune valeur *assignable* de la fonction, c'est-à-dire en attribuant à la fonction non pas une valeur finie, mais une valeur infinie, à la suite de la valeur infinie qu'elle a prise, et, d'autre part, en achevant d'y rendre graduellement variable l'inverse, alors nul, de la fonction, grâce, d'ordinaire, à un changement de signe comme celui qu'offre, dans la plus simple ou la plus élémentaire des discontinuités, une fraction à termes continus dont le dénominateur passe par zéro. Donc il faudra, dans chacun des intervalles $2F^1(k')$ compris respectivement entre $G = F^1(k')$ et $G = 3F^1(k')$, $G = 3F^1(k')$ et $G = 5F^1(k'), \ldots$, $G = -3F^1(k')$ et $G = -F^1(k')$, etc., faire prendre à ψ les mêmes valeurs que dans le premier intervalle considéré, tombant entre les limites $G = \mp F^1(k')$.

Par conséquent, ψ sera une fonction impaire périodique de G dans le genre de tangψ, mais avec $2F^1(k')$, au lieu de π, pour période. Et le sinus elliptique $\operatorname{sn}(G\sqrt{-1})$, ou $\sqrt{-1}\,\operatorname{sih}\psi$, infini pour les valeurs de G égales aux multiples impairs de $F^1(k')$, aura la période imaginaire $2F^1(k')\sqrt{-1}$.

Quant aux fonctions $\operatorname{cn}(G\sqrt{-1})$ et $\operatorname{dn}(G\sqrt{-1})$, définies respectivement par $\sqrt{1-\operatorname{sn}^2(G\sqrt{-1})}$ et $\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2(G\sqrt{-1})}$ avec la condition de se réduire à l'unité pour la valeur initiale $G\sqrt{-1} = 0$ de la variable, la même raison naturelle de la plus grande atténuation possible de leurs discontinuités, pour les valeurs de G, égales aux multiples impairs de $F^1(k')$, qui les rendent infinies, conduira à y changer à ces instants le signe du radical. Ainsi cn F, dn F reprendront leurs valeurs absolues avec signes contraires quand G croîtra de $2F^1(k')$, et elles auront pour période imaginaire $4F^1(k')\sqrt{-1}$. En particulier, l'expression de $\operatorname{cn}(G\sqrt{-1})$ au moyen de ψ, savoir $\pm\sqrt{1+\operatorname{sih}^2\psi}$ ou $\pm\operatorname{coh}\psi$, sera alternativement $\operatorname{coh}\psi$ et $-\operatorname{coh}\psi$.

Les fonctions elliptiques se réduisent aux transcendantes classiques plus simples lorsque le module atteint l'une ou l'autre de ses deux valeurs extrêmes $k = 0$, $k = 1$. Alors, en effet, l'équation qui relie F à la variable intermédiaire φ devient simplement $dF = d\varphi$, pour $k = 0$, et

$dF = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = d \log \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$, pour $k = 1$; ce qui, vu l'annulation convenue de φ pour $F = 0$, donne soit $\varphi = F$, soit $\log \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = F$ et, par suite, $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2 \text{arc tang} e^F$, relations permettant d'éliminer φ des formules, $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, etc., des fonctions elliptiques.

Il y a donc lieu de se demander pourquoi ces transcendantes plus simples, cas limites des fonctions elliptiques, ne conservent pas la double périodicité de celles-ci. La raison en est dans la valeur infinie de l'intégrale $F(1,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} = \log \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ quand elle devient $F^1(1)$, c'est-à-dire quand on y pose $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Il suit, en effet, de là, que la période imaginaire $2F^1(k')\sqrt{-1}$ de $\text{sn} F$ devient infinie pour $k = 0$ ou $k' = 1$, tandis que c'est au contraire la période réelle, $4F^1(k)$, qui le devient à son tour pour $k = 1$. Donc une des deux périodicités disparaît dans chacun des deux cas extrêmes, parce que l'amplitude de la période y envahit tout le champ de variation de la variable correspondante G ou F.

274*. — Valeur moyenne géométrique d'une fonction.

Considérons encore, dans l'intervalle compris entre les limites $x_0 = a$ et $x_n = b$, les valeurs, supposées ici toutes positives, que reçoit une fonction $f(x)$, quand x y prend la valeur initiale x_0 et les $n - 1$ valeurs intermédiaires *équidistantes* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; mais, au lieu d'en calculer la moyenne arithmétique, c'est-à-dire de chercher la $n^{\text{ième}}$ partie de leur somme, prenons la racine $n^{\text{ième}}$ de leur produit, indiquée par l'expression

$$\sqrt[n]{f(x_0)f(x_1)\ldots f(x_{n-1})}.$$

Cette expression, qui, dans le cas de deux valeurs seulement, $f(x_0)$ et $f(x_1)$ par exemple, serait leur moyenne proportionnelle ou *moyenne géométrique*, s'appelle, par extension, la *valeur moyenne géométrique* des n quantités $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n-1})$. Et, si nous imaginons que, n grandissant indéfiniment, les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ se rapprochent de plus en plus l'une de l'autre, la moyenne géométrique tendra vers une limite qu'on appelle la *valeur moyenne géométrique de la fonction* $f(x)$ dans l'intervalle considéré.

Pour démontrer que cette limite existe, et pour l'évaluer, appelons μ le radical $\sqrt[n]{f(x_0)f(x_1)\ldots f(x_{n-1})}$. Son logarithme sera évidem-

ment la $n^{\text{ième}}$ partie de celui du produit $f(x_0)f(x_1)\ldots f(x_{n-1})$, et l'on aura

$$\log\mu = \frac{1}{n}\left[\log f(x_0) + \log f(x_1) + \ldots + \log f(x_{n-1})\right].$$

Cette formule montre que $\log\mu$ est simplement la moyenne arithmétique des n valeurs prises par la fonction $\log f(x)$ et que, par suite, à la limite $n = \infty$, $\log\mu$ sera la valeur moyenne de $\log f(x)$, savoir, $\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\,dx$. Enfin, passant du logarithme népérien du nombre μ à ce nombre $e^{\log\mu}$, et observant que μ désigne, à la limite, la moyenne demandée, il viendra

$$(46)\qquad \text{Val. moy. géom. de } f(x) = e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\,dx}.$$

Cherchons, par exemple, la valeur moyenne géométrique de x^m (m étant positif) entre les limites $x = 0$ et $x = 1$. On aura, ici, $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x^m$ et

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\,dx = m\int_0^1 (\log x)\,dx.$$

Or $\int(\log x)\,dx = x\log x - \int x\,d\log x = x\log x - x$, et le produit $x\log x$ s'annule, non seulement à la limite supérieure 1, mais aussi à la limite inférieure zéro (t. I, p. 140). Il vient donc

$$\int_0^1 (\log x)\,dx = (-x)_0^1 = -1;$$

et la formule (46) donne

$$(47)\ \text{Val. moy. géom. de } x^m \text{ (entre zéro et 1)} = e^{-m} = \frac{1}{e^m} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{(2,718\ldots)^m}.$$

La moyenne arithmétique serait, dans les mêmes conditions,

$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{1+m},$$

quantité supérieure à la moyenne géométrique; car le dénominateur e^m égal à $1 + \frac{m}{1} + \frac{m^2}{1.2} + \ldots$, est plus grand que le dénominateur $1 + m$.

Cette remarque s'applique à un nombre quelconque n de quantités positives inégales : leur moyenne arithmétique, que j'appellerai M, dépasse toujours leur moyenne géométrique μ. Soit, en effet, $M(1+\alpha)$ leur expression générale, où α désigne, pour chacune, son écart *relatif* d'avec la moyenne M, supérieur à -1. L'égalité, à nM, de leur somme

$\Sigma M(1+\alpha)$ ou $nM + M\Sigma\alpha$, donnera évidemment $\Sigma\alpha = 0$. Or la moyenne géométrique μ aura, pour son logarithme népérien,

$$\frac{1}{n}\Sigma\log[M(1+\alpha)] = \log M + \frac{1}{n}\Sigma\log(1+\alpha).$$

Il viendra donc $\log\mu - \log M$ ou $\log\frac{\mu}{M} = \frac{1}{n}\Sigma\log(1+\alpha)$; et il s'agit de reconnaître que ce logarithme, $\frac{1}{n}\Sigma\log(1+\alpha)$, du rapport $\frac{\mu}{M}$, est inférieur au logarithme de l'unité, c'est-à-dire à la quantité nulle $\frac{1}{n}\Sigma\alpha$, ou que l'on a $\Sigma[-\alpha+\log(1+\alpha)] < 0$. Or cette inégalité se démontre de suite, pour chaque terme de la somme Σ, en y regardant α comme une variable qui croîtrait de -1 à ∞, et en observant que la fonction continue $-\alpha+\log(1+\alpha)$ devient alors, à l'instant $\alpha = 0$ où elle s'annule, maxima par suite du signe de sa dérivée

$$-1+\frac{1}{1+\alpha} = -\frac{\alpha}{1+\alpha},$$

signe contraire à celui de α.

Toutefois, comme, aux environs de son maximum, une fonction n'éprouve que des changements du second ordre de petitesse, on aura, à des écarts près de cet ordre, $\log\frac{\mu}{M} = 0$, et les deux moyennes seront sensiblement égales, quand les nombres proposés s'écarteront peu de l'égalité, ou tant que leurs écarts relatifs α d'avec leur moyenne arithmétique resteront très petits.

275*. — Application des intégrales définies au calcul approché du reste de certaines séries.

Les calculs d'intégrales définies comportent encore, en Analyse, un emploi parfois très utile : c'est l'évaluation approchée des restes d'un grand nombre de séries peu convergentes à termes de même signe, positifs par exemple, séries auxquelles d'ailleurs se ramènent, par le groupement deux à deux des termes qui se suivent, celles dont les termes sont décroissants et à signes alternés.

L'expression générale des termes de la série proposée étant une certaine fonction $f(x)$ de leur rang x, admettons qu'on ait fait, par un calcul direct, la somme des plus influents, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n-1)$; et considérons les autres, $f(n)$, $f(n+1)$, ... La

fonction $f(x)$, indéfiniment décroissante pour les valeurs entières de plus en plus grandes de sa variable x, se trouvera, en général, continue quand celle-ci le deviendra elle-même; et elle ne variera que fort peu, relativement, lorsque x y croîtra d'une petite fraction de sa valeur, comme de $n-1$ à n, ou de n à $n+1$, etc. Alors nous pourrons regarder chaque terme assez éloigné, $f(n)$ par exemple, comme représentant à très peu près l'intégrale $\int f(x)\,dx$, dans un intervalle égal à l'unité compté par moitié de part et d'autre de la valeur donnée $x=n$, et remplacer ainsi $f(n)$ par $\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$. En effet, si l'on pose, sous le signe $\int$ de celle-ci, $x=n+u$, et si l'on opère comme il a été fait précédemment quand on a obtenu la formule (1) [p. 71], il vient $f(n)$ pour la valeur de cette intégrale, avec une erreur absolue par défaut sensiblement égale à $\frac{f''(n)}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3$, ou avec une erreur relative exprimée à fort peu près par $\frac{f''(n)}{24f(n)}$. Donc la substitution, au terme $f(n)$, de l'intégrale $\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$, entraîne une erreur relative encore égale sensiblement à $\frac{f''(n)}{24f(n)}$, mais *par excès*. En substituant de même à $f(n+1)$, $f(n+2)$, ... les intégrales analogues $\int_{(n+1)-\frac{1}{2}}^{(n+1)+\frac{1}{2}} f(x)\,dx$, ..., on commettra les erreurs relatives par excès $\frac{f''(n+1)}{24f(n+1)}$, ..., qui seront généralement inférieures à la première $\frac{f''(n)}{24f(n)}$; car la fonction $\frac{f''(x)}{24f(x)}$ tendra presque toujours vers zéro quand x grandira. Et le reste de la série, $f(n)+f(n+1)+\ldots$, se trouvera ainsi exprimé par $\int_{n-\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)\,dx$, avec une erreur relative, par excès, comprise entre zéro et $\frac{f''(n)}{24f(n)}$; vu que l'erreur totale, somme des erreurs partielles commises sur les divers termes, formera, avec l'intégrale totale, somme des intégrales partielles représentant ces termes, un rapport compris entre le plus grand et le plus petit des rapports $\frac{f''(n)}{24f(n)}$, $\frac{f''(n+1)}{24f(n+1)}$, etc. Or, les différentielles successives $f(x)\,dx$ étant, en général, à cause de la continuité, beaucoup plus

faciles à sommer que les différences finies analogues $f(n)$, l'intégrale $\int_{n-\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)\,dx$ sera souvent d'un calcul aisé. Elle fera ainsi connaître la somme cherchée $f(n)+f(n+1)+\ldots$, avec une erreur relative, *par excès,* comprise entre zéro et $\frac{f''(n)}{24\,f(n)}$.

Soit, par exemple, à évaluer la série

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots,$$

en ne calculant directement que les cinq premiers termes 1, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{49}$, $\frac{1}{81}$, dont la somme est $1{,}18386$. Conformément aux indications précédentes, on remplacera le reste $\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\ldots$, qui a pour premier terme $\frac{1}{(2n+1)^2}$ avec $n=5$, par l'intégrale définie $\int_{5-\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{dx}{(2x+1)^2}$. Alors, la dérivée seconde de $(2x+1)^{-2}$ étant $24(2x+1)^{-4}$ [ce qui donne bien pour le rapport $\frac{f''(x)}{24\,f(x)}$ une fonction, $\frac{1}{(2x+1)^2}$, indéfiniment décroissante quand x grandit], l'erreur relative sera par excès et inférieure à $\frac{1}{(2.5+1)^2}$, c'est-à-dire, au premier terme négligé $\frac{1}{121}$. Or, si l'on pose $2x+1=y$ $\left(\text{d'où } dx=\frac{1}{2}dy\right)$, y croîtra, sous le signe $\int$, de $2n$ ou 10 à ∞, pendant que x grandira lui-même de $n-\frac{1}{2}$ à l'infini, et l'intégrale à calculer deviendra simplement

$$\int_{10}^{\infty}\frac{dy}{2y^2}=\left(-\frac{1}{2y}\right)_{10}^{\infty}=\frac{1}{20}=0{,}05.$$

Ainsi, l'évaluation approchée du reste est $0{,}05$; et l'erreur, *par excès,* y a une valeur absolue inférieure à $0{,}05\times\frac{1}{121}$ environ, ou au quotient $\frac{0{,}05}{121}=0{,}00041$. Le reste cherché de la série se trouve donc compris entre $0{,}05-0{,}00041=0{,}04959$ et $0{,}05$. Par conséquent, la série proposée $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$ l'est, elle-même, entre $1{,}18386+0{,}04959=1{,}23345$ et $1{,}18386+0{,}05=1{,}23386$; d'où il suit que l'on peut prendre pour sa valeur la moyenne $1{,}2337$, avec une erreur par excès ou par défaut

de deux unités au plus sur le dernier chiffre. Et, en effet, nous savons (t. I, p. 28*) que cette série vaut $\frac{\pi^2}{8} = \frac{(3,14159)^2}{8} = 1,2337$.

La transformation indiquée du reste d'une série à termes tous de même signe en une intégrale définie, avec une petite erreur relative, permettra encore, parfois, de juger très rapidement si la série proposée est ou non convergente; car le reste, évidemment, sera fini ou infini en même temps que la valeur de l'intégrale. Par exemple, si l'on n'avait pas déjà reconnu la divergence de la série harmonique $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} + \ldots$, on l'apercevrait de suite sur l'intégrale que donne son reste, $\int_{n-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x} = (\log x)_{n-\frac{1}{2}}^{\infty} = \infty$.

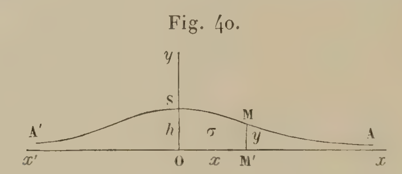
COMPLÉMENT A LA VINGT-SIXIÈME LEÇON.

ÉVALUATIONS DIVERSES D'AIRES PLANES; RECTIFICATIONS D'ARCS EN COORDONNÉES POLAIRES.

281*. — Aire comprise sous le profil longitudinal d'une onde solitaire; relation entre l'ordonnée de ce profil et les deux aires partielles qu'elle délimite.

Considérons enfin, comme dernier exemple du calcul d'une aire plane par la formule $\int_a^b F(x)dx$, la courbe A'SMA, dont l'équation, en y supposant adoptée une unité de longueur convenable, est $y = \frac{h}{\text{coh}^2 x}$, courbe symétrique par rapport à sa *hauteur* positive $OS = h$ au-dessus de l'axe des x (qu'elle ne franchit pas), et se raccordant asymptotiquement à cet axe. Proposons-nous d'évaluer la surface

Fig. 40.



$\sigma = \text{OSMM}'$ comprise entre elle, son asymptote Ox, l'axe perpendiculaire des y et une ordonnée quelconque $M'M = y$ dont x désignera l'abscisse $\pm OM'$ positive ou négative. En attribuant à σ le signe même de x, nous aurons, d'après une intégration effectuée plus haut [avant les formules (19), p. 68],

$$\sigma = \int_0^x y\,dx = h\int_0^x \frac{dx}{\text{coh}^2 x} = h \,\text{tah}\, x = \pm h\sqrt{1 - \frac{1}{\text{coh}^2 x}}.$$

Remplaçons, dans le dernier membre, l'inverse de $\text{coh}^2 x$ par sa valeur $\frac{y}{h}$ tirée de l'équation de la courbe; et il viendra

$$(13) \qquad \sigma = \pm\sqrt{h(h-y)}.$$

Quand l'ordonnée M′M ou y s'éloigne à l'infini, elle tend vers zéro et la valeur absolue de σ tend vers h. Donc h représente la moitié, OSA ou OSA′, de la surface totale comprise entre la courbe et son asymptote. Or de là résulte, en élevant (13) au carré, résolvant par rapport à y, et observant que la différence $h^2 - \sigma^2$ est le produit des deux facteurs $h \mp \sigma$ ou OSA $\mp$ OSMM′,

$$(14) \qquad y = \frac{1}{h}(h^2 - \sigma^2) = \frac{1}{h}\,(\text{aire MM'A})(\text{aire MM'A'});$$

ce qui exprime que *les ordonnées abaissées perpendiculairement sur l'asymptote sont proportionnelles au produit des deux parties en lesquelles elles divisent l'aire totale comprise entre cette asymptote et la courbe.*

D'ailleurs une relation de la forme $y = \varphi(\sigma)$, comme (14), qui donne l'ordonnée y d'une courbe en fonction de l'aire $\int_0^x y\,dx = \sigma$ comptée à partir de l'origine des abscisses x, suffit pour définir cette courbe : car, si l'on fait, de proche en proche, varier la quantité σ, d'abord nulle, l'espacement dx des ordonnées successives sera tel, à chaque instant, que l'on aura sans cesse $y\,dx = d\sigma$, c'est-à-dire

$$dx = \frac{d\sigma}{y} = \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)};$$

d'où il suit que la longueur totale x de l'aire balayée jusqu'à un moment quelconque par l'ordonnée variable y résultera de la formule $x = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)}$. Le lieu des points (x, y) se trouvera donc, grâce à la variable auxiliaire σ, parfaitement déterminé au moyen de la fonction unique $\varphi(\sigma)$.

L'équation (14), dans laquelle s'introduirait d'ailleurs un terme du premier degré en σ, à coefficient arbitraire, si l'on changeait l'origine des σ ou des abscisses, et un terme constant aussi arbitraire, si l'on déplaçait en outre l'axe des x parallèlement à l'asymptote base de l'aire σ considérée, est évidemment l'une des plus simples relations que l'on puisse avoir entre l'ordonnée y d'une courbe et une surface σ qu'elle limite. Comme cette relation n'atteint que le second degré en σ, la dérivée seconde $\frac{d^2y}{d\sigma^2}$ s'y réduit à une constante. Or la courbe ASA′ doit à cette propriété de représenter la coupe longitudinale des gonflements liquides appelés *ondes solitaires,* qu'on voit souvent se propager le long des canaux ou venir du large, au bord de la mer, déferler sur une plage en pente douce; la surface du *flot* y a en effet, au-dessus du niveau xx'

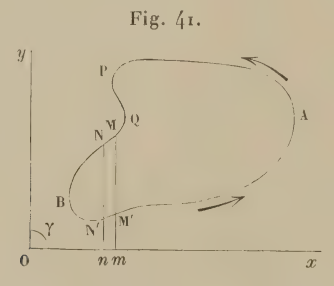
d'équilibre, la forme ASA', définie par l'équation $y = \frac{h}{\operatorname{coh}^2 x}$ quand on prend pour unité de longueur le double produit de la profondeur de l'eau au-dessous de xx' par la racine carrée du rapport de cette profondeur au triple de la hauteur $OS = h$ de l'onde (¹).

283*. — **Expressions générales d'une aire plane, en fonction des coordonnées d'un point mobile qui en décrit le contour et de leurs différentielles.**

Quand un point se déplace le long d'une courbe fermée AMBA, et que l'on convient d'attribuer à la surface $\pm y\,dx \sin\gamma$ comprise entre deux positions successives de son ordonnée variable y le signe même du produit $y\,dx$ de cette ordonnée par le déplacement élémentaire dx, positif ou négatif, de son pied, l'aire de l'*orbite* AMBA devient, du moins au signe près, la somme algébrique de toutes les bandes pareilles $y\,dx \sin\gamma$ décrites pendant une révolution complète du point le long de la courbe; et elle s'exprime très simplement au moyen d'une intégrale, où figure, par exemple, comme variable indépendante, le temps t dont sont fonctions les coordonnées x, y du point mobile.

Supposons, pour fixer les idées, que le point décrive son orbite en tournant comme l'indiquent les flèches ou comme il le ferait si, mobile autour de l'origine, il allait, entre Ox et Oy, des x positifs vers les y positifs; de manière à avoir : 1° des abscisses x décroissantes dans la

Fig. 41.



partie de la courbe où les y sont les plus grands et, généralement, dans toutes celles, AP, QB, ..., que des parallèles à Oy, tirées des y négatifs vers les y positifs, coupent à leur sortie de l'orbite; 2° au contraire, des abscisses x croissantes dans les parties PQ, BA, ..., que ces parallèles coupent à leur entrée dans l'orbite. Divisons la surface, au moyen des mêmes parallèles successives à l'axe des y, en bandes

(¹) *Voir* mon *Essai sur la théorie des eaux courantes*, p. 384.

étroites. L'une d'elles quelconque, comprise entre les deux éléments MN et N'M' du contour, égalera le produit de la portion interceptée, M'M, d'une parallèle, par sa distance, $mn \times \sin\gamma$, à l'ordonnée voisine nN; et, si y_2 désigne, sur mM, l'ordonnée la plus grande, savoir celle de M, y_1 celle de M' ou plutôt, sur la parallèle voisine nN, l'ordonnée la plus petite, infiniment peu différente, nN', la bande aura pour expression

$$(y_2 - y_1)\, mn \sin\gamma = y_2\, mn \sin\gamma - y_1\, mn \sin\gamma.$$

Mais mn est la valeur absolue de l'accroissement dx de l'abscisse quand le point mobile passe soit de M à N, soit de N' à M', accroissement négatif de M à N, positif de N' à M', qu'on peut appeler dx_2 pour le premier de ces passages, dx_1 pour le second. Il est donc permis de remplacer mn par $-dx_2$ dans le terme $y_2\, mn \sin\gamma$ et par dx_1 dans le terme $-y_1\, mn \sin\gamma$; ce qui donne en tout, pour exprimer l'aire partielle correspondant aux deux éléments MN, N'M' de la trajectoire du point mobile, la somme algébrique, $-y_1\, dx_1 \sin\gamma - y_2\, dx_2 \sin\gamma$, des valeurs reçues par l'expression $-y\, dx \sin\gamma$ pendant les deux instants respectifs dt_1 et dt_2 où ces deux éléments auront été décrits.

Il en sera évidemment de même pour les autres bandes de l'aire considérée, qui, ensemble, auront comme limites, à leurs deux bouts, tous les éléments de l'orbite parcourue non parallèles à l'axe des y ou donnant des produits $-y\, dx \sin\gamma$ différents de zéro. Donc la surface qu'entoure la courbe totale AMBA égalera la somme des valeurs reçues, durant toute une révolution T du point mobile, par la différentielle $-y\, dx \sin\gamma$, où y et dx s'exprimeront au moyen de t et de dt dès que l'on connaîtra les deux fonctions, de la forme $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, définissant le mouvement du point. Et l'on aura, en appelant t_0 l'époque du départ de celui-ci,

$$(15)\quad \text{Aire de l'orbite} = -(\sin\gamma) \int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}} y x'\, dt = -(\sin\gamma) \int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}} \varphi(t) f'(t)\, dt.$$

Si l'on veut laisser à l'expression placée sous le signe $\int$ sa forme la plus simple, $y\,dx$, il sera nécessaire d'indiquer de quelque manière que x n'est pas la variable indépendante, comme on pourrait le croire, et que les limites t_0, $t_0 + \mathrm{T}$ concernent non pas cette variable x, mais bien une autre, t, dont x et y sont deux fonctions distinctes. A cet effet, l'on pourra faire figurer au bas et au haut du signe $\int$ la vraie variable indépendante, en écrivant la formule ainsi :

$$(16)\qquad \text{Aire de l'orbite} = -(\sin\gamma) \int_{t=t_0}^{t=t_0+\mathrm{T}} y\, dx.$$

De tels cas où, sous un signe $\int$, ne se trouve pas explicitement désignée la variable indépendante, dite *variable d'intégration*, qui y change avec continuité mais arbitrairement d'un élément à l'autre, sont assez fréquents, surtout dans les transformations au moyen de l'intégration par parties; et alors il importe de faire connaître cette variable en indiquant, comme on vient de voir, que les limites sont deux de ses valeurs.

On opérera encore de même quand il s'agira d'exprimer les substitutions des deux limites respectives, à effectuer dans une intégrale indéfinie obtenue, pour prendre ensuite la différence des deux résultats. Toutes les fois qu'une telle intégrale indéfinie se présentera sous une forme capable de laisser quelques doutes au sujet de la variable d'intégration, on fera figurer celle-ci à la place où s'inscrivent les valeurs substituées. Par exemple, si U désigne, d'une manière abrégée, la fonction $\int_{t=0}^{t=t} y\,dx$, l'intégrale $\int_{t=t_0}^{t=t_0+\mathrm{T}} y\,dx$ s'indiquera par $(\mathrm{U})_{t=t_0}^{t=t_0+\mathrm{T}}$, au lieu de $(\mathrm{U})_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}}$. Le résultat d'une substitution unique, comme $t=t_0+\mathrm{T}$, serait marqué simplement par $(\mathrm{U})_{t=t_0+\mathrm{T}}$, ou même par $\mathrm{U}_{t=t_0+\mathrm{T}}$.

Mais revenons à l'évaluation de la surface qu'enclôt la trajectoire d'un point; et supposons qu'on l'effectue par une division en bandes étroites parallèles non plus à l'axe des y, mais à l'axe des x. Les rôles des x et des y seront changés; ce qui, abstraction faite du signe $+$ ou $-$, conduira à l'expression $(\sin\theta)\int x\,dy$. Et comme alors le mouvement du point mobile, supposé représenté toujours par les deux formules $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, a lieu en tournant dans le sens qui va des ordonnées positives (actuellement les x) vers les abscisses positives (actuellement les y), les dy se comporteront comme faisaient, tout à l'heure, les dx changés de signe; en sorte que la valeur absolue de l'aire ne sera pas $-(\sin\gamma)\int x\,dy$, mais bien $(\sin\gamma)\int x\,dy$. En ajoutant, si l'on veut, la moitié de cette nouvelle expression à la moitié de la précédente $-(\sin\gamma)\int y\,dx$, il viendra, en tout, la triple formule

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \text{Aire} &= \sin\gamma\int_{t=t_0}^{t=t_0+\mathrm{T}} x\,dy \\ &= -\sin\gamma\int_{t=t_0}^{t=t_0+\mathrm{T}} y\,dx = \frac{\sin\gamma}{2}\int_{t=t_0}^{t=t_0+\mathrm{T}} (x\,dy - y\,dx). \end{aligned}\right.$$

On élimine de ces formules la considération du temps t, pour lui substituer, par exemple, celle de l'arc s décrit par le point mobile, en

supposant le mouvement uniforme et d'une vitesse égale à l'unité. Alors, si l'on compte à la fois les arcs et le temps à partir du point de départ du mobile, le temps t égale l'espace s, et les intégrations se font, par rapport à s, entre le limites $s=0$, $s=S$, S désignant la longueur totale du contour.

284*. — Application à une orbite unicursale; aire du folium de Descartes.

La méthode précédente conduit à de simples intégrations de différentielles rationnelles, entre limites faciles à fixer, quand l'orbite du point mobile est une courbe *unicursale*, puisque alors on peut prendre pour t la variable en fonction de laquelle s'évaluent rationnellement les coordonnées x et y. Il faut seulement avoir soin, quand la courbe forme plusieurs boucles, d'évaluer séparément l'aire contenue dans chacune d'elles; car, si le point décrivant, au lieu de passer de l'une à l'autre en contournant sans cesse la surface totale proposée, même au point multiple où sa largeur s'annule et où les boucles se joignent, l'y traverse au contraire, comme le lui impose ordinairement sa continuité de direction, les aires de deux boucles tracées consécutivement se trouveront affectées de signes différents dans les intégrales $\int x\,dy$, $-\int y\,dx$; de sorte que celles-ci, évaluées pour l'ensemble, n'en représenteront que les sommes algébriques, excédents effectifs de certaines aires sur d'autres.

Les formules deviennent particulièrement simples quand l'orbite est, ou du second degré, et rapportée à une origine en faisant partie, ou du troisième degré et pourvue d'un point double choisi lui-même comme origine. Dans ces deux cas, en effet, le rapport $\frac{y}{x}$ peut servir de variable auxiliaire t (p. 26*); et comme, sous le signe $\int$ du dernier membre de (17), l'expression $x\,dy - y\,dx$ est identique à $x^2 d\frac{y}{x}$, il vient

$$(18)\qquad \text{Aire} = \frac{\sin\gamma}{2}\int_{t=t_0}^{t=t_0+T} x^2 d\frac{y}{x} = \frac{\sin\gamma}{2}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)^2\,dt.$$

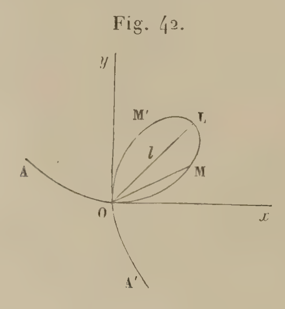
Appliquons, par exemple, cette formule au *folium de Descartes*. C'est la courbe définie, en coordonnées rectangles, par l'équation $x^3+y^3-(l\sqrt{2})xy=0$, et qui, gardant cette équation (pareille en x et y) après l'échange des deux coordonnées x et y dû à une demi-rotation de la courbe autour de la bissectrice de l'angle des xy positifs, est évidemment symétrique par rapport à cette bissectrice. Aussi

l'adoption de celle-ci pour axe des abscisses, avec un axe des ordonnées perpendiculaire, rend-elle aisée la construction de la courbe par points et l'étude des particularités de sa forme. Bornons-nous à faire, ici, $y = tx$ dans l'équation, symétrique en x et y. Il viendra immédiatement, pour x et y,

$$(19) \qquad x = l\sqrt{2}\,\frac{t}{1+t^3}, \qquad y = l\sqrt{2}\,\frac{t^2}{1+t^3}.$$

Quand t varie de zéro à ∞, c'est-à-dire quand le rayon vecteur OM décrit l'angle xOy, ces deux expressions sont positives, finies, continues et, de plus, nulles aux deux limites. Donc le point M y décrit

Fig. 42.



une boucle fermée ou *feuille* OMLM' (qui est, à proprement parler, le *folium de Descartes*), ayant pour longueur OL, suivant son axe, la valeur, l, de $OM = \sqrt{x^2+y^2} = l\,\frac{t\sqrt{2(1+t^2)}}{1+t^3}$ pour l'inclinaison particulière $t = 1$ de OL. Quant aux inclinaisons t négatives, elles donnent respectivement, de $t = 0$ à $t = -1$, et de $t = -\infty$ à $t = -1$, les deux prolongements infinis OA et OA' des deux arcs LMO, LM'O, avec passage brusque de l'un à l'autre, le long de leur asymptote commune normale à OL, à l'instant $t = -1$ où s'annule le dénominateur $1 + t^3$ des expressions (19) de x et y.

Cela posé, évaluons l'aire de la feuille OMM'O. Nous n'aurons qu'à faire, dans le dernier membre de (18), $\sin\gamma = 1$, $t_0 = 0$, $T = \infty$, et à mettre pour x sa valeur (19). Il viendra successivement, par une intégration immédiate,

$$(20) \qquad \text{Aire du } \textit{folium} = l^2\int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2} = \frac{l^2}{3}\left(\frac{-1}{1+t^3}\right)_0^\infty = \frac{1}{3}\,l^2.$$

Donc la surface du folium de Descartes est le tiers du carré construit sur sa longueur comme côté.

285*. — Évaluation des secteurs plans; signification des cosinus et sinus hyperboliques d'un double secteur d'hyperbole équilatère.

Quand un arc d'une courbe plane, unicursale ou non, n'a qu'un seul point sur chacun de ses rayons vecteurs r émanés de l'origine, il suffit de le concevoir parcouru par un point mobile (x, y), dans le sens suivant lequel grandit le rapport $\frac{y}{x} = t$ qui définit la direction du rayon r correspondant, pour que la dernière expression (18), savoir $\frac{\sin\gamma}{2}\int x^2\,dt$, représente, entre deux limites quelconques $t = t_0$, $t = t_1$, le secteur balayé par ce rayon variable r. En effet, si le point mobile, avant de décrire l'arc du secteur, est venu de l'origine le long du rayon vecteur défini par t_0, et qu'après le parcours du même arc il retourne à l'origine le long du rayon vecteur défini par t_1, il aura contourné tout le secteur, dont l'aire sera par suite la somme $\frac{\sin\gamma}{2}\int x^2\,dt$ prise pour tous les éléments du chemin ainsi parcouru; et comme, t se trouvant constant (ou le facteur dt nul) le long des deux rayons vecteurs, aucun élément de l'intégrale ne sera fourni par ces première et troisième parties du trajet, il ne restera que les éléments compris entre $t = t_0$ et $t = t_1$, savoir, en tout, $\frac{\sin\gamma}{2}\int_{t_0}^{t_1} x^2\,dt.$

Supposons actuellement rectangles les coordonnées x, y. Alors l'abscisse x égalera la projection, sur l'axe des x, du rayon vecteur r, et le rapport $\frac{y}{x} = t$ ne sera autre chose que la pente de ce dernier, ou la tangente de son azimut, angle fait par ce rayon vecteur avec l'axe des x positifs. Si l'on appelle θ cet angle, dont r pourra être censé, le long de l'arc, une fonction connue, il viendra par conséquent $x = r\cos\theta$, $dt = d\tang\theta = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$; et, en appelant θ_0, θ_1 les deux valeurs de l'azimut pour les deux valeurs extrêmes t_0, t_1 de t, on aura, au lieu de (18), l'expression, en coordonnées polaires, de l'aire du secteur,

$$\text{(21)} \qquad \text{Aire du secteur} = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2\,d\theta.$$

C'est le résultat auquel on serait directement parvenu en observant que le secteur élémentaire compris entre deux rayons vecteurs consécutifs r, $r + dr$, inclinés l'un sur l'autre de $d\theta$, est assimilable au

triangle construit sur ces deux côtés, et dont l'aire $\frac{1}{2} r(r + dr) \sin(d\theta)$ ne diffère elle-même de $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ que dans un rapport insensible. La somme d'une infinité de secteurs élémentaires pareils se trouve donc bien exprimée par l'intégrale (21), pourvu qu'on leur attribue constamment le signe de $d\theta$, c'est-à-dire qu'on les compte positivement quand ils sont décrits par le rayon vecteur r dans le sens des azimuts croissants, négativement quand ils sont décrits dans le sens contraire. Et il est clair d'ailleurs que le rayon vecteur r peut y faire plus d'un tour, ou la variation totale $\theta_1 - \theta_0$ de l'azimut y dépasser 2π, à la condition de compter, dans l'aire, une même partie du plan, autant de fois qu'elle aura été décrite.

L'intégration, au second membre de (21), se fait immédiatement, non seulement dans le cas du secteur circulaire pour lequel on a $r =$ const., mais dans une infinité d'autres, comme, par exemple, dans celui de la spirale logarithmique, où, r se trouvant de la forme $e^{a\theta}$, la surface comprise depuis le point asymptote, qui correspond à $\theta = -\infty$ (si a est positif), jusqu'à un rayon vecteur quelconque r, sera $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\theta} e^{2a\theta} d\theta = \frac{e^{2a\theta}}{4a} = \frac{r^2}{4a}$.

Il faut remarquer spécialement, à ce point de vue, le cercle et l'hyperbole équilatère, dont l'équation rapportée aux axes, $x^2 \pm y^2 = 1$ (le demi-axe transverse étant choisi comme unité de longueur), permet d'y prendre, pour coordonnées x et y de chaque point d'une branche partie de l'axe des abscisses positives, le cosinus et le sinus, soit naturels (dans le cercle), soit hyperboliques (dans l'hyperbole), d'une même quantité σ. Alors, en effet, le secteur compté à partir des x positifs, savoir $\frac{1}{2}\int_0^{\theta} r^2 d\theta$, s'exprime très simplement au moyen de cette variable auxiliaire σ, qui est, à volonté, le long de la branche de courbe, croissante de zéro à ∞ et décroissante de zéro à $-\infty$. Écrivons-le, d'après la dernière expression (17) [p. 58*], $\frac{1}{2}\int_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma} (x\,dy - y\,dx)$; et portons-y les valeurs $dy = x\,d\sigma$, $dx = \mp y\,d\sigma$, résultant de ce que x et y désignent soit $\cos\sigma$ et $\sin\sigma$, soit $\text{coh}\,\sigma$ et $\text{sih}\,\sigma$. Il viendra $\frac{1}{2}\int_0^{\sigma} (x^2 \pm y^2)\,d\sigma$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\int_0^{\sigma} d\sigma = \frac{\sigma}{2}$. Donc le double du secteur, savoir, l'aire comprise entre la courbe, l'axe transverse tout entier et un rayon vecteur prolongé de part et d'autre du centre, n'est autre chose que la variable auxiliaire σ; ce qu'on savait déjà pour le cercle, où σ

se réduit à l'arc même, θ, dont le cosinus et le sinus sont, par définition, les coordonnées x et y de son extrémité; mais ce qui, dans le cas de la branche considérée d'hyperbole équilatère, montre que les coordonnées x, y y sont de même les cosinus et sinus hyperboliques du double secteur correspondant σ.

L'hyperbole équilatère présente donc une analogie analytique profonde avec le cercle, sinon dans les arcs, du moins dans les secteurs, malgré la disparité des formes; et, grâce à cette analogie, les fonctions coh, sih trouvent, comme on voit, dans l'hyperbole équilatère, une représentation géométrique simple, celle qui leur a justement valu le nom de *fonctions hyperboliques*. L'analogie s'étend d'ailleurs à la fonction tahσ, devenue, semblablement à la tangente naturelle dans le cercle, la pente $\frac{y}{x}$ du rayon vecteur r déterminant le double secteur σ d'hyperbole.

289*. — **Courbe plane dont les arcs sont proportionnels aux surfaces qu'ils limitent au-dessus de l'axe des abscisses; rectification de la chaînette.**

En rapprochant les deux applications que nous avons faites des intégrales définies aux courbes planes rapportées à des axes rectangulaires, savoir, d'une part, le calcul de la surface $\int_a^x y\,dx$ comprise entre ces courbes, l'axe des x, une ordonnée fixe d'abscisse a et une ordonnée mobile d'abscisse x, d'autre part, l'évaluation de l'arc correspondant $\int_a^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$, on peut se demander pour quelle courbe les deux intégrations n'en feraient qu'une, les aires y étant sans cesse proportionnelles aux arcs. Comme, d'ailleurs, le coefficient de cette proportionnalité variera de zéro à l'infini suivant l'unité de longueur adoptée (vu que la mesure d'une même ligne est en raison inverse de la grandeur de l'unité et l'aire d'une même surface en raison inverse du carré de cette grandeur), le rapport constant de l'aire à l'arc deviendra ± 1 par un choix convenable de l'unité dont il s'agit : et l'on pourra de plus rendre positif, s'il ne l'est pas, ce rapport, en renversant le sens de l'axe des y; ce qui laissera invariable l'expression de l'arc, mais changera le signe des y ou celui de $\int_a^x y\,dx$. Ainsi la courbe cherchée devra être telle, que l'aire et l'arc, nuls initialement ou pour $x=a$, soient constamment égaux, c'est-à-dire y croissent de différentielles $y\,dx$ et $\sqrt{1+y'^2}\,dx$ sans cesse pareilles.

En d'autres termes, l'équation de la courbe donnera identiquement $y = \sqrt{1 + y'^2}$ et, par suite, $y^2 = 1 + y'^2$ ou encore, par la différentiation des deux membres, $yy' = y'y''$. Cette dernière équation, écrite $y'(y'' - y) = 0$, exige que l'on prenne soit $y' = 0$, soit $y'' = y$. Or poser $y' = 0$, c'est attribuer à y une valeur constante, que l'équation du problème, $y = \sqrt{1 + y'^2}$, astreint même à égaler l'unité : la courbe n'est donc autre, alors, que la parallèle $y = 1$ à l'axe des abscisses menée à la distance 1 de cet axe, parallèle pour laquelle la surface $\int_a^x y\,dx$, rectangle de hauteur 1, égale bien l'arc correspondant, qui est une de ses bases.

D'autre part, nous savons (t. I, p. 84*) qu'on satisfait à la seconde alternative, c'est-à-dire à l'équation $y'' = y$, par une expression de la forme $y = c \operatorname{coh} x + c_1 \operatorname{sih} x$, c et c_1 désignant deux constantes arbitraires. Portons cette valeur de y, avec celle de y' qui s'en déduit, savoir $y' = c \operatorname{sih} x + c_1 \operatorname{coh} x$, dans l'équation $y^2 = 1 + y'^2$ ou $y^2 - y'^2 = 1$, et, en nous souvenant que la différence entre les carrés d'un cosinus hyperbolique et du sinus hyperbolique vaut l'unité, nous aurons $c^2 - c_1^2 = 1$. Comme il existe des sinus hyperboliques de toutes les grandeurs, depuis $-\infty$ jusqu'à ∞, on peut poser $c_1 = \operatorname{sih} C$; d'où $c = \pm\sqrt{1 + c_1^2} = \pm \operatorname{coh} C$, et aussi

$$y \quad \text{ou} \quad c \operatorname{coh} x + c_1 \operatorname{sih} x = \pm(\operatorname{coh} C \operatorname{coh} x \pm \operatorname{sih} C \operatorname{sih} x) = \pm \operatorname{coh}(x \pm C).$$

En se bornant à désigner par $-C$ la constante arbitraire $\pm C$, on aura donc $y = \pm \operatorname{coh}(x - C)$, et, par suite, $y' = \pm \operatorname{sih}(x - C)$. Enfin l'équation propre du problème, $y = \sqrt{1 + y'^2}$, devenue

$$\pm \operatorname{coh}(x - C) = \sqrt{1 + \operatorname{sih}^2(x - C)} = \operatorname{coh}(x - C),$$

ne sera vérifiée que si l'on adopte les signes supérieurs, c'est-à-dire par la valeur $y = \operatorname{coh}(x - C)$.

Ainsi les courbes répondant à la question sont les diverses positions que prend la courbe $y = \operatorname{coh} x$, symétrique par rapport à l'axe des y, quand on la déplace de quantités arbitraires C parallèlement aux x. Il est clair qu'elle a pour enveloppe, dans ce mouvement, la droite $y = 1$ décrite par son sommet ou point à ordonnée minima $y = 1$, droite qui constituait la première solution du problème posé.

Cette courbe, représentée par l'équation $y = \operatorname{coh} x$, a reçu le nom de *chaînette,* parce qu'elle figure la forme d'équilibre d'un fil flexible homogène, pesant, fixé à ses deux extrémités. L'arc $s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\,dx$,

compté à partir du sommet, y égale donc l'aire

$$\int_0^x y\,dx = \int_0^x \operatorname{coh} x\,dx = \operatorname{sih} x;$$

et, comme $\operatorname{sih} x = \pm\sqrt{\operatorname{coh}^2 x - 1} = \pm\sqrt{y^2 - 1}$, il y existe, entre l'arc et l'ordonnée, la relation simple $s = \pm\sqrt{y^2-1}$, ou

$$(33) \qquad y^2 - s^2 = 1.$$

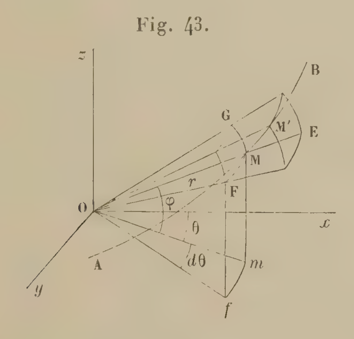
C'est dire que, *dans la chaînette, le carré de l'ordonnée dépasse d'une quantité constante le carré de l'arc.*

290*. — Rectification d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires; application à la spirale logarithmique et à la loxodromie.

L'emploi des coordonnées polaires se trouve tout naturellement indiqué dans l'étude de certaines courbes planes ou gauches, surtout de celles qui coupent sous des angles régis par des lois simples les rayons vecteurs émanés de l'origine; et il y a lieu de voir comment s'y évalueront les arcs.

Pour embrasser la question dans toute son étendue, supposons la courbe proposée AB située d'une manière quelconque dans l'espace,

Fig. 43.



et chacun de ses points, tels que M, défini (t. I, p. 94*) par son *rayon vecteur* OM $= r$, par sa *hauteur angulaire* $\varphi = m$OM, angle $\left(\text{variable entre } \mp \frac{\pi}{2}\right)$ de ce rayon vecteur avec sa projection Om sur un plan horizontal xOy, enfin, par son *azimut* $\theta = x$Om, angle fait avec l'axe horizontal fixe Ox par cette projection Om, et qui peut varier de $-\infty$ à $+\infty$ quand le point M se déplace autour de l'axe vertical

Oz. Les deux équations caractéristiques de la courbe, entre r, φ et θ, détermineront deux de ces coordonnées, en fonction de la troisième prise pour variable indépendante.

Cela posé, un élément d'arc $MM' = ds$ sera la diagonale d'un parallélépipède rectangle à faces, les unes, planes, les autres, infiniment peu courbes, qui appartiendront aux surfaces $\theta =$ const., $\varphi =$ const. et $r =$ const., se croisant, trois en M, et trois en M'. En M, la surface $\theta =$ const. sera le plan mOMGz, la surface $\varphi =$ const., un cône circulaire décrit autour de l'axe Oz avec OM pour génératrice et coupant le plan $\theta =$ const. suivant cette génératrice OME; enfin, la surface $r =$ const. sera une sphère ayant son centre en O, avec OM ou r pour rayon; et elle coupera le plan $\theta =$ const. suivant MG, le cône suivant l'arc circulaire horizontal MF, projeté parallèlement en mf. Les trois arêtes ME, MF, MG mutuellement rectangulaires, ainsi produites, seront d'ailleurs limitées en E, F, G par les surfaces analogues $r =$ const., $\theta =$ const., $\varphi =$ const. menées en M'; et, si l'on appelle dr, $d\theta$, $d\varphi$ les trois accroissements respectifs de r, θ, φ entre M et M', savoir, pour r, la différence OM' — OM ou OE — OM $= \pm$ ME, pour θ, la différence $xOf - xOm = \pm mOf$, et pour φ, la différence fOM' — mOM ou mOG — mOM $= \pm$ MOG, l'on aura, en valeur absolue,

$$(34) \qquad \mathrm{ME} = dr, \qquad \mathrm{MF} \text{ ou } mf = Om \times d\theta = r\cos\varphi\, d\theta, \qquad \mathrm{MG} = r \times \mathrm{MOG} = r\,d\varphi.$$

Enfin, la diagonale MM' du parallélépipède MEFGM', dont la forme diffère infiniment peu de celle d'un parallélépipède rectangle à faces planes, vaudra, à des infiniment petits près d'ordre supérieur et relativement négligeables, la racine carrée de la somme des carrés des trois arêtes ME, MF, MG. Comme elle exprime l'élément ds de l'arc de courbe, il vient donc

$$(35) \qquad ds = \sqrt{dr^2 + r^2\cos^2\varphi\, d\theta^2 + r^2\, d\varphi^2}.$$

Telle est l'expression qu'il faudra, pour rectifier l'arc AB, intégrer entre des limites données, après substitution, à deux des trois variables r, θ, φ et à leurs différentielles, des valeurs fournies par les équations de la courbe en fonction de la troisième variable, seule indépendante, et de sa différentielle.

Quand la courbe est plane, on peut supposer $\varphi = 0$; ce qui donne simplement $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$, comme on sait (t. I, p. 201*). Quand elle est sphérique, ou que tous ses points se trouvent à égale distance du centre O choisi pour origine, une de ses équations, en adoptant

cette distance comme unité de longueur, est $r=1$; et, si l'on prend, par exemple, l'autre équation de la courbe sous la forme $\theta=f(\varphi)$, l'expression de l'arc, entre deux hauteurs angulaires données φ_0, φ, sera $s=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{1+f'(\varphi)^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$.

Traitons directement un exemple simple de ce dernier cas, fourni par la *loxodromie.* On appelle ainsi la trajectoire d'un navire qui, sur la surface de l'Océan (supposée sphérique), coupe successivement sous un même angle tous les cercles méridiens. Alors, Oz étant la ligne des pôles et le plan xOy celui de l'équateur, l'azimut θ devient la *longitude* et, la hauteur φ, la *latitude*. Supposons la courbe parcourue de manière que φ grandisse, et appelons V l'angle constant que fait sa direction en un point quelconque avec l'arc de méridien mené à partir de ce point du côté des latitudes φ croissantes, cet angle étant positif ou négatif suivant que la longitude θ grandit ou décroît. Comme on aura $r=1$ ou, sur la figure ci-dessus, $\mathrm{ME}=0$, le parallélépipède MEFGM$'$ se réduira au rectangle construit sur les deux arêtes $\mathrm{MF}=\pm\cos\varphi\,d\theta$, $\mathrm{MG}=d\varphi$; et l'élément MM$'$ ou ds, devenu la diagonale de ce rectangle, fera l'angle V avec la méridienne MG et l'angle $\frac{\pi}{2}-\mathrm{V}$ avec l'arc de *parallèle* ($\pm$ MF), mené du côté des longitudes θ croissantes. On aura donc

$$(36)\quad \pm\mathrm{MF}\ \text{ou}\ \cos\varphi\,d\theta=\mathrm{MG}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{V}=\mathrm{tang}\,\mathrm{V}.d\varphi,\qquad \mathrm{MG}\ \text{ou}\ d\varphi=ds\cos\mathrm{V}.$$

La première de ces relations donne $d\theta=(\mathrm{tang}\,\mathrm{V})\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$; et, en intégrant dans l'hypothèse qu'on ait fait passer le premier méridien $\theta=0$ par le point où la loxodromie coupe l'équateur, c'est-à-dire de manière à annuler θ pour $\varphi=0$, il vient l'équation finie de la courbe en θ et φ

$$(37)\qquad \theta=(\mathrm{tang}\,\mathrm{V})\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\mathrm{tang}\,\mathrm{V}\log\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

Quant à la seconde relation (36), elle équivaut à poser $ds=\frac{1}{\cos\mathrm{V}}\,d\varphi$; et, par suite, si l'on intègre ds depuis la latitude la plus basse possible $\varphi=-\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire en faisant partir la loxodomie du *pôle* situé sur l'axe des z négatifs, jusqu'au point quelconque dont la latitude est φ, l'on aura

$$(38)\qquad s=\frac{\frac{\pi}{2}+\varphi}{\cos\mathrm{V}}=\frac{2}{\cos\mathrm{V}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

La longueur totale S de la loxodromie, d'un pôle de la sphère à l'autre, s'obtient en faisant $\varphi = \frac{\pi}{2}$: elle est, comme on voit, $S = \frac{\pi}{\cos V}$, quantité finie tant que V ne devient pas infiniment voisin de $\pm\frac{\pi}{2}$, cas limite où la loxodromie comprend successivement tous les *parallèles*. Mais, sauf l'autre cas simple où, par l'annulation de V, S atteint son minimum π longueur d'un demi-grand cercle, cet arc fini $\frac{\pi}{\cos V}$ décrit une infinité de spires autour de chaque pôle, qui est ainsi un *point asymptote* (t. I, p. 203*). En effet, pour les valeurs de φ voisines de la limite, soit inférieure, $-\frac{\pi}{2}$, soit supérieure, $+\frac{\pi}{2}$, la formule (37) fait, respectivement, ou décroître θ vers $-\infty$, ou croître θ vers $+\infty$.

Imaginons que l'on prenne la perspective de la loxodromie sur le plan xOy de l'équateur, l'œil de l'observateur étant placé au pôle situé du côté des z positifs. Toutes les figures tracées sur la sphère se projetteront stéréographiquement sur le tableau xOy sans altération des angles de leurs parties infinitésimales (t. I, p. 278*); et, comme, de plus, les méridiens de la sphère deviendront évidemment, sur le plan xOy, les rayons vecteurs émanés de l'origine, la perspective de la loxodromie sera une courbe plane coupant tous ces rayons vecteurs sous l'angle V, c'est-à-dire une spirale logarithmique décrite autour de l'origine O comme pôle avec son rayon vecteur (d'ailleurs égal à 1 pour $\theta = 0$) exprimé par $e^{\theta \cot V}$ (t. I, p. 204*).

Le point de départ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ de la loxodromie se projettera sur ce pôle O, et, ne se trouvant pas rejeté à l'infini, conservera sur l'image son rôle de point asymptote. Mais les spires de la loxodromie de plus en plus voisines de la seconde extrémité $\varphi = \frac{\pi}{2}$, où est l'œil, se dessineront sur xOy de plus en plus loin du point O, avec une amplification indéfiniment croissante; de sorte que cette seconde extrémité perdra sur l'image son caractère de point asymptote et même n'y figurera pas, rejeté qu'il sera à l'infini.

Cela posé, si l'on observe que chaque triangle rectangle infinitésimal ayant, sur la sphère, pour hypoténuse un élément ds de loxodromie et pour un de ses autres côtés l'élément correspondant $d\varphi$ de méridien, avec V pour angle compris, garde sa forme, dans sa perspective sur le plan xOy où ds devient un élément de la spirale et $d\varphi$ un élément dr de son rayon vecteur, il sera évident que l'arc élémentaire

de spirale logarithmique se trouve, comparativement à l'accroissement correspondant dr de sa distance r au pôle O, dans le même rapport constant $\frac{1}{\cos V}$ que ds et $d\varphi$ sur la sphère ; et il en résultera encore de même, pour l'arc total de spirale logarithmique, compté à partir du pôle O jusqu'au point qui en est distant de r, la longueur $\frac{r}{\cos V}$. C'est bien, en effet, ce que donnera la formule générale $s = \int_{r=0}^{r=r} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$, relative aux courbes planes, si l'on y porte la valeur $e^{\theta \cot V}$ de r avec l'expression corrélative, $(\cot V)\, e^{\theta \cot V}\, d\theta$, de dr ; car il viendra ($\cot V$ étant supposé positif, pour fixer les idées)

$$s = \int_{r=0}^{r=r} \sqrt{\cot^2 V + 1}\; e^{\theta \cot V} d\theta = \frac{1}{\sin V} \left(\frac{e^{\theta \cot V}}{\cot V} \right)_{\theta=-\infty}^{\theta=\theta} = \frac{e^{\theta \cot V}}{\cos V} = \frac{r}{\cos V}.$$

COMPLÉMENT A LA VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

AIRE DE L'ELLIPSOIDE; ÉVALUATION DES VOLUMES ET DES SURFACES COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES.

301*. — Division d'une surface en bandes de pente uniforme; aire de l'ellipsoïde.

Les courbes d'une surface propres à la diviser en bandes élémentaires d'une sommation facile ne sont pas toujours ses intersections par des plans, comme ceux, $x =$ const., qui nous ont servi à cet effet. Si, par exemple, la surface continue proposée a, sur tout son contour, la même pente $\tang\gamma$, relativement au plan des xy ou à un élément superficiel central, supposés horizontaux, il y aura avantage à introduire soit $\tang\gamma$, soit une de ses fonctions, comme variable d'intégration; car alors cette variable, que j'appellerai t, aura la même valeur sur tout le contour, de sorte que l'équation de celui-ci, devenue $t =$ const., se trouvera aussi simple que possible. Et c'est, naturellement par la famille de lignes $t =$ const. que se fera le partage, en bandes, de l'aire proposée. Choisissons pour t le facteur $\frac{1}{\cos\gamma}$, qui, multiplié par la projection horizontale d'un élément superficiel quelconque, donne cet élément, circonstance indiquant bien qu'il doit jouer dans la question un rôle important; et divisons ainsi la surface au moyen des courbes $t =$ const. le long desquelles la déclivité est la même, courbes concentriques, dont la plus intérieure, pour $t = 1$, se réduit au point où la normale est verticale, tandis que la plus extérieure à considérer correspond, si l'aire proposée atteint cette limite, aux éléments verticaux de la surface, c'est-à-dire à ceux où l'on a $\tang\gamma = \infty$, $\cos\gamma = 0$, $t = \infty$. Appelons A la fonction de t exprimant l'aire qu'elles entourent, vues en projection sur le plan horizontal des xy. Il est clair que la bande comprise entre les deux courbes définies par les deux valeurs voisines t, $t + dt$ du paramètre, aura pour projection horizontale la différentielle dA de cette fonction,

et, comme sa pente sera uniforme, son aire elle-même, dans l'espace, égalera $t d\mathrm{A}$. Il viendra donc, en définitive, pour l'aire de la surface jusqu'à ses éléments de pente infinie,

$$\text{Aire} = \int_{t=1}^{t=\infty} t\,d\mathrm{A}. \tag{20}$$

Prenons comme exemple l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, où je suppose $a>b>c$, et soit à évaluer toute sa moitié située d'un même côté du plan des xy. Pour simplifier certaines formules, j'aurai à introduire les excentricités, que j'appellerai respectivement e et ke (avec $k<1$), des deux ellipses d'intersection de la surface par les plans des zx et des zy. Je poserai donc

$$a^2=\frac{c^2}{1-e^2},\quad b^2=\frac{c^2}{1-k^2e^2}\qquad \text{ou}\qquad e^2=1-\frac{c^2}{a^2},\quad k^2e^2=1-\frac{c^2}{b^2}; \tag{21}$$

et l'équation de l'ellipsoïde, multipliée par c^2, s'écrira

$$(1-e^2)x^2+(1-k^2e^2)y^2+z^2=c^2. \tag{22}$$

Les cosinus des angles de la normale avec les axes étant entre eux comme les demi-dérivées partielles $(1-e^2)x$, $(1-k^2e^2)y$, z du premier membre en x, y, z, l'inverse t du troisième $(\cos\gamma)$ vaudra le quotient de $\sqrt{(1-e^2)^2x^2+(1-k^2e^2)^2y^2+z^2}$ par z. Ainsi l'on aura, comme formule reliant t à x, y, z,

$$(1-e^2)^2x^2+(1-k^2e^2)^2y^2+(1-t^2)z^2=0;$$

et, en ajoutant à celle-ci, pour en éliminer z, la précédente (22) multipliée par t^2-1, il viendra l'équation de la projection horizontale des courbes $t=$ const. :

$$(t^2-e^2)(1-e^2)x^2+(t^2-k^2e^2)(1-k^2e^2)y^2=c^2(t^2-1). \tag{23}$$

Ces courbes, sur le plan des xy, sont, comme on voit, des ellipses ayant pour demi-axes $\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-e^2}}\,\frac{c}{\sqrt{1-e^2}}$, $\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-k^2e^2}}\,\frac{c}{\sqrt{1-k^2e^2}}$, c'est-à-dire $a\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-e^2}}$, $b\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-k^2e^2}}$, et, pour surface,

$$\mathrm{A}=\frac{\pi ab(t^2-1)}{\sqrt{(t^2-e^2)(t^2-k^2e^2)}}. \tag{24}$$

La formule (20) devient, par suite,

$$(25)\quad \text{Aire du demi-ellipsoïde} = \pi ab \int_{t=1}^{t=\infty} t\,d\frac{t^2-1}{\sqrt{(t^2-e^2)(t^2-k^2e^2)}} \ (^1).$$

L'intégrale qui figure au second membre représente donc le rapport de l'aire cherchée du demi-ellipsoïde à sa projection horizontale πab. On voit que, dans le cas particulier d'une demi-sphère, où $e=0$, elle se réduit à

$$\int_{t=1}^{t=\infty} t\,d\frac{t^2-1}{t^2} = \int_{t=1}^{t=\infty} t\,d\left(\frac{-1}{t^2}\right) = 2\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} = 2\left(\frac{-1}{t}\right)_1^\infty,$$

c'est-à-dire à la valeur simple 2, déjà trouvée (p. 130). Mais il nous reste à l'obtenir quels que soient e et k (entre zéro et 1).

Une intégration par parties donnera d'abord

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int t\,d\frac{t^2-1}{\sqrt{(t^2-e^2)(t^2-k^2e^2)}} \\ &\quad = \frac{t(t^2-1)}{\sqrt{(t^2-e^2)(t^2-k^2e^2)}} - \int \frac{(t^2-1)\,dt}{\sqrt{(t^2-e^2)(t^2-k^2e^2)}}. \end{aligned} \right.$$

Essayons maintenant de réduire le dernier terme aux intégrales E, F de Legendre, définies plus haut [p. 34*, form. (44)] sous leur *forme canonique*, et, pour cela, effectuons en premier lieu, sur le second membre de (26), une transformation propre à y remplacer le radical $\sqrt{(t^2-e^2)(t^2-k^2e^2)}$ par un autre, $\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$, qui paraît dans cette forme canonique. On y parvient en posant simplement $t=\frac{e}{u}$, de manière que t^2-e^2 et $t^2-k^2e^2$ acquièrent les facteurs, qu'on veut mettre à leur place, $1-u^2$ et $1-k^2u^2$. Grâce à cette substitution de $\frac{e}{u}$ à t $\left(\text{d'où } dt = -\frac{e\,du}{u^2}\right)$, le second membre de (26) devient

$$(27)\quad \frac{1}{eu}\,\frac{e^2-u^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} + \frac{1}{e}\int \frac{(e^2-u^2)\,du}{u^2\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Or, dans (27), le dernier terme se dédouble immédiatement en deux, dont le second est $-\frac{1}{e}\int\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$, et dont le premier,

(1) On doit à M. Catalan (*Journal de Liouville*, t. IV, 1839) cette élégante et immédiate réduction de l'aire de l'ellipsoïde à une intégrale simple, par décomposition en zones élémentaires de pente uniforme. Legendre, auparavant, était arrivé au même résultat, mais par des transformations compliquées.

$e\int \frac{du}{u^2\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$, par l'application de la formule (32) du n° 252* (p. 29*), donne lui-même la somme de deux termes,

$$k^2 e\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} - \frac{e}{u}\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}.$$

Enfin, la relation (26), en réduisant ce dernier terme avec le premier de (27), devient simplement

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\int t\,d\,\frac{t^2-1}{\sqrt{(t^2-e^2)(t^2-k^2e^2)}} \\ \displaystyle\quad = -\frac{u}{e}\,\frac{1-e^2-k^2e^2(1-u^2)}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} + \frac{1}{e}\int\frac{(k^2e^2u^2-1)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \end{cases}$$

Pour avoir la surface entière du demi-ellipsoïde ou plutôt, d'après (25), son rapport à l'ellipse de base πab qui est sa projection horizontale, il faudra prendre le premier membre de (28) entre les limites $t=1$, $t=\infty$, ou, le second, entre les limites $u=e$, $u=0$. Il viendra donc

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\text{Aire du demi-ellipsoïde}}{\pi ab} \\ \displaystyle\quad = \left[\frac{u}{e}\,\frac{1-e^2-k^2e^2(1-u^2)}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\right]_{u=0}^{u=e} + \frac{1}{e}\int_0^e\frac{(1-k^2e^2u^2)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \end{cases}$$

Ici, le premier terme du second membre s'annule à la limite inférieure et vaut $\sqrt{(1-e^2)(1-k^2e^2)}$ ou $\frac{c^2}{ab}$ à la limite supérieure. Quant au dernier terme, vu les expressions canoniques [p. 34*, form. (44)] $\int_0^e \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$ et $\int_0^e \frac{(1-k^2u^2)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$ des deux intégrales de Legendre $F(k, \arcsin e)$, $E(k, \arcsin e)$, il n'est autre chose que $\frac{(1-e^2)F(k, \arcsin e)+e^2E(k, \arcsin e)}{e}$. Ainsi la formule (29) donne en définitive, pour la demi-aire de l'ellipsoïde ayant respectivement les demi-axes $a=\frac{c}{\sqrt{1-e^2}}$, $b=\frac{c}{\sqrt{1-k^2e^2}}$ et c, l'expression

$$(30)\quad \begin{cases} \text{Demi-aire de l'ellipsoïde} \\ \displaystyle\quad = \pi c^2 + \pi ab\,\frac{e^2E(k, \arcsin e)+(1-e^2)F(k, \arcsin e)}{e}. \end{cases}$$

Les fonctions E, F y dégénèrent en d'autres plus simples (p. 48*) dans les deux cas extrêmes $k=0$, $k=1$, qui sont respectivement ceux

d'un ellipsoïde de révolution autour de son grand axe $2a$ et autour de son petit axe $2c$. Il vient, en effet, pour $k=0$,

$$E = F = \text{arc}\sin e = e + \frac{1}{2}\frac{e^3}{3} + \dots \quad \text{(p. 82)},$$

et, pour $k=1$,

$$E = e, \qquad F = \frac{1}{2}\log\frac{1+e}{1-e} = \frac{e}{1} + \frac{e^3}{3} + \dots \quad \text{(p. 78)}.$$

Mais il est particulièrement intéressant de voir à quoi se réduit le second membre de (30) quand les deux excentricités e, ke sont assez faibles pour qu'on puisse négliger la quatrième puissance de e devant l'unité, ou la cinquième puissance de e dans le numérateur de la dernière partie de (30). Alors, en posant $\text{arc}\sin e = \varphi$, les expressions (25) (p. 84) de F et de E, réductibles à leurs deux premiers termes, deviennent, par la substitution permise de φ à $\sin\varphi$ dans les seconds, $\varphi\left(1 \pm \frac{1}{6}k^2\varphi^2\right)$, c'est-à-dire $e\left(1 + \frac{1}{6}e^2 \pm \frac{1}{6}k^2e^2\right)$ après qu'on y a mis $e + \frac{1}{6}e^3$ pour $\text{arc}\sin e$. Et le second membre de (30), si l'on remplace, en outre, a, b par $c\left(1 + \frac{1}{2}e^2\right)$, $c\left(1 + \frac{1}{2}k^2e^2\right)$, sera finalement $2\pi c^2\left(1 + \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{3}k^2e^2\right)$; ce qui, vu les mêmes valeurs approchées de a et b, revient à $2\pi\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$, demi-surface d'une sphère d'un rayon égal à la moyenne arithmétique des trois demi-axes a, b, c. Donc *un ellipsoïde peu excentrique a, très sensiblement, même surface totale qu'une sphère dont le rayon* R *est la moyenne arithmétique de ses trois demi-axes.*

A une approximation plus élevée où l'on tient compte, dans le second membre de (30), des termes de l'ordre de e^4, cette valeur de R doit être remplacée par les quatre cinquièmes de la même moyenne arithmétique plus un cinquième de la moyenne géométrique des trois demi-axes. On le reconnaît en procédant comme on l'a fait au n° 288 (p. 111) pour la rectification approchée de l'ellipse : le mieux, au point de vue de la brièveté des calculs, est d'y employer le développement direct en série, suivant les puissances de e, de l'intégrale figurant dans le dernier terme de (29), au lieu d'y recourir à ceux des fonctions E, F et à la formule (30) ([1]).

([1]) Je crois utile de donner ici ce calcul approché du rayon R d'une sphère équivalente en surface à un ellipsoïde, dans le cas d'excentricités e, ke assez pe-

302*. — Évaluation des volumes et des aires courbes en coordonnées polaires.

Certaines sommations, dont la Leçon prochaine offrira (nº 308*) un important exemple, conduisent à l'emploi des coordonnées polaires

---

tites. Pour simplifier les formules, choisissons le demi petit axe c comme unité de longueur, et posons, par conséquent,

$$(\alpha) \qquad a = (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad b = (1 - k^2 e^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad c = 1.$$

D'après (29), l'aire de l'ellipsoïde sera $2\pi + 2\pi \frac{ab}{e}\int_0^e \frac{(1 - k^2 e^2 u^2)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$, et, en l'égalant à $4\pi R^2$ après y avoir remplacé a, b par leurs valeurs (α), on aura aisément

$$(\beta) \qquad R = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2e\sqrt{(1-e^2)(1-k^2e^2)}}\int_0^e \frac{(1-k^2e^2u^2)\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}}.$$

Développons-y par la formule du binôme, suivant les puissances de u^2, la fonction sous le signe $\int$. Il viendra, en prenant pour la seconde partie du binôme la quantité $-(1+k^2)u^2 + k^2u^4$, dont on développera les puissances successives jusqu'aux termes qui sont, par exemple, de l'ordre de e^6 ou de u^6 inclusivement,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \quad \text{ou} \quad [1-(1+k^2)u^2+k^2u^4]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad = 1 + \frac{1+k^2}{2}u^2 + \frac{3+2k^2+3k^4}{8}u^4 + \frac{5-2k^2+5k^4}{16}(1+k^2)u^6+\ldots; \end{aligned}\right.$$

après quoi l'on trouvera

$$\frac{1-k^2e^2u^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = (\text{les termes ci-dessus}) - k^2e^2u^2 - \frac{k^2}{2}(1+k^2)e^2u^4 - \ldots.$$

Par suite, l'intégrale qui figure sous le radical de (β) a, tous calculs faits, la valeur

$$e\left[1 + \frac{1+k^2}{6}e^2 + \frac{9-34k^2+9k^4}{120}e^4 + \frac{25-66k^2+25k^4}{560}(1+k^2)e^6+\ldots\right],$$

et son quotient par $2e\sqrt{(1-e^2)(1-k^2e^2)}$, ou son produit par

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2e}[1-(1+k^2)e^2+k^2e^4]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad = \frac{1}{2e}\left[1 + \frac{1+k^2}{2}e^2 + \frac{3+2k^2+3k^4}{8}e^4 + \frac{5-2k^2+5k^4}{16}(1+k^2)e^6+\ldots\right], \end{aligned}\right.$$

est

$$(\gamma) \qquad \frac{1}{2} + \frac{1+k^2}{3}e^2 + \frac{4+k^2+4k^4}{15}e^4 + 2\,\frac{4-3k^2+4k^4}{35}(1+k^2)e^6+\ldots.$$

La relation (β) devient donc, après addition de $\frac{1}{2}$ à (γ) et extraction de la

θ, φ, r (*azimut, hauteur angulaire* et *rayon vecteur*) dans le calcul des volumes, parfois même dans celui des aires qui les limitent. Les valeurs des coordonnées rectilignes précédentes x, y, z, en fonction de celles-ci, θ, φ, r, sont, comme on sait (t. I, p. 94*),

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, \qquad y = r\cos\varphi\sin\theta, \qquad z = r\sin\varphi;$$

---

racine carrée (encore par la formule du binôme),

$$(\delta) \qquad R = 1 + \frac{1+k^2}{6}e^2 + \frac{43+2k^2+43k^4}{360}e^4 + \frac{1427-1310k^2+1427k^4}{15120}(1+k^2)e^6 + \ldots.$$

Or, d'une part, la moyenne arithmétique $\frac{1}{3}(a+b+c)$ des demi-axes, ou $\frac{1}{3}\left[(1-e^2)^{-\frac{1}{2}} + (1-k^2e^2)^{-\frac{1}{2}} + 1\right]$, est, de même,

$$(\varepsilon) \qquad \frac{a+b+c}{3} = 1 + \frac{1+k^2}{6}e^2 + \frac{1+k^4}{8}e^4 + \frac{5-5k^2+5k^4}{48}(1+k^2)e^6 + \ldots;$$

d'autre part, la moyenne géométrique $\sqrt[3]{abc}$, ou $[1-(1+k^2)e^2+k^2e^4]^{-\frac{1}{6}}$, a pour développement analogue

$$(\zeta) \qquad \sqrt[3]{abc} = 1 + \frac{1+k^2}{6}e^2 + \frac{7+2k^2+7k^4}{72}e^4 + 7\,\frac{13-10k^2+13k^4}{1296}(1+k^2)e^6 + \ldots;$$

et la formule (δ) devient aisément

$$(\eta) \qquad R = \frac{4}{5}\,\frac{a+b+c}{3} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{abc} - 17\,\frac{2(1-k^2)^2-k^2}{11340}(1+k^2)e^6 - \ldots.$$

C'est donc avec une erreur de l'ordre de e^6 que le rayon R de la sphère équivalente en surface à l'ellipsoïde s'exprime *linéairement* par les deux moyennes arithmétique et géométrique des demi-axes a, b, c. Ainsi, la formule approchée

$$(\theta) \qquad R = \frac{4}{5}\,\frac{a+b+c}{3} + \frac{1}{5}\sqrt[3]{abc}$$

est moins exacte, pour les petites valeurs de e, que la formule analogue (32) [p. 112], c'est-à-dire $2R = 3\,\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$, propre à donner le contour de l'ellipse par celui d'une circonférence $2\pi R$, et dont l'erreur atteint seulement l'ordre de e^8.

Il est dès lors naturel que cette formule (θ) soit plus inexacte aussi pour les fortes valeurs de e. Quelques calculs numériques, faits dans les hypothèses extrêmes $b = c$, $b = a$, c'est-à-dire $k = 0$, $k = 1$, l'ont effectivement démontré. Pour $k = 0$ (ellipsoïde de révolution *allongé*), la formule (θ) donne des résultats approchés *par excès*, conformément à l'indication alors fournie (tant que e est assez petit) par le signe du dernier terme écrit de (η) : l'erreur relative, sur R, y atteint $\frac{1}{16}$ quand $e = \sin 75^\circ = 0,9659$, $\frac{1}{117}$ quand $e = \sin 60^\circ = 0,8660$, enfin, seulement $\frac{1}{950}$ environ quand $e = \sin 45^\circ = 0,7071$. Pour $k = 1$ (ellipsoïde de révolution *aplati*), la même formule (θ) se trouve approchée *par défaut*, comme

et, portées dans l'équation de la surface qui entoure le volume, elles la changent en une relation entre θ, φ, r, déterminant, pour chaque nappe, la grandeur positive r du rayon vecteur en fonction de sa *direction*, définie par les deux angles θ et φ. Voyons comment, au moyen de cette relation, pourront s'exprimer le volume considéré et l'aire qui le limite.

Bornons-nous, pour abréger, au cas simple où il y a ainsi, suivant chaque droite émanée de l'origine, un rayon vecteur $r = f(\theta, \varphi)$ et un seul. Alors θ, φ étant les deux variables indépendantes, menons les plans $\theta =$ const., qui se croisent suivant l'axe polaire Oz (p. 65*, *fig.* 43) et les cônes circulaires $\varphi =$ const., décrits autour de cet axe, avec leur sommet au pôle O. Les uns et les autres décomposeront évidemment tout l'espace en angles solides infiniment aigus, coupés par les sphères $r =$ const. suivant des rectangles légèrement curvilignes pareils à celui dont deux côtés (sur la même figure de la p. 65*) sont $MF = r\cos\varphi\, d\theta$ et $MG = r\, d\varphi$. Il est clair que les portions de ces angles solides limitées par la surface constitueront des sortes de secteurs infiniment effilés, ou de pyramides obliques, dont on pourra, sans modifier leur volume dans un rapport appréciable, rendre la base sensiblement normale aux arêtes latérales, en les transformant en pyramides quadrangulaires droites.

Si, par exemple, M est un point de la surface du corps, le secteur qui aura deux de ses faces de longueur finie suivant OMF, OMG, et les deux autres suivant OGM′, OFM′, pourra n'être pas distingué de la pyramide droite comprise entre les mêmes faces et une base tangente en M à la sphère contenant les arcs MF, MG, base dont l'aire différera infiniment peu de $MF \times MG$. Le volume du secteur élémentaire considéré sera donc $\frac{1}{3} MF \times MG \times OM = \frac{1}{3} r^3 \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi$.

Quant au fragment presque plan de la surface limite qui se trouve compris dans le même angle solide, il est clair que ce sera, à fort peu près, un parallélogramme ayant sa projection, sur le plan tangent

---

l'indique encore le dernier terme écrit de (η), alors égal et contraire à ce qu'il était pour $k = 0$: l'erreur relative y est d'ailleurs $\frac{1}{30}$ quand $e = \sin 75°$, $\frac{1}{157}$ quand $e = \sin 60°$ et $\frac{1}{1060}$ environ quand $e = \sin 45°$.

On voit que la formule approchée (θ) n'entraînera pas une erreur en plus ou en moins supérieure aux 0,002 environ du résultat, sur l'aire $4\pi R^2$ de l'ellipsoïde, quand l'excentricité maxima e ne dépassera pas $\sin 45°$, ou quand le rapport $\sqrt{1-e^2}$ du plus petit axe au plus grand axe excédera $\frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire $\frac{7}{10}$ environ.

dont il s'agit (ou mené en M aux arcs MF, MG), réductible à la base $MF \times MG = r^2 \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi$ de la pyramide droite; de sorte que, si l'on appelle δ l'angle aigu que forme la normale à la surface, en M, tirée vers le dehors, avec le prolongement du rayon vecteur $OM = r$, l'élément de surface courbe compris dans l'angle solide admettra l'expression $\frac{r^2 \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi}{\cos\delta}$. On aura d'ailleurs, pour déterminer cet angle, δ, d'une normale dont les cosinus directeurs ont été appelés $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, avec un rayon vecteur pour lequel les cosinus analogues sont $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, ou $\cos\varphi \cos\theta$, $\cos\varphi \sin\theta$, $\sin\varphi$, la formule

$$\cos\delta = \cos\alpha \cos\varphi \cos\theta + \cos\beta \cos\varphi \sin\theta + \cos\gamma \sin\varphi,$$

dans laquelle $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, après avoir été exprimés, comme on sait le faire, au moyen des coordonnées x, y, z, deviendront, par l'élimination de celles-ci et même de $r = f(\theta, \varphi)$, des fonctions connues de θ, φ.

Ainsi, en résumé, l'on aura, comme éléments respectifs du volume et de l'aire à évaluer,

$$(31) \qquad \text{Élém. de vol.} = \frac{1}{3} r^3 \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi, \qquad \text{Élém. de surf.} = \frac{r^2 \cos\varphi}{\cos\delta}\, d\theta\, d\varphi,$$

où les facteurs $\frac{1}{3} r^3 \cos\varphi$, $\frac{r^2 \cos\varphi}{\cos\delta}$ seront deux fonctions connues des variables indépendantes θ, φ dont ils multiplient les différentielles.

Cela posé, la sommation des éléments se fera, par exemple, en groupant d'abord tous ceux qui composent un même *coin* ou un même *fuseau* compris entre les deux plans méridiens d'azimuts θ et $\theta + d\theta$, éléments pour lesquels θ sera constant et $d\theta$ facteur commun, tandis que la hauteur angulaire φ y croîtra de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$. Il viendra donc, pour un coin ou un fuseau élémentaires d'angle $d\theta$, les valeurs respectives

$$\frac{1}{3}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\varphi\, d\varphi\right) d\theta \quad \text{et} \quad \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2 \cos\varphi}{\cos\delta}\, d\varphi\right) d\theta.$$

Puis l'addition de tous les coins ou fuseaux analogues, dont les azimuts s'échelonneront avec continuité depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$, don-

nera

$$(32)\quad \begin{cases} \text{Volume} = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^3\cos\varphi\, d\varphi\right)d\theta, \\ \text{Surface} = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2\cos\varphi}{\cos\delta}\, d\varphi\right)d\theta. \end{cases}$$

Comme application, bornons-nous au cas simple d'une sphère de rayon R, décrite autour du pôle O comme centre. Il faudra donc faire $r =$ la constante R et, de plus, $\cos\delta = 1$, vu la coïcidence de la normale menée en chaque point de la sphère avec le prolongement du rayon r aboutissant à ce point. Alors, au facteur près R^3 ou R^2 qui sortira des signes $\int$, les intégrations par rapport à φ conduiront simplement à l'intégrale indéfinie $\sin\varphi$, dont l'accroissement, entre les deux limites $\pm\frac{\pi}{2}$, sera 2. Après quoi, $\int_0^{2\pi} d\theta$ étant 2π, il viendra bien respectivement, comme résultats, $\frac{4}{3}\pi R^3$ et $4\pi R^2$.

COMPLÉMENT A LA VINGT-HUITIÈME LEÇON.

SIMPLIFICATION DE CERTAINES INTÉGRALES MULTIPLES, A LIMITES VARIABLES, PAR UN CHANGEMENT DE L'ORDRE DES INTÉGRATIONS, ETC.

307*. — Exemple simple de l'interversion des intégrations, dans un cas où les limites sont variables.

Pour avoir un exemple simple d'une intégrale multiple où l'interversion de deux intégrations successives oblige à modifier les limites, donnons-nous comme champ d'intégration non plus un rectangle à côtés parallèles aux axes, mais l'une des deux moitiés de ce rectangle obtenues en menant la diagonale émanée du sommet qui a les coordonnées x, y les plus petites. En d'autres termes, et l'origine étant censée, pour plus de simplicité, transportée à ce sommet, terminons, par exemple, notre champ triangulaire, d'un côté, à l'axe des y, représenté par $x=0$, et à une parallèle aux x, ayant une ordonnée positive connue $y=\mathrm{H}$, d'autre part, à une droite, d'une équation donnée $y=mx$, issue de l'origine dans l'angle des coordonnées positives; en sorte que y, pour chaque valeur utile de x, ait à croître de mx à H, et x, pour chaque valeur utile de y, depuis zéro jusqu'à la valeur correspondante $\frac{y}{m}$ de l'abscisse sur la droite limite $y=mx$. Celle-ci atteignant d'ailleurs le côté $y=\mathrm{H}$ pour $x=\frac{\mathrm{H}}{m}$, les valeurs les plus fortes de x et de y seront $\frac{\mathrm{H}}{m}$ et H. Si donc $f(x,y)\,dx\,dy$ est l'élément proposé, l'intégrale double exprimant la somme de ses valeurs dans tout le champ triangulaire se présentera, à volonté, sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(8)\qquad \int_0^{\frac{\mathrm{H}}{m}} dx \int_{mx}^{\mathrm{H}} f(x,y)\,dy = \int_0^{\mathrm{H}} dy \int_0^{\frac{y}{m}} f(x,y)\,dx.$$

Le cas le plus important sera celui où le côté $y=\mathrm{H}$ du contour limite s'éloignera à l'infini, et où la fonction $f(x,y)$, qu'on peut regarder comme une fonction de point dans le plan des xy, deviendra assez

petite, aux très grandes distances de l'origine, pour n'y donner que des éléments $f(x, y)\,dx\,dy$ ayant la somme totale de leurs valeurs absolues évanouissante quand leur éloignement grandira. Alors, en effet, l'intégrale tendra vers une limite finie, bien déterminée, même si l'on compte tels éléments qu'on voudra au delà du côté mobile $y = \mathrm{H}$, ou si l'on remplace ce côté du contour par tout arc extérieur y agrandissant le champ; et la formule (8) deviendra

$$(9) \qquad \int_0^\infty dx \int_{mx}^\infty f(x, y)\,dy = \int_0^\infty dy \int_0^{\frac{y}{m}} f(x, y)\,dx.$$

308*. — **Intégrale quadruple réduite à une intégrale triple par l'interversion des intégrations; sommation d'actions ou d'influences exercées aux distances imperceptibles dans un corps, à travers une petite surface plane.**

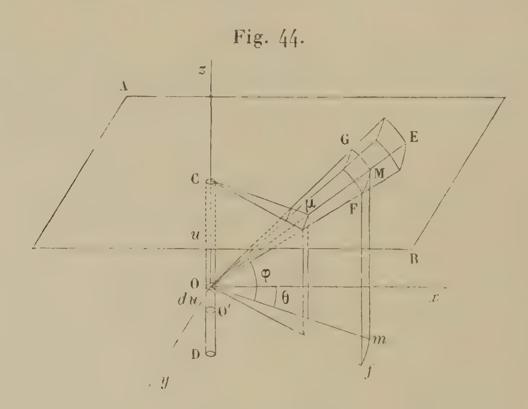
La formule (9) trouve une application intéressante dans le calcul de la somme des actions ou influences d'une même nature (comme rayonnement calorifique de particule à particule, attractions ou répulsions intermoléculaires projetées sur une direction quelconque, etc.) s'exerçant dans un corps à des distances imperceptibles et à travers une petite surface AB (p. 82*) sensiblement plane, c'est-à-dire provenant de la matière située d'un côté de cette surface, au-dessus par exemple, pour atteindre la matière très voisine située de l'autre côté, savoir, au-dessous.

Soit COO′D le filet prismatique ou cylindrique de celle-ci qui se projette sur le plan AB suivant un élément quelconque C, que j'appellerai $d\omega$, de sa surface. Si chaque particule de ce filet éprouve une certaine action de la part des diverses particules très voisines appartenant à la matière située au-dessus de AB, et si, dans la production d'un certain effet, toutes les actions analogues se combinent, comme nous le supposerons, par voie de simple addition algébrique, il pourra évidemment y avoir lieu de faire leur somme, pour l'ensemble des filets CD que limite la surface considérée AB. Nous admettrons d'ailleurs une constitution et un état de la matière pareils autour de tous les éléments $d\omega$ de AB; en sorte que cette somme à évaluer soit simplement proportionnelle à l'étendue de la petite surface AB, supposée avoir ses dimensions incomparablement supérieures à l'épaisseur imperceptible CD, que j'appellerai R, de la couche matérielle influencée à travers la surface AB, épaisseur qui est aussi celle de la couche superposée agissante. En effet, dans ces conditions, et abstraction faite peut-être, sur les bords ou le contour, d'une petite partie,

relativement négligeable, de la couche influencée, tous les filets de celle-ci, tels que CD, seront en rapport avec de pareilles quantités de matière au-dessus de AB, placées de même et de manière à agir de même; ce qui rendra bien l'influence totale à évaluer proportionnelle au nombre des filets, ou à la surface AB. Il suffira donc d'obtenir *l'action par unité d'aire* ou, encore, dite s'exercer *à travers* l'unité d'aire de AB, c'est-à-dire le quotient, par $d\omega$, de celle que supportera, en tout, le filet CD, dont la section est $d\omega$.

Or, pour en former l'expression, il faut, en premier lieu, savoir

Fig. 44.



représenter analytiquement l'influence d'une particule sur une autre. Cette influence, résultant, comme on l'admet, d'une simple addition des influences de tous les atomes de l'une sur tous ceux de l'autre, sera d'abord en raison composée de leurs deux volumes, qui mesurent proportionnellement leurs masses, si du moins nous acceptons, dans cet exercice de calcul, l'hypothèse que la matière soit ou continue, ou formée de molécules pouvant être fictivement, sans modification sensible de leur influence, étalées dans tout l'espace qui les sépare de leurs voisines, comme il arrivera si elles ne laissent entre elles que des vides de dimensions négligeables à côté des distances auxquelles s'exercent moyennement les actions en jeu. La même influence élémentaire dépendra d'ailleurs de ces distances, c'est-à-dire de la droite de jonction, que j'appellerai r, des deux particules; et il lui arrivera souvent de varier avec l'orientation de cette droite. Ce sera quand la matière ne se trouvera pas constituée de même dans toutes les directions, ou encore quand on aura eu besoin, pour rendre homogènes et combinables par addition algébrique les diverses influences élémentaires, de les affecter d'un coefficient de direction, comme est, par

exemple, le cosinus de l'angle de projection lorsqu'il s'agit d'actions mécaniques dont des composantes parallèles sont seules susceptibles de s'ajouter. Si les influences élémentaires à sommer dépendent enfin d'autres circonstances, nous supposerons celles-ci pareilles pour tous les groupes de particules à considérer; ce qui nous permettra d'en faire abstraction.

En résumé, l'influence élémentaire qu'il s'agit d'exprimer sera le produit des volumes des deux particules par une certaine fonction F de la longueur r de leur droite de jonction et de deux angles définissant sa direction dans l'espace.

Or, en général, dans les questions où l'orientation des droites joue un grand rôle, ce sont les coordonnées polaires qui conviennent le mieux. Aussi, ayant d'abord, naturellement, à évaluer l'influence totale subie par un seul élément OO′ du filet CD, de la part de toutes les particules assez voisines situées au-dessus de AB, définirons-nous, dans cette sommation préalable, les points M de ces particules, au moyen de leur rayon vecteur $OM = r$, compté à partir d'un point O de OO′, de leur hauteur angulaire $mOM = \varphi$ $\left(\text{variable entre zéro et } \frac{\pi}{2}\right)$ au-dessus du plan xOy parallèle à AB, et de leur azimut $xOm = \theta$ (compris entre zéro et 2π). Par suite, tandis que, d'une part, l'on aura comme élément du filet CD le tronçon OO′ compris entre deux sections normales situées respectivement aux distances $CO = u$ et $CO' = u + du$ de la base supérieure C, tronçon exprimé (en volume) par $d\omega\, du$, d'autre part, l'élément naturel, ou la particule à considérer, de la couche supérieure exerçant l'action, sera le parallélépipède mixtiligne MEFG que limitent deux surfaces consécutives de chacune des trois familles de surfaces ayant les équations $r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, parallélépipède dont les arêtes, déjà obtenues au n° 290* [form. (34), p. 66*], sont respectivement $ME = dr$, $MF = r\cos\varphi\, d\theta$, $MG = r\, d\varphi$, et dont le volume est, par suite, $r^2 \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi\, dr$.

L'action ou influence élémentaire à sommer égalera donc le produit

$$(10)\qquad (d\omega\, du)\mathrm{F}(r,\ \theta,\ \varphi)\, r^2 \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi\, dr$$

des volumes des deux particules OO′, MEFG, par une fonction donnée $\mathrm{F}(r,\ \theta,\ \varphi)$ des trois coordonnées de la seconde. Cette fonction pouvant être regardée comme nulle quand la distance r dépassera l'imperceptible épaisseur $CD = R$ de la couche influencée, les actions

des particules supérieures à AB dont la distance r à O excédera R seront nulles ou négligeables. Mais il n'y aura aucun inconvénient à les faire figurer fictivement jusqu'à des distances r infinies, dans la somme à obtenir, puisque la présence du facteur $F(r, \theta, \varphi)$ les annihilera; et l'on y trouvera l'avantage d'une plus grande simplicité de la limite inférieure de φ; car cette variable φ, positive dans tout l'espace situé au-dessus de AB, décroîtra de $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à zéro si l'on y considère, assez près de la surface AB, des points M de plus en plus éloignés de O ou de C.

Il pourra être bon, aussi, de supposer la fonction $F(r, \theta, \varphi)$ nulle aux distances r assez petites pour être seulement comparables aux dimensions des vides intermoléculaires, distances où ne reste évidemment plus admissible l'hypothèse de la continuité de la matière, c'est-à-dire de la proportionnalité des éléments de volume aux masses qu'ils contiennent : les influences exercées entre particules contiguës, ou non évaluables par la méthode suivie, et qu'il faudra calculer à part si elles atteignent des valeurs notables, seront, de la sorte, éliminées du résultat, sans qu'on perde le droit, quand une plus grande symétrie ou simplicité des formules le demandera, de faire commencer à $r = 0$ des intégrations ne partant en réalité que de la limite supérieure des très petites distances dont il s'agit.

Cela posé, ajoutons d'abord les actions qu'exerce sur OO′ toute la matière comprise, au-dessus de AB, dans un angle solide indéfini ayant son sommet en O, et constituée par une file rectiligne d'éléments comme MEFG, c'est-à-dire pour lesquels θ, φ, $d\theta$, $d\varphi$ sont constants, tandis que r y croît, au-dessus du plan AB, depuis la valeur $O\mu = \frac{OC}{\cos CO\mu} = \frac{u}{\sin\varphi}$ jusqu'à l'infini. Puis intégrons la somme, par rapport à φ, entre les limites $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, pour ajouter ensemble les effets de toutes les files analogues remplissant, au-dessus de AB, l'angle dièdre des plans zOm, zOf, caractérisés par les azimuts θ, $\theta + d\theta$; après quoi une nouvelle sommation, par rapport à θ, de $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$, totalisera les actions exercées sur OO′ dans tous les azimuts, et devra être encore suivie d'une dernière intégration, en u, entre les limites $u = 0$, $u = R$, pour conduire à l'expression complète de l'influence sollicitant, à travers AB, le filet entier CD, de longueur R. Enfin divisons par $d\omega$ la somme obtenue, en vue de la rapporter, comme on le demande, à l'unité d'aire de la couche influencée ou de la surface AB qui lui sert

de base, et le résultat sera l'intégrale quadruple

$$(11)\qquad \int_0^R du \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_{\frac{u}{\sin\varphi}}^{\infty} F(r,\,\theta,\,\varphi) r^2 dr.$$

L'ordre des intégrations par rapport à θ et à u, puis par rapport à φ et à u, effectuées entre des limites constantes, peut y être, comme on sait (p. 148), interverti sans modifier ces limites; ce qui donne

$$(12)\qquad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^R du \int_{\frac{u}{\sin\varphi}}^{\infty} F(r,\,\theta,\,\varphi) r^2 dr.$$

Avant d'intégrer par rapport à φ et à θ, il y aura donc lieu d'évaluer l'intégrale double $\int_0^R du \int_{\frac{u}{\sin\varphi}}^{\infty} F(r,\,\theta,\,\varphi) r^2 dr$, dans laquelle la constante $\sin\varphi$ sera toujours comprise entre zéro et 1. Or on pourra, sans changement réel, y remplacer la limite supérieure R par ∞; car les éléments $du \int_{\frac{u}{\sin\varphi}}^{\infty} F(r,\,\theta,\,\varphi) r^2 dr$ qu'on ajoutera de la sorte seront nuls, r y étant, sous le signe $\int$, supérieur à la fraction $\frac{u}{\sin\varphi}$, plus grande que $\frac{R}{\sin\varphi}$ ou, *a fortiori,* que R, et, par conséquent, la fonction $F(r,\,\theta,\,\varphi)$ s'y trouvant sans cesse nulle. Alors cette intégrale double aura la forme du premier membre de (9) [p. 81*], sauf le changement de y en r, de x en u et de m en $\frac{1}{\sin\varphi}$; de sorte que la substitution du second membre de (9) au premier donnera, au lieu de (12),

$$(13)\qquad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^{\infty} dr \int_0^{r\sin\varphi} F(r,\,\theta,\,\varphi) r^2 du.$$

Or, cette dernière interversion de l'ordre des intégrations rend effectuable la première d'entre elles sans qu'on ait besoin de connaître la fonction $F(r,\,\theta,\,\varphi)$; car il vient

$$\int_0^{r\sin\varphi} F(r,\,\theta,\,\varphi) r^2 du = F(r,\,\theta,\,\varphi) r^2 (u)_0^{r\sin\varphi} = F(r,\,\theta,\,\varphi) r^3 \sin\varphi.$$

Le calcul de l'influence totale considérée, s'exerçant à travers l'unité

d'aire de la surface AB, se trouve ainsi réduit à celui de l'intégrale triple

$$(14) \qquad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{\infty} F(r, \theta, \varphi) r^3 dr.$$

Si l'on y observe que $\cos\varphi \, d\theta \, d\varphi$ exprime (p. 78*) l'élément naturel $d\sigma$ de surface dans une sphère de rayon 1 décrite autour d'un centre ou pôle de coordonnées polaires θ, φ, r, élément défini, en position, par les valeurs de θ, φ dont dépend le facteur $\sin\varphi \int_0^{\infty} F(r, \theta, \varphi) r^3 dr$, multipliant cet élément $d\sigma$ sous les deux premiers signes $\int$ de (14), et si l'on remarque, en outre, que ces signes $\int$ impliquent des intégrations s'étendant à toute la demi-sphère où les hauteurs angulaires φ sont positives, on pourra écrire encore, au lieu de (14),

$$(15) \qquad \int_{\frac{1}{2}\sigma} \left[\sin\varphi \int_0^{\infty} F(r, \theta, \varphi) r^3 dr \right] d\sigma \quad (\text{pour } \varphi > 0),$$

où l'indice $\frac{1}{2}\sigma$, au bas du premier signe $\int$, signifie, avec l'indication complémentaire $\varphi > 0$, que la sommation relative à σ doit se faire sur toute la demi-sphère $\frac{\sigma}{2}$ caractérisée par des hauteurs angulaires φ positives ([1]).

([1]) Nous obtenons ainsi cette formule (15) comme exprimant, à proprement parler, l'action totale que subit par unité d'aire de sa base, à travers le plan AB, la *couche influencée*, dont le filet CD est en quelque sorte l'élément naturel; et l'on serait conduit à un mode pareil de groupement des actions à sommer, si l'on associait de même toutes les influences émanées, à travers AB, du filet de la *couche agissante* qui est le symétrique de CD par rapport à AB.

Mais, quand on admet, comme il arrive dans le calcul de la *pression* réciproque des deux parties de matière séparées par AB, que l'influence d'un point sur un autre s'exerce *suivant leur droite de jonction*, un autre groupement non moins naturel se présente à l'esprit, et reste d'ailleurs applicable même en dehors d'une telle hypothèse, ou par cela seul que la droite en question peut toujours servir à caractériser l'une des actions élémentaires dont on s'occupe. Ce mode de groupement, qui conduit peut-être un peu plus vite à la formule (15), consiste à associer ou à sommer *les influences correspondant aux droites de jonction qui traversent un même élément, $d\omega$, de la surface* AB. *Fixons* alors au centre C de $d\omega$ le pôle O des coordonnées angulaires θ, φ, qui était précédemment *mobile* de C à D; puis, ayant décrit autour de C, au-dessus de AB, la demi-sphère $\frac{1}{2}\sigma$, de rayon 1, dont $d\sigma$ sera l'élément pour une hauteur et un azimut donnés φ, θ, considérons, dans la couche influencée ou inférieure à AB, le cône infiniment aigu qui, prolongé au delà de son *sommet* C, a $d\sigma$ pour section droite. Un élément

Les formules (14) ou (15), dans lesquelles la fonction F sera prise égale à zéro pour les valeurs de r seulement comparables à l'intervalle de deux molécules contiguës, ne comprendront pas les influences ou actions exercées à d'aussi faibles distances r; et ces actions, évidemment inévaluables à la manière d'intégrales ou en supposant la matière continue, ne pourront, en général, se calculer qu'une à une, pour donner un total qu'il faudra, comme on a vu [p. 84*], joindre à (14) ou à (15), s'il est sensible. Mais la formule (14), par exemple, suffisante aux autres distances, sera surtout exacte aux plus grandes qu'il y ait lieu de considérer.

Elle permet de reconnaître, par exemple, que, *si la fonction* F *ne s'annule pas identiquement pour* $r > \mathrm{R}$, *mais y devient seulement insensible en gardant le même signe et tendant asymptotiquement vers zéro* (ce qui paraît plus conforme aux lois naturelles d'unité et de continuité), *son décroissement devra se faire plus vite qu'en raison inverse de la quatrième puissance* r^4 *de la distance;* sans quoi les influences dont on parle ne seraient pas, comme on l'admet, localisées effectivement près de la surface AB. En effet, dans tout mode de dé-

---

de ce cône massif sera, entre les distances ρ, $\rho + d\rho$ de C, $\rho^2 d\sigma d\rho$. Or l'action subie, *à travers* $d\omega$, par une partie infiniment petite $d\varpi$ de cet élément, proviendra évidemment du fragment de la couche agissante compris dans un second cône très aigu ayant cette partie $d\varpi$ pour sommet et $d\omega$ pour section oblique menée, suivant AB, à la distance ρ du sommet, ou $d\omega \sin\varphi$ pour section droite à cette même distance ρ; ce qui donne pour son élément de volume, entre les distances r, $r + dr$ du sommet $d\varpi$, l'expression $\frac{d\omega \sin\varphi}{\rho^2} r^2 dr$, et, pour l'action totale *subie par* $d\varpi$ *à travers* $d\omega$,

$$d\varpi \frac{d\omega \sin\varphi}{\rho^2} \int_\rho^\infty \mathrm{F}(r, \theta, \varphi) r^2 dr.$$

Divisons celle-ci par $d\varpi\, d\omega$, afin de la rapporter à l'unité de volume de la matière influencée, ainsi qu'à l'unité d'aire de la surface AB. Il ne restera plus ensuite qu'à multiplier le résultat par l'élément de volume $(d\sigma)\rho^2 d\rho$ de la couche influencée, puis à intégrer dans toute l'étendue $\int_{\frac{1}{2}\sigma} d\sigma \int_0^\infty \rho^2 d\rho$ de cette couche, pour avoir la somme demandée

$$\int_{\frac{1}{2}\sigma} d\sigma \left[\sin\varphi \int_0^\infty d\rho \int_\rho^\infty \mathrm{F}(r, \theta, \varphi) r^2 dr \right].$$

Elle devient bien identique à (15), en y changeant, au moyen de la formule (9), l'ordre des deux intégrations par rapport à r et à ρ, ce qui rend celle-ci effectuable.

croissement de F qui ne serait pas plus rapide que celui de la fonction $\frac{1}{r^4}$, le rapport de $F(r)$ à $\frac{1}{r^4}$ ne tendrait pas vers zéro ou, pour $r > R$, se maintiendrait supérieur à une certaine quantité finie k : et l'on aurait

$$\int_R^\infty F(r, \theta, \varphi) r^3 dr > \int_R^\infty \frac{k}{r^4} r^3 dr = k(\log r)_R^\infty = \infty;$$

de sorte que la substitution, dans (14), de l'infini à la véritable limite supérieure R de l'intégration effectuée par rapport à r, ne serait pas insignifiante comme l'exige la nature de la question.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

RÉDUCTION ET TRANSFORMATION DES INTÉGRALES MULTIPLES; ÉVALUATION APPROXIMATIVE, PAR CES INTÉGRALES, DES RESTES DE CERTAINES SÉRIES, ETC.

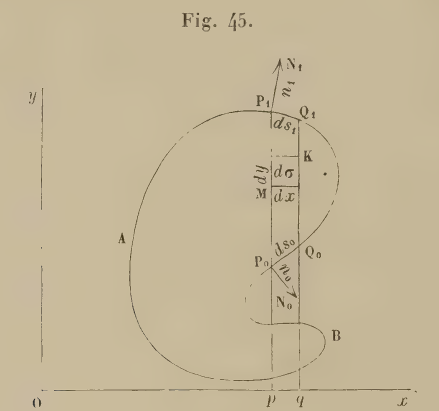
313*. — **Réduction des intégrales prises dans tout l'intérieur d'une surface ou d'un volume à d'autres ne se rapportant qu'aux limites de ces étendues, quand une des intégrations s'y effectue immédiatement.**

Lorsqu'une des intégrations indiquées dans une intégrale multiple s'effectue immédiatement, comme nous avons vu qu'il arrivait, soit pour l'aire d'une surface plane exprimée par une intégrale double $\int\int dx\,dy$, soit pour un volume exprimé au moyen d'une intégrale triple $\int\int\int dx\,dy\,dz$, il est évident que la variable par rapport à laquelle on fait cette intégration ne reçoit plus, dans le résultat, que ses valeurs extrêmes correspondant à chaque système ou combinaison de valeurs des autres variables. On peut donc dire qu'une telle intégrale, ainsi réduite à un ordre moins élevé, ou dans laquelle disparaît un signe $\int$, se transforme en une autre *prise aux limites de la première,* c'est-à-dire telle, que les valeurs simultanées reçues, dans ses éléments, par les diverses variables $x, y, \ldots$, sont uniquement celles qui s'observaient aux limites de l'intégrale proposée. Or, quand celle-ci est seulement double ou triple et a, par conséquent, son champ d'intégration susceptible d'être figuré au moyen d'une surface ou d'un volume, sa valeur, considérée comme une intégrale simple ou double ayant elle-même pour champ tout le contour ou toute l'aire qui limite cette surface ou ce volume, admet une forme remarquable, souvent utilisée dans les sciences physico-mathématiques, et qu'il importe de connaître.

Pour la chercher d'abord dans le cas le plus simple, bornons-nous à une intégrale double, dont nous écrirons l'élément $\frac{df(x,y)}{dy}\,dx\,dy$, afin qu'une des deux intégrations, celle qui doit avoir lieu, par exemple, en y, s'y effectue immédiatement. Imaginons que x, y désignent les coordonnées rectangulaires des divers points d'un plan xOy, et que $f(x, y)$ exprime une certaine fonction de ces deux

coordonnées, ou *fonction de point*, recevant des valeurs parfaitement déterminées, finies et continues, aux divers endroits (x, y) situés dans le champ de l'intégrale. Enfin soit $AP_1Q_1Q_0P_0BA$ le contour, que je désignerai par s, de ce champ σ, dont j'appellerai $d\sigma$, pour abréger, les éléments rectangulaires $dx\,dy$, tels que MK. Nous savons que l'intégrale proposée $\int\int \frac{df(x,y)}{dy}\,dx\,dy$ pourra s'écrire, d'une manière plus concise, $\int_\sigma \frac{df(x,y)}{dy}\,d\sigma$, et qu'elle exprimera la somme, étendue à

Fig. 45.



tout le champ σ, des produits d'éléments $d\sigma$ de celui-ci, infiniment petits en longueur et largeur, mais de formes d'ailleurs arbitraires, par les valeurs respectives que prend en un quelconque de leurs points la fonction $\frac{df(x,y)}{dy}$; car, comme nous avons eu plusieurs fois l'occasion de l'observer, une telle somme comprendra, de toute manière, les mêmes éléments $d\sigma$, en bloc ou fragmentés, qui, seulement, se trouveront multipliés, dans les divers modes de division, par des valeurs de la fonction sous le signe $\int_\sigma$ un peu différentes, mais pas assez pour entraîner, à la limite, aucun écart fini dans les résultats.

Cela posé, et la division en éléments étant censée faite au moyen des deux systèmes de droites, $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, parallèles aux axes, additionnons d'abord les éléments $\frac{df}{dy}\,dx\,dy$ qui se rapportent à la portion continue de σ comprise entre deux ordonnées consécutives quelconques pP_1, qQ_1, caractérisées par les abscisses x, $x + dx$, et deux arcs élémentaires du contour, P_1Q_1, P_0Q_0. Dans toute cette

étendue, x, dx sont constants, et y croît depuis l'ordonnée pP_0, que j'appellerai y_0, jusqu'à l'ordonnée pP_1, que j'appellerai y_1. La somme sera donc

$$(18)\quad dx \int_{y_0}^{y_1} \frac{df(x,y)}{dy} dy = dx\,[f(x,y)]_{y=y_0}^{y=y_1} = f(x,y_1)\,dx - f(x,y_0)\,dx.$$

Or concevons qu'on tire, aux divers points du contour, en P_0 et P_1 par exemple, la normale P_0N_0 ou P_1N_1 à ce contour, *en la menant vers l'extérieur du champ σ d'intégration:* nous la désignerons, d'une manière générale, par n. Au point P_0, correspondant à la limite inférieure, cette normale fera évidemment un angle obtus avec la parallèle P_0P_1 aux y positifs, car elle s'y dirigera du côté des y négatifs où ne s'étend pas le champ σ : au contraire, en P_1, point où le champ est borné dans le sens des y positifs, la normale extérieure n fera un angle aigu avec la même parallèle P_0P_1 prolongée.

Nous représenterons par $\cos(n, y)$ le cosinus, négatif dans le premier cas, positif dans le second, de cet angle de la normale n avec les y positifs. Et, comme d'ailleurs l'angle en question est l'égal ou le supplémentaire de celui (ayant ses côtés normaux aux siens) du petit arc correspondant P_0Q_0 ou P_1Q_1 avec Ox, c'est par la valeur absolue de $\cos(n, y)$ qu'on devra, dans chaque cas, multiplier l'arc élémentaire *limite* ds, c'est-à-dire P_0Q_0 ou P_1Q_1, pour avoir sa projection sur Ox, distance mutuelle $pq = dx$ des deux ordonnées considérées pP_1, qQ_1. Si donc nous appelons n_1 la normale P_1N_1, n_0 la normale P_0N_0, ds_1 l'élément P_1Q_1 du contour, ds_0 l'élément P_0Q_0, il viendra

$$(19)\qquad dx = \cos(n_1, y)\,ds_1 = -\cos(n_0, y)\,ds_0.$$

Portons ces deux valeurs de dx, respectivement, dans les deux termes du troisième membre de (18); et nous aurons, pour ce troisième membre, l'expression symétrique

$$f(x, y_1)\cos(n_1, y)\,ds_1 + f(x, y_0)\cos(n_0, y)\,ds_0.$$

Donc la somme cherchée $\int_\sigma$, pour une bande $P_0Q_0Q_1P_1$, comprise entre les éléments P_0Q_0 et P_1Q_1, ou ds_0 et ds_1, du contour, égale la somme des deux valeurs que reçoit sur ces éléments l'expression $f(x,y)\cos(n,y)ds$. Comme il en serait évidemment de même pour les autres parties analogues de l'intégrale proposée, le résultat total s'écrira $\int f(x,y)\cos(n,y)\,ds$.

La somme $\int$ ne s'y présente, il est vrai, que comme concernant les éléments ds du contour qui ne sont pas parallèles aux y et qui, par

suite, servent de limite inférieure ou supérieure à quelque bande, comme $P_0Q_0Q_1P_1$, du champ σ : mais on peut l'étendre, sans inconvénient, aux éléments ds parallèles à Oy; car les termes

$$f(x,y)\cos(n,y)\,ds$$

ainsi introduits seront annulés par le facteur $\cos(n,y)$, égal à zéro quand la normale est perpendiculaire aux y. Ainsi l'intégrale obtenue, relative à tout le contour s, sera $\int_s f(x,y)\cos(n,y)\,ds$; et un raisonnement déjà bien des fois répété prouve d'ailleurs que celle-ci gardera la même valeur, de quelque manière que s'y fasse la division du contour s en éléments infiniment petits ds, ou, encore, quel que soit le point (x,y) de chacun d'eux pour lequel on évalue le facteur $f(x,y)\cos(n,y)$, fonction déterminée de (x,y), c'est-à-dire de l'arc s.

En résumé, si l'on joint à la formule trouvée celle, de même nature, que l'on a quand l'intégration immédiatement effectuable s'opère par rapport à x, il vient, pour le cas des intégrales doubles, les deux relations cherchées

$$(20)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\sigma \frac{df(x,y)}{dx}\,d\sigma = \int_s f(x,y)\cos(n,x)\,ds, \\ \displaystyle\int_\sigma \frac{df(x,y)}{dy}\,d\sigma = \int_s f(x,y)\cos(n,y)\,ds. \end{cases}$$

Appliquons maintenant le même procédé à une intégrale triple, dont l'élément, pris, par exemple, de la forme $\frac{df(x,y,z)}{dz}dx\,dy\,dz$, se rapporte à tous les parallélépipèdes rectangles infinitésimaux $dx\,dy\,dz$ d'un volume donné, que j'appellerai ϖ, et que limitera une surface désignée par σ : cette intégrale, où l'intégration en z est immédiatement effectuable, pourra aussi, pour des raisons maintenant bien connues, s'écrire $\int_\varpi \frac{df(x,y,z)}{dz}d\varpi$, les différentielles $d\varpi$ du champ ϖ d'intégration étant des volumes infiniment petits en tous sens et de formes quelconques. Réduisons-les, comme il est permis de le faire, à celles, d'expression $dx\,dy\,dz$, que donnent les trois systèmes de plans $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, $z = \text{const.}$; et faisons la somme de tous les éléments $\frac{df}{dz}dx\,dy\,dz$ se rapportant à un même filet prismatique continu, de section $dx\,dy$ et parallèle aux z, terminé inférieurement et supérieurement à deux éléments $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ de la surface limite du volume. Si z_0, z_1 sont les valeurs extrêmes correspondantes de z, il

viendra

$$(21)\quad dx\,dy\int_{z_0}^{z_1}\frac{df(x,y,z)}{dz}\,dz=f(x,y,z_1)\,dx\,dy-f(x,y,z_0)\,dx\,dy.$$

Or $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ se projettent (p. 127) sur le plan des xy sous les mêmes angles que s'ils étaient situés sur les plans tangents menés à la surface σ en (x, y, z_0) ou en (x, y, z_1), angles égaux ou supplémentaires à ceux, que nous appellerons en général (n, z), de la normale menée à σ *extérieurement*, aux mêmes endroits, avec l'axe des z positifs, et dont l'un, en (x, y, z_1), est évidemment aigu, tandis que le second, en (x, y, z_0), est obtus. La projection commune $dx\,dy$, essentiellement positive, de $d\sigma_0$ et de $d\sigma_1$ sur le plan des xy, admet donc la double expression $\cos(n_1, z)\,d\sigma_1$ et $-\cos(n_0, z)\,d\sigma_0$; ce qui permet de donner au second membre de (21) la forme symétrique

$$f(x,y,z_1)\cos(n_1,z)\,d\sigma_1+f(x,y,z_0)\cos(n_0,z)\,d\sigma_0.$$

On raisonnera de même pour tous les autres filets rectangulaires, parallèles aux z, qui composent le champ ϖ de l'intégrale triple; et celle-ci deviendra finalement $\int_\sigma f(x,y,z)\cos(n,z)\,d\sigma$, la somme $\int_\sigma$ s'étendant à tous les éléments $d\sigma$ de la surface limite. L'on peut y comprendre, en effet, ceux qui, parallèles aux z, ne serviraient pas d'extrémité à des filets; car il s'y annulerait le facteur $\cos(n, z)$ qui est, comme $f(x, y, z)$, une certaine fonction de x, y, z, du moins sur toute l'étendue de σ.

Donc, en joignant à la formule ainsi obtenue les deux pareilles qu'on aurait si l'intégration immédiatement effectuable était relative aux variables x ou y, il viendra

$$(22)\quad \begin{cases}\displaystyle\int_\varpi \frac{df}{dx}\,d\varpi=\int_\sigma f\cos(n,x)\,d\sigma,\\[2mm] \displaystyle\int_\varpi \frac{df}{dy}\,d\varpi=\int_\sigma f\cos(n,y)\,d\sigma,\\[2mm] \displaystyle\int_\varpi \frac{df}{dz}\,d\varpi=\int_\sigma f\cos(n,z)\,d\sigma.\end{cases}$$

314*. — De la transformation des intégrales multiples : méthode analytique, exposée sur un exemple, et interprétée géométriquement.

Quand il y a lieu de substituer, à la variable x d'intégration d'une intégrale définie simple $\int_a^b f(x)\,dx$, une autre variable, t, liée à x par

une relation continue $x = \varphi(t)$, et que l'on a eu soin de prendre des limites assez peu éloignées pour que t varie sans cesse dans un même sens pendant que x va de a à b, la transformation ne présente aucune difficulté. En effet, chaque élément $f(x)\,dx$ devient $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ et la somme de tous les éléments pareils, obtenus en faisant changer graduellement t depuis la valeur, t_0, qui correspond à x_0, jusqu'à la valeur, t_1, correspondant à x_1, est toujours $\int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$. Mais la question devient plus complexe quand l'intégrale proposée est multiple, et qu'il s'agit d'y remplacer les variables d'intégration, $x, y, \ldots,$ par d'autres dont plusieurs entrent à la fois dans l'expression de x, ou de y, etc.

Pour faire comprendre, de la manière la moins abstraite possible, comment se résoudra ce problème, je traiterai directement un exemple simple, qu'il est d'ailleurs nécessaire de connaître, et qui, tout en fixant les idées, nous éclairera suffisamment sur la marche générale à suivre.

Soit une intégrale double de la forme $\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(x,y)\,dy$, où la fonction sous le signe $\int$, $f(x, y)$, est supposée tendre assez vite vers zéro, quand x ou y grandissent, pour que tous les éléments $f(x,y)\,dx\,dy$ correspondant aux valeurs très élevées de x et de y aient, entre des limites quelconques ou sur des étendues quelconques, une somme insignifiante; ce qui assure évidemment à l'intégrale une valeur finie bien déterminée. On l'écrit encore, d'une manière un peu plus brève, $\overline{\int\int}_0^\infty f(x,y)\,dx\,dy$. Proposons-nous d'y faire figurer, au lieu de x et y, deux nouvelles variables, r et θ, liées à x et à y par les deux relations $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ou, en d'autres termes, de substituer des coordonnées polaires r et θ à x et à y, considérées comme des coordonnées rectangles dans le plan xOy (p. 95*).

On voit que chaque élément de l'intégrale, $f(x,y)\,dx\,dy$, s'obtient en multipliant l'aire, $dx\,dy$, d'un rectangle élémentaire MNN'M' du plan, par la valeur $f(x,y)$ de la fonction en un point de ce rectangle, point pour lequel on choisit, d'ordinaire, son *premier* sommet, M, c'est-à-dire son sommet ayant les coordonnées les plus petites, x, y. Et l'intégrale entière, où x et y croissent de zéro à l'infini, est la somme, $\int_\sigma f(x,y)\,d\sigma$, des produits pareils dans tout le *champ* σ constitué par l'angle xOy des coordonnées positives.

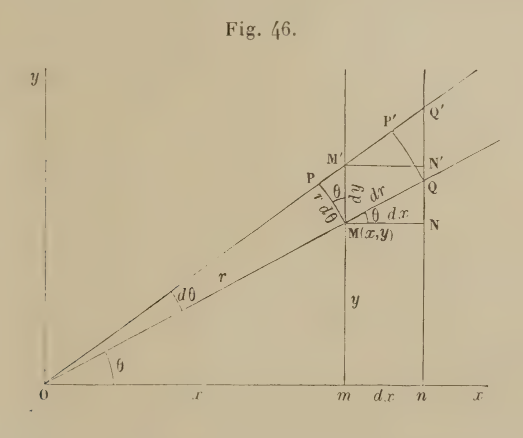
Procédons à la transformation. Dans la question proposée, il s'a-

git, en premier lieu, d'intégrer, depuis $y=0$ jusqu'à $y=\infty$, l'expression $f(x, y)\, dx\, dy$, sans faire varier ni x, ni dx. Comme il faut évidemment, pour ne rien compliquer, remplacer y par une expression où il n'y ait qu'*une seule* variable qui change, *nous exprimerons y en fonction* d'une des nouvelles coordonnées, θ par exemple, *et des variables qui ne changent pas actuellement,* c'est-à-dire de x. Donc il faudra, des deux équations données $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, tirer y en fonction de x et de θ, ce qui donne $y=x\operatorname{tang}\theta$; puis, x conservant sa valeur actuelle positive et dy étant ainsi égal à $x\,d\operatorname{tang}\theta=\dfrac{x\,d\theta}{\cos^2\theta}$, on fera croître y et, par suite, $\operatorname{tang}\theta$, de zéro à ∞, ou θ de zéro à $\frac{\pi}{2}$. La somme à évaluer deviendra

$$(23) \qquad \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} f(x, x\operatorname{tang}\theta)\,\frac{x\,d\theta}{\cos^2\theta}\,dx.$$

Il est aisé d'interpréter géométriquement cette expression, où $d\theta$ désigne l'accroissement, MOM', éprouvé par θ le long de $MM'=dy$. Pendant que, d'un bout à l'autre de l'ordonnée mM prolongée, y grandit de zéro à l'infini, il y a ainsi, successivement, une infinité de valeurs de θ qui se présentent, et chacune d'elles caractérise un rayon vec-

Fig. 46.



teur, tel que OM ou OM', dont l'équation est $\theta=$ const. Or on voit que deux rayons vecteurs consécutifs, OMQ et OM'Q', interceptent entre les deux ordonnées fixes indéfinies mM, nN, d'abscisses x et $x+dx$, des surfaces élémentaires MM'Q'Q, assimilables à des parallélogrammes équivalents aux rectangles primitifs MM'N'N, comme

ayant avec eux un côté $MM' = dy$ commun et le côté opposé, QQ' ou NN', sur une même parallèle au premier. Et chacune de ces petites surfaces se trouve d'ailleurs parfaitement définie au moyen des quatre quantités x, θ, dx, $d\theta$, c'est-à-dire au moyen des paramètres x, θ, $x + dx$, $\theta + d\theta$, caractérisant ses quatre côtés.

Ainsi, maintenant que les variables sont x et θ, au lieu de x et y, l'élément naturel du champ de l'intégrale n'est plus précisément le rectangle, $dx\,dy$, limité par des côtés ayant leurs équations de la forme $x =$ const., $y =$ const., mais la figure exprimée par $\frac{x\,d\theta\,dx}{\cos^2\theta}$, ou d'aire égale, dont les côtés MM', QQ', MQ, $M'Q'$ sont représentés par les équations analogues $x =$ const., $\theta =$ const. La somme obtenue (23) correspond toujours à la surface totale de la bande élémentaire de largeur dx, comprise entre les deux ordonnées indéfinies mM', nQ' : seulement, cette bande se trouve divisée en parallélogrammes élémentaires dont les côtés non parallèles aux y s'orientent tous vers l'origine O.

Et comme, d'ailleurs, l'intégration par rapport à θ, effectuée entre $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, donne le même résultat quels que soient les intervalles $d\theta$, égaux ou inégaux, pourvu qu'ils restent infiniment petits, on pourra les supposer les mêmes dans toutes les bandes élémentaires parallèles aux y, afin que les rayons vecteurs OQ, OQ', ... déjà tracés pour diviser la bande $mnQ'M'$ en parallélogrammes élémentaires, remplissent aussi le même rôle dans toutes les autres.

Reprenons actuellement la transformation analytique de l'intégrale, devenue, d'après (23),

$$\int_{x=0}^{x=\infty} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} f(x,\, x \operatorname{tang}\theta)\, \frac{x\,dx\,d\theta}{\cos^2\theta},$$

et où il nous reste à remplacer l'ancienne variable x par la nouvelle, non encore introduite, r. Or, pour éliminer x, nous n'aurons qu'à procéder comme nous l'avons fait pour éliminer y. Nous supposerons, par conséquent, qu'on effectue d'abord l'intégration par rapport à x, dans laquelle on ne fait pas varier θ, ni $d\theta$; ce qui reviendra à grouper ensemble les parallélogrammes $MQQ'M'$ compris, non plus entre deux ordonnées mM', nQ', mais entre deux rayons vecteurs OQ, OQ' d'azimuts θ, $\theta + d\theta$, parallélogrammes remplissant l'espace QOQ', de longueur indéfinie. Donc, dans la valeur de x, qui est $r\cos\theta$, θ, compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, ne changera pas, et il viendra

$$dx = (\cos\theta)\,dr, \qquad x\,dx = (\cos^2\theta)\,r\,dr.$$

De plus, r croissant, comme x, de zéro à l'infini, les éléments de l'intégrale, pour la bande angulaire QOQ′, auront la valeur totale

$$\int_{r=0}^{r=\infty} f(r\cos\theta,\ r\cos\theta\tang\theta)\,\frac{\cos^2\theta\,.\,r\,dr\,d\theta}{\cos^2\theta},$$

ou, en simplifiant, $\displaystyle\int_{r=0}^{r=\infty} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$

Il n'y aura ensuite qu'à effectuer l'intégration par rapport à θ, de zéro à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire la sommation pour toutes les bandes angulaires comprises dans l'angle xOy; ce qui donnera la formule cherchée,

$$(24)\qquad \overline{\int\int}_{0}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,dr.$$

Interprétons encore géométriquement notre dernière transformation, de x en r, comme nous avons fait plus haut celle de y en θ. Si nous observons que, pour θ constant, mais pour x croissant de $mn = dx$, l'augmentation dr du rayon vecteur est celle, MQ, éprouvée par OM, et que, en outre, le produit $r\,d\theta$ vaut l'arc élémentaire MP, de rayon r, décrit, avec l'origine comme centre, entre les deux côtés de l'angle $\mathrm{QOQ'} = d\theta$, nous reconnaîtrons que la nouvelle expression $r\,dr\,d\theta$ ou $r\,d\theta\,dr$, trouvée pour l'aire $\dfrac{x\,dx\,d\theta}{\cos^2\theta}$, n'est autre que le produit (MP)(MQ), c'est-à-dire, sauf erreur négligeable, la surface MQP′P comprise entre les deux rayons vecteurs OQ, OQ′ et les deux arcs MP, QP′ des cercles qui ont les rayons vecteurs constants r, $r+dr$, ou dont les équations sont de la forme $r = \text{const.}$ Il est évident, en effet, que le parallélogramme MQQ′M′ et le rectangle MQP′P sont équivalents, puisqu'ils ont base commune MQ, et les côtés opposés M′Q′, PP′ sur une même droite, sensiblement parallèle à cette base.

Ainsi, *l'effet de chaque transformation est de substituer, au précédent élément du champ d'intégration, un élément équivalent, mais exprimé en fonction de la nouvelle variable et de sa différentielle, ou, ce qui revient au même, borné par deux nouvelles limites dont les équations s'obtiennent en égalant à deux constantes infiniment voisines la nouvelle variable, au lieu des deux limites analogues relatives à l'ancienne variable éliminée : quant aux autres limites, qui correspondent aux anciennes variables conservées, elles y subsistent et s'y trouvent employées dans tout l'espace com-*

pris entre leurs intersections les unes par les autres ou par les nouvelles.

On sait d'ailleurs que, dans chaque espace angulaire tel que QOQ′, l'intégrale aura la même valeur totale quelles que soient les valeurs successives, OM, OQ, ... de r, pourvu qu'elles se suivent à des intervalles infiniment petits. On prendra donc ces valeurs pareilles dans tous les espaces angulaires, afin que les mêmes cercles, décrits autour de l'origine comme centre, servent pour tous, et qu'on puisse ainsi, à volonté, grouper les éléments, soit en bandes angulaires comme celles que l'on a considérées, soit en bandes annulaires comprises entre deux cercles cencentriques successifs ayant les rayons r et $r+dr$.

Il suffira évidemment de suivre pas à pas la même marche, pour introduire, de proche en proche, dans une intégrale multiple quelconque, de nouvelles variables d'intégration, liées d'une manière déterminée à celles qui y figurent.

315*. — Même transformation, opérée d'une manière purement géométrique, quand le champ d'intégration est figurable par une surface ou un volume; exemples.

On voit que les deux formes (24) de l'intégrale $\int_\sigma f(x, y)\,d\sigma$ auraient pu être posées tout de suite, géométriquement, en décomposant l'espace xOy (p. 95*), d'une part, en rectangles rectilignes $d\sigma = dx\,dy$, comme MNN′M′, par le double système des droites $x=$ const., $y=$ const., d'autre part, en rectangles mixtilignes $d\sigma = r\,d\theta\,dr$, comme PMQP′, par un système de droites (rayons vecteurs) $\theta=$ const., et par le système de cercles concentriques $r=$ const.; puis en groupant, dans chaque cas, les éléments d'intégrale dont le champ $dx\,dy$ ou $r\,d\theta\,dr$ forme des bandes élémentaires comprises entre lignes d'une même famille. Seulement, cette méthode, pour ainsi dire immédiate, n'apprendrait rien, si l'on s'y bornait, sur le passage de l'une des formes à l'autre; ce que fait la méthode analytique beaucoup plus longue.

Mais, ayant maintenant une idée nette de la marche à suivre pour déduire l'une de l'autre deux formes différentes d'une intégrale multiple, il nous suffira désormais, dans les exemples qui se présenteront, d'employer la voie géométrique, plus intuitive, qui, il est vrai, ne pourrait pas embrasser plus de trois intégrations à transformer simultanément; car le *champ* y est supposé figurable ou par une surface, ou par un volume. Cette méthode géométrique consiste donc à

prendre directement, pour *élément du champ* de l'intégrale, un espace infiniment petit en tous sens sur les diverses limites duquel une des variables d'intégration données reste constante, espace qui est sensiblement un parallélogramme dans le cas d'une intégrale double et un parallélépipède dans celui d'une intégrale triple.

Par exemple, s'il s'agit d'une intégrale triple $\int\int\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, à étudier au moyen de coordonnées polaires r, θ, φ liées aux coordonnées rectilignes rectangles x, y, z par les relations

$$(25)\qquad x = r\cos\varphi\cos\theta,\qquad y = r\cos\varphi\sin\theta,\qquad z = r\sin\varphi,$$

l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ deviendra le parallélépipède mixtiligne MEFG (p. 82*) du n° 308*, dont les six faces sont caractérisées respectivement par les valeurs r, $r + dr$, θ, $\theta + d\theta$, φ, $\varphi + d\varphi$ des nouvelles variables, et dont l'expression (ME)(MF)(MG) n'est autre (p. 66*) que $dr(r\cos\varphi\,d\theta)(r\,d\varphi) = r^2\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi\,dr$. On aura donc

$$(26)\quad \begin{cases} \int\int\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ \quad = \int\int\int f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)\,r^2\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi\,dr, \end{cases}$$

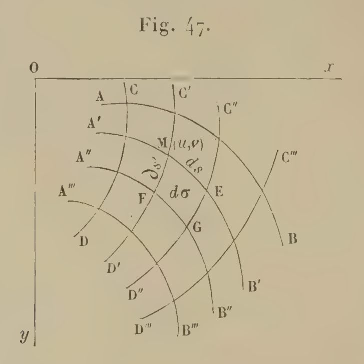
les limites devant, dans chaque membre, être fixées de manière que les intégrations s'étendent bien à tout l'espace ϖ, à trois dimensions, assigné comme *champ*, ou de manière que les deux membres expriment la même somme limite $\int_\varpi f(x,y,z)\,d\varpi$, soumise à deux modes différents de décomposition.

Soit encore (comme dernier exemple général), étant donnée une intégrale double $\int\int f(x,y)\,dx\,dy$ prise entre des limites quelconques sur un plan rapporté à deux axes rectangulaires des x et des y (p. 100*), à y remplacer les variables x, y par deux autres u, v, définies au moyen de deux certaines équations $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, et telles, que les courbes de chacune des deux familles $u =$ const., $v =$ const. se trouvent simplement juxtaposées (sans croisement) sur tout le champ d'intégration, avec paramètre u ou v croissant de l'une à l'autre. Supposons que AB, A′B′, A″B″, ... soient ainsi des courbes successives de la famille $v =$ const., et CD, C′D′, C″D″, ... des courbes successives de la famille $u =$ const. Les parallélogrammes élémentaires, comme MEGF, qu'elles forment en s'intersectant dans les deux familles, auront deux côtés, ME, FG, empruntés aux courbes $v =$ const., et correspondant à un accroissement infiniment petit du éprouvé par la valeur du paramètre u entre C′D′ et C″D″, tandis que leurs deux autres côtés MF, EG appartiendront aux courbes $u =$ const.,

et seront corrélatifs de même à un accroissement élémentaire dv de la valeur de v entre A′B′ et A″B″.

Si donc nous appelons, pour abréger, ds l'élément ME d'arc,

Fig. 47.



$\partial s'$ l'élément analogue MF, dx et dy les projections du premier ME sur les axes, ∂x, ∂y celles du second MF, enfin θ l'angle de ME avec Ox, compté positivement en tournant autour de M, dans le sens de Ox vers Oy, à partir d'une parallèle à Ox, et θ' l'*azimut* analogue de MF, il viendra évidemment

$$(27)\qquad \begin{cases} dx \text{ ou } ds\cos\theta = \dfrac{dx}{du}du, & dy \text{ ou } ds\sin\theta = \dfrac{dy}{du}du, \\ \partial x \text{ ou } \partial s'\cos\theta' = \dfrac{dx}{dv}dv, & \partial y \text{ ou } \partial s'\sin\theta' = \dfrac{dy}{dv}dv. \end{cases}$$

Enfin, supposons qu'en attribuant aux nouvelles variables les deux désignations respectives u et v, on l'ait fait de manière que les côtés ME, MF (ou $v =$ const., $u =$ const.) émanés du point quelconque M se trouvent relativement disposés, au point de vue de leurs azimuts θ et θ', dans le même ordre que Ox et Oy (dont les équations analogues sont $y = 0 =$ const., $x = 0 =$ const.), c'est-à-dire de manière que la différence $\theta' - \theta$ tombe, comme celle, $\frac{\pi}{2}$, des azimuts de Oy et Ox, entre zéro et π (à un multiple près de 2π). Le sinus de $\theta' - \theta$ sera dès lors positif et constituera la valeur absolue de sin EMF.

Cela posé, le parallélogramme MEGF, élément naturel $d\sigma$ d'aire dans le système des coordonnées curvilignes u et v, a pour surface (ME)(MF)(sin EMF), ou bien

$$\begin{aligned} ds\,\partial s'\sin(\theta' - \theta) &= ds\,\partial s'(\sin\theta'\cos\theta - \cos\theta'\sin\theta) \\ &= (ds\cos\theta)(\partial s'\sin\theta') - (ds\sin\theta)(\partial s'\cos\theta'). \end{aligned}$$

Or remplaçons, dans le dernier membre, $ds \cos\theta$, $\partial s' \sin\theta'$, ... par leurs valeurs (27), et nous aurons

$$(28) \qquad d\sigma = \left(\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}\right) du\, dv.$$

Donc la formule de transformation cherchée, pour passer des variables x, y aux variables u, v, liées à x et à y par les deux équations $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, sera

$$(29) \quad \int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f[\varphi(u,v),\psi(u,v)]\left(\frac{d\varphi}{du}\frac{d\psi}{dv} - \frac{d\varphi}{dv}\frac{d\psi}{du}\right) du\,dv.$$

Il va sans dire que, dans le second membre, le groupement des éléments se fera, par exemple, en ajoutant ceux qui correspondent aux mêmes valeurs de u et de du ou dont le champ total est une bande comme C′D′D″C″, le long de laquelle v seul varie; puis l'intégration du résultat par rapport à u donnera la somme cherchée.

Cette formule (29) comprend bien comme cas particulier celle qui sert à passer des coordonnées rectangles x, y, dans le plan, à des coordonnées polaires r, θ; car il suffit de prendre $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ (u et v n'étant, par conséquent, autres que r et θ), pour que le second membre de (28) devienne

$$[\cos v(u \cos v) - (-u \sin v)\sin v]\,du\,dv = u\,du\,dv,$$

c'est-à-dire $r\,dr\,d\theta$, comme on l'avait trouvé.

En terminant, montrons par une application très simple de la formule (24) [p. 97*] l'utilité de ces sortes de transformations d'intégrales multiples, pour rendre parfois aisément intégrables en termes finis des expressions qui, sous leur première forme, ne l'auraient été par aucun des procédés connus. Cette application concernera la somme, d'éléments tous positifs, $\overline{\int\int}_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, que nous retrouverons bientôt dans l'étude d'une intégrale simple appelée *intégrale de Poisson*. Sa valeur limite sera, comme nous l'admettons pour $\overline{\int\int}_0^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$, *finie* quel que soit le contour du champ dans sa partie s'éloignant à l'infini de l'origine, si elle est trouvée telle pour le mode de groupement des éléments qui correspond aux variables r, θ; car on sait (t. I, p. 7, 3°) que toute somme d'une infinité de termes, pourvue d'une limite dans un mode de groupement des termes, tend encore vers la même limite après changement arbitraire de ce mode, quand tous les

termes sont de même signe. Il faut donc ici prendre, dans (24), $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$; ce qui, d'après le second membre de cette formule, donne à l'expression proposée la forme, en coordonnées polaires, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr$. Or, grâce au facteur r placé sous le second signe $\int$, facteur qui est la demi-dérivée de r^2, on peut poser $r^2 = u$ et transformer la différentielle $e^{-r^2} r\,dr$ en celle-ci, bien plus simple, $\frac{1}{2} e^{-u} du$, où l'exposant de e^{-1} n'est plus un carré; ce qui la rend immédiatement intégrable. En observant d'ailleurs que u ou r^2 croît de zéro à l'infini en même temps que r, il vient successivement

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &\overline{\int\int}_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta (-e^{-u})_0^{\infty} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \right.$$

L'intégrale double proposée a donc la valeur finie $\frac{\pi}{4}$.

316*. — Calcul approché des restes de séries doubles, triples, etc., par des intégrales d'un pareil ordre de multiplicité.

On appelle *série double* une série (convergente) dont chaque terme est lui-même constitué par une série et remplacé par la suite des propres termes de celle-ci. En supposant que, s'il y a des termes de signes divers, on ait pu les combiner en nombre fini, soit deux à deux, ou trois à trois, etc., de manière à ne laisser subsister en définitive, comme nous l'avons admis dans le cas des séries simples (p. 50*), que des termes tous de même signe, positifs par exemple, ceux-ci, ayant leur somme absolue totale finie, garderont évidemment cette somme limite de quelque façon qu'on les dispose; et il sera naturel de les grouper d'après leur ordre de grandeur décroissante, chaque groupe ne contenant que des termes comparables entre eux, dont le nombre augmentera à mesure que leur petitesse commune deviendra plus grande ou l'ordre du groupe plus élevé.

Or, si l'on divise un plan, par deux ou trois systèmes de droites parallèles, en compartiments égaux, soit carrés ou rectangulaires, soit même, suivant les cas, triangulaires ou hexagonaux réguliers, puis qu'on inscrive le terme principal, constituant le premier groupe, au

centre de gravité d'un premier compartiment donné, les termes du second groupe, rangés convenablement, aux centres analogues respectifs de compartiments contigus au premier ou les uns aux autres, et formant tout ou partie d'une zone concentrique au compartiment primitif, de même ceux du troisième groupe, encore suivant un certain ordre, dans une pareille bande de compartiments contigus entourant la précédente, et ainsi de suite, toujours à raison d'un terme par compartiment, il arrivera souvent : 1° que tous les termes se trouveront, de la sorte, grâce à un choix approprié du mode de division du plan, inscrits à côté de ceux que l'analogie de leurs expressions, non moins que leurs valeurs, en rapprochent naturellement, et à des distances r du centre du compartiment primitif sensiblement égales pour tous les termes d'un même ordre de petitesse; 2° que l'ensemble des compartiments ainsi consacrés aux divers termes de la série double couvrira sur le plan un espace infini en longueur et largeur, dont les zones très éloignées du compartiment primitif ne contiendront que des termes ayant leur somme totale, jusqu'aux distances r infinies, évanouissante.

Cela posé, rapportons le plan à deux axes rectangulaires des x et des y se croisant au centre du premier compartiment et, de plus, pour simplifier autant que possible les formules, adoptons une unité de longueur telle, que la surface de chaque compartiment égale 1. Les divers termes de la série pourront être évidemment distingués les uns des autres au moyen des coordonnées x, y du point où l'on aura inscrit chacun d'eux; et il sera naturel de les regarder comme tout autant de valeurs d'une fonction $f(x,y)$ de ces paramètres. Cette fonction $f(x,y)$, au moyen de laquelle on écrira la série, d'une manière abrégée, $\Sigma\Sigma f(x,y)$, ne se trouvera, il est vrai, déterminée de la sorte que pour les couples de valeurs de x et de y répondant aux centres des compartiments. Mais elle admettra, dans les cas les plus intéressants, auxquels nous nous bornerons, une expression analytique continue, ne variant, aux distances r de l'origine suffisamment grandes, que de fractions très faibles de leurs valeurs entre les centres de compartiments voisins et, à plus forte raison, entre un tel centre (x, y) et tout point $(x+u, y+v)$ du même compartiment. Alors nous pourrons, dans l'étendue restreinte de celui-ci, développer la fonction très graduellement variable $f(x+u, y+v)$ par la série de Taylor, suivant les puissances des accroissements relativement petits u, v, qui sont les *coordonnées locales* des divers points du compartiment par rapport à des axes ayant les directions de ceux des x et des y, mais se croisant en son centre (x,y). Et il viendra, avec une approximation

généralement très grande si r est considérable,

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} & f(x+u, y+v) \\ & \quad = f(x,y) + \frac{df}{dx}u + \frac{df}{dy}v + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{dx^2}u^2 + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}uv + \frac{d^2f}{dy^2}v^2\right). \end{aligned} \right.$$

Or cette formule, où le trinôme final entre parenthèses sera très petit devant $f(x, y)$, rend facile une sorte de répartition *continue*, presque exacte, *sur tout le compartiment*, de la valeur $f(x, y)$ du terme qui en occupe le centre (x, y), de même qu'une formule pareille, dans le cas d'une série simple dont le terme général était $f(n)$, nous a (p. 51*) fait remplacer $f(n)$, pour évaluer approximativement le reste de la série, par l'intégrale $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(n+u)\,du$. C'était bien opérer une substitution analogue; car, si l'on se représente les termes $f(n)$, $f(n+1)$, $f(n+2)$, ... de la série, écrits, le long d'un axe des x, aux points équidistants dont les abscisses x sont n, $n+1$, $n+2$, ..., ou au milieu de divisions, égales à l'unité, ayant pour limites respectives $n - \frac{1}{2}$ et $n + \frac{1}{2}$, $n + \frac{1}{2}$ et $n + \frac{3}{2}$, ..., le remplacement de chaque terme par une intégrale $\int f(x)\,dx$ s'étendant à toute la division correspondante revient à répartir graduellement sa valeur d'un bout à l'autre de cette division.

Ainsi, nous décomposerons le compartiment considéré, dont l'aire σ égale 1, en éléments $d\sigma$, comme $du\,dv$ par exemple, ayant leurs situations définies par les coordonnées locales u, v relatives au centre (x, y), et, après avoir multiplié par $d\sigma$ l'expression (31) de $f(x+u, y+v)$, nous ferons la somme $\int_\sigma$ des résultats pour toute l'étendue $\sigma = 1$ du compartiment. Les deux termes $\frac{df}{dx}\int_\sigma u\,d\sigma$, $\frac{df}{dy}\int_\sigma v\,d\sigma$ seront nuls, d'après la définition même du centre de gravité du compartiment, en vertu de laquelle les deux produits respectifs, par $\int d\sigma$ ou 1, des valeurs nulles de u, v qui lui correspondent, égalent les sommes $\int_\sigma u\,d\sigma$ et $\int_\sigma v\,d\sigma$. D'ailleurs, pour abréger, nous appellerons A, B, C les trois quantités

$$(32)\qquad A = \int_\sigma u^2\,d\sigma, \qquad B = \int_\sigma uv\,d\sigma, \qquad C = \int_\sigma v^2\,d\sigma,$$

évidemment les mêmes pour tous les compartiments; et il viendra, en écrivant simplement f pour la valeur $f(x+u, y+v)$ de la fonction f sur l'élément,

$$(33)\qquad \int_\sigma f\,d\sigma = f(x,y) + \frac{1}{2}\left(A\frac{d^2f}{dx^2} + 2B\frac{d^2f}{dx\,dy} + C\frac{d^2f}{dy^2}\right).$$

On pourra donc substituer, au terme $f(x,y)$ de la série, l'intégrale $\int_\sigma f\,d\sigma$ prise dans l'intérieur du compartiment consacré à ce terme, avec une erreur absolue *par excès* exprimée très sensiblement par $\frac{1}{2}\left(A\frac{d^2f}{dx^2} + 2B\frac{d^2f}{dx\,dy} + C\frac{d^2f}{dy^2}\right)$.

Pour fixer les idées sur le degré de petitesse de cette erreur, bornons-nous au cas, le plus simple, de compartiments carrés, ayant leurs côtés, de longueur 1, parallèles aux axes et, par suite, leurs centres définis par des coordonnées égales aux divers nombres entiers, positifs ou négatifs. Les formules (32) de A, B, C seront, respectivement, $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (u^2, uv, v^2)\,dv$, intégrales qui s'obtiennent sans difficulté et valent $\frac{1}{12}$, 0, $\frac{1}{12}$. Le dernier terme, triple, de (33) se réduit donc alors à $\frac{1}{24}\left(\frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2}\right)$ ou à $\frac{\Delta_2 f(x,y)}{24}$, et *l'erreur relative, par excès, commise en substituant à $f(x,y)$ l'intégrale $\int_\sigma f\,d\sigma$, est, à peu près,* $\frac{\Delta_2 f(x,y)}{24 f(x,y)}$, valeur comprenant bien celle, $\frac{f''(n)}{24 f(n)}$, que nous avions trouvée (p. 51*) pour le cas particulier où $f(x,y)$ devient simplement $f(x) = f(n)$ [1].

Cette expression ou celle, plus générale, que donne le quotient par

---

[1] A part le coefficient numérique $\frac{1}{24}$, cette formule de l'erreur relative subsiste dans le cas de compartiments non plus carrés, mais triangulaires équilatéraux ou hexagonaux réguliers, c'est-à-dire ayant une forme possible quelconque de polygone régulier; car on obtient, pour tous ces cas, $B = 0$ et $C = A$, soit en invoquant la théorie de mécanique rationnelle relative aux *moments d'inertie,* et observant que A, C sont les moments d'inertie de la surface σ par rapport aux deux axes des v et des u, soit, ce qui revient au même ici, en effectuant une rotation des axes des u et des v égale à l'angle au centre (toujours inférieur à π) du polygone régulier, de manière à retrouver avec les nouveaux axes les mêmes valeurs de A, B, C qu'avec les premiers, et en exprimant les anciennes coordonnées et intégrales u, v, A, B, C en fonction des nouvelles.

f du dernier terme (trinôme) de (33), tend d'ordinaire vers zéro quand on considère des compartiments de plus en plus éloignés de l'origine; car, si nous supposons la grandeur des termes exactement pareille à même distance r de l'origine, ou $f(x, y)$ de la forme $\varphi(r)$, et tendant vers une expression monôme $\frac{A}{r^m}$ quand r croît, il vient (t. I, p. 95*) $\frac{\Delta_2 f}{f} = \frac{\varphi''(r)}{\varphi(r)} + \frac{1}{r}\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}$, ou, pour r très grand,

$$(34) \qquad \frac{\Delta_2 f}{24 f} = \frac{m^2}{24 r^2},$$

quantité positive qui tend bien sans cesse vers zéro lorsque r augmente.

Par suite, si l'on décrit autour de l'origine une circonférence d'un assez grand rayon R, et que l'on remplace, dans le calcul de la série, les petits termes inscrits hors de cette circonférence ou hors d'une circonférence peu différente, par l'intégrale $\iint f(x, y)\, d\sigma$ étendue à tout l'espace infini que comprennent leurs compartiments, l'erreur relative commise sur la somme de tous ces termes, rapport de la somme des erreurs absolues commises sur leurs valeurs à la somme de ces valeurs mêmes, sera comprise entre la plus grande et la plus petite des valeurs correspondantes de $\frac{\Delta_2 f}{24 f}$, ou n'atteindra pas $\frac{m^2}{24 R^2}$ quand on aura

$$f(x, y) = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \varphi(r),$$

avec $\varphi(r)$ tendant assez vite vers $\frac{A}{r^m}$ pour r croissant.

D'ailleurs, si, pour fixer les idées, l'on admet que tous les compartiments du plan soient employés, ce rayon R se déterminera, après avoir ajouté les N termes de la série (les plus sensibles ou inscrits le moins loin de l'origine) que l'on jugera devoir calculer directement, en prenant le cercle πR^2 égal à N, c'est-à-dire équivalent à la somme des N compartiments occupés par ces termes, afin que l'ensemble des autres compartiments, sur lesquels se fera l'intégration $\iint f(x, y)\, d\sigma = \int \varphi(r)\, d\sigma$, ait son contour intérieur partout peu distant de la circonférence $2\pi R$ et coupé par celle-ci de manière à laisser vide, hors de la circonférence, autant d'espace superficiel $\int d\sigma$ qu'il y en aura d'occupé au dedans. Alors on pourra, en ne faisant varier $\varphi(r)$ que dans un rapport très faible, remplacer les éléments $\varphi(r)\, d\sigma$ dont le champ $d\sigma$ est intérieur au cercle, par d'autres, $\varphi(r_1)\, d\sigma_1$, d'un champ égal $d\sigma_1 = d\sigma$ choisi dans l'espace extérieur inoccupé par les compartiments, et substituer ainsi, au contour angu-

leux ou brisé limitant intérieurement l'espace où doit se faire l'intégration, la circonférence $2\pi R$ elle-même.

Cela permettra de prendre, comme éléments d'aire $d\sigma$, des parties de couronnes circulaires et même, puisque nous admettons que les termes de la série s'étendent à des azimuts θ allant de zéro à 2π, des couronnes complètes $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} r\,d\theta\,dr = 2\pi r\,dr$, de rayon intérieur r et de largeur dr. Le *terme complémentaire* ou *reste* de la série, c'est-à-dire l'ensemble des termes convertis en intégrale, sera donc sensiblement $2\pi\int_R^\infty \varphi(r)r\,dr$, ou bien, en supposant R assez grand pour qu'on puisse attribuer à $\varphi(r)$ sa forme limite monôme $\frac{A}{r^m}$,

$$(35)\quad \begin{cases} \text{Reste} = 2\pi A\displaystyle\int_R^\infty \frac{dr}{r^{m-1}} = \frac{2\pi A}{m-2}\left(\frac{-1}{r^{m-2}}\right)_R^\infty \\ \quad = \dfrac{2\pi A}{(m-2)R^{m-2}} = \dfrac{2\pi R^2}{m-2}\,\dfrac{A}{R^m} = \dfrac{2N}{m-2}\,\dfrac{A}{R^m}. \end{cases}$$

On voit par cette formule l'importance du reste ainsi évalué, puisqu'il vaut environ $\frac{2N}{m-2}$ (nombre assez grand, comme N) termes de l'ordre des plus petits directement calculés de la série, qui sont à fort peu près $\frac{A}{R^m}$. Sauf l'altération commise sur l'intégrale, l'erreur absolue, *par excès*, n'atteindra pas le produit du résultat $\frac{2\pi A}{(m-2)R^{m-2}}$ par la limite supérieure $\frac{m^2}{24R^2}$ de l'erreur relative, produit qui est $\frac{\pi A m^2}{12(m-2)R^m}$, ou environ $\frac{m^2}{4(m-2)}$ fois l'un des plus petits termes conservés $\frac{A}{R^m}$.

Ce sera là, du reste, l'erreur due uniquement à la conversion opérée, en intégrale, du *terme complémentaire*. Or elle se trouvera effectivement réduite de l'erreur, de sens contraire ou *par défaut*, due aux variations des éléments $\varphi(r)\,d\sigma$ où r était un peu moindre que R, c'est-à-dire de la forme $R-\zeta$, et que l'on a changés en $\varphi(r_1)\,d\sigma_1$, avec $d\sigma_1 = d\sigma$, mais avec r_1 un peu supérieur à R, c'est-à-dire de la forme $R+\zeta_1$. Ces éléments ont donc décrû de $[\varphi(R-\zeta)-\varphi(R+\zeta_1)]\,d\sigma$ ou, sensiblement, de

$$-\varphi'(R)(\zeta+\zeta_1)\,d\sigma = -\varphi'(R)(\zeta\,d\sigma+\zeta_1\,d\sigma_1);$$

ce qui donne, en tout, l'erreur, par défaut, $-\varphi'(R)\int\zeta\,d\sigma$, où l'intégrale s'étend à tous les éléments $d\sigma$ de surface compris entre la circonférence $2\pi R$, que j'appellerai, pour abréger, S, et le contour den-

telé, entourant une aire équivalente, de l'ensemble des N compartiments les plus voisins du centre. Cet ensemble comprend tous les compartiments qui se trouvent entièrement dans la circonférence S et, en outre, un certain nombre de ceux qu'elle coupe. Par conséquent, la distance ζ, à la circonférence S, des éléments $d\sigma$ dont il s'agit, a pour limite supérieure la diagonale, $\sqrt{2}$, d'un compartiment; et si, par des normales à S, on divise l'aire qu'interceptent les deux contours, en bandes étroites, d'une largeur dS sensiblement uniforme d'un bout à l'autre de chacune, tout élément rectangulaire $d\sigma = d\text{S}\,d\zeta$ de bande donnera, dans l'intégrale $\int \zeta\, d\sigma$, un terme $(d\text{S})\,\zeta\, d\zeta$, qui, joint aux autres termes analogues pour une même bande, fournira la somme partielle $(d\text{S}) \int \zeta\, d\zeta$, inférieure à dS; en effet, l'intégrale $\int \zeta\, d\zeta$ ayant ici ses éléments pris en valeur absolue et ses deux limites, que j'appellerai ζ_0, ζ_1, toujours contenues dans l'intervalle de zéro à la distance maxima $\sqrt{2}$, comme on vient de voir, son expression $\frac{1}{2}(\zeta_1^2 - \zeta_0^2)$, même le plus souvent réduite à $\frac{1}{2}\zeta_1^2$, n'atteint, évidemment, jamais l'unité.

Donc il viendra, pour l'erreur totale par défaut $-\varphi'(\text{R})\int \zeta d\sigma$ due à l'*arrondissement* du contour, une quantité inférieure à $-\varphi'(\text{R})\int d\text{S} = -2\pi \text{R}\varphi'(\text{R})$, expression qui, pour $\varphi(r) = \frac{\text{A}}{r^m}$, est $2\pi m \frac{\text{A}}{\text{R}^m}$, ou environ la valeur de $6m$ termes des plus petits directement calculés $\frac{\text{A}}{\text{R}^m}$. Cette erreur par défaut se trouve, comme on voit, du même ordre que l'erreur par excès tenant à la conversion opérée du reste complémentaire en intégrale; et, par suite, l'expression obtenue (35) pourra être fort approchée. En conséquence, son emploi, ou, plus généralement, celui d'une formule équivalente de $\int f\, d\sigma$ pour toute l'étendue des compartiments assez éloignés dont on ne voudra pas avoir à part le contenu exact, rendra praticable le calcul de séries doubles qu'il serait, autrement, impossible d'utiliser, par suite d'un nombre de petits termes, ayant une influence totale sensible, trop grand pour en effectuer l'évaluation et la sommation directes [1].

Le changement approché, en une intégrale $\int f(x, y)\, d\sigma$, des petits termes d'une série double $\Sigma\Sigma f(x, y)$, supposés tous positifs et inscrits aux centres (x, y) de divisions équivalentes d'une étendue plane con-

---

[1] On peut voir des applications de cette méthode de calcul, relatives à l'écoulement de l'eau que contient un vase prismatique percé d'un petit orifice au milieu de sa base, dans une Note de MM. de Saint-Venant et Flamant, insérée en novembre 1883 aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (t. XCVII, pp. 1027 et 1105).

tinue σ, peut servir, comme on l'a vu (p. 53*) pour la transformation analogue des petits termes d'une série simple $\Sigma f(x)$, à reconnaître la convergence ou la divergence de la série. Il est clair, en effet, que la somme d'autant de termes que l'on voudra, hors d'un cercle πR^2 de grand rayon décrit autour de l'origine, sera évanouissante pour R croissant, ou ne le sera pas, suivant que sa valeur relativement très approchée $\int\int f d\sigma$ le sera ou ne le sera pas elle-même. Si, par exemple, la série s'étend à tout le plan, et qu'on ait $f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}) = \varphi(r)$, avec tendance de $\varphi(r)$ vers la forme $A r^{-m}$ quand r grandit, la formule (35) montre que ce reste s'évanouit à la limite, et que la série converge, lorsque la valeur absolue de l'exposant négatif $-m$ dépasse 2. Mais, pour $m = 2$, le second membre de cette formule donnerait le reste cherché proportionnel à $\log\infty$, c'est-à-dire infini; et la série est divergente. Ainsi, tandis qu'il suffisait, pour assurer la convergence, d'avoir $m > 1$ dans le cas d'une série simple, il faudra $m > 2$, ou une décroissance des termes plus rapide qu'en raison inverse du carré de la distance r au terme principal, dans le cas d'une série double.

Une série triple, de la forme $\Sigma\Sigma\Sigma f(x, y, z)$, provenant de la décomposition en une série $\Sigma f(x, y, z)$ [avec z variable] de chaque terme $F(x, y)$ d'une série double, pourra parfois encore, après sa réduction à des éléments tous de signe pareil, positifs par exemple, *se construire* de manière à avoir ses termes de même ordre inscrits à égale distance $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ de l'origine; et, cela, au moyen d'une division de l'espace ϖ triplement étendu en compartiments équivalents, de volume 1, cubiques ou seulement rectangulaires, par trois systèmes de plans normaux aux axes des x, y, z. Il sera évidemment possible alors, en procédant comme nous l'avons fait pour les séries simples ou doubles, de remplacer à très peu près ses petits termes, plus éloignés de l'origine que les N principaux que l'on veut évaluer directement, par l'intégrale $\int\int f(x, y, z)\, d\varpi$, prise dans tout l'espace ϖ s'étendant, par exemple, hors de la sphère $r = R$ dont le volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ a la valeur N. Si $f(x, y, z) = \varphi(r)$ et que $\varphi(r)$ tende vers $\frac{A}{r^m}$ pour r très grand, on adoptera comme éléments de cet espace des *couches* sphériques $4\pi r^2\, dr$ de rayon intérieur r et d'épaisseur dr; ce qui donnera, pour la valeur approchée du reste, $4\pi \int_R^\infty \varphi(r) r^2\, dr$, ou bien, R étant assez grand,

$$(36)\quad \text{Reste} = 4\pi A \int_R^\infty \frac{dr}{r^{m-2}} = \frac{4\pi A}{m-3}\,\frac{1}{R^{m-3}} = \frac{4\pi R^3}{m-3}\,\frac{A}{R^m} = \frac{3N}{m-3}\,\frac{A}{R^m}.$$

Et la série ne sera convergente que si m dépasse 3.

On conçoit la possibilité d'une conversion analogue des restes de certaines séries en intégrales, même quand ces séries sont plus que *triples* au point de vue de la multiplicité ou de la variété des termes, quoique la Géométrie nous refuse alors pour elles une représentation complète. C'est, au fond, un exemple d'une telle réduction, que nous a fourni, au n° 308* (p. 85*), le calcul des influences ou actions exercées à travers l'unité d'aire d'un élément plan. Aussi, la série y étant *quadruple,* à cause des *quatre* variables x, y, z et u, ou r, θ, φ et u, qu'il fallait y considérer, avons-nous reconnu que, pour la convergence, la rapidité (quand r grandissait) du décroissement des termes, c'est-à-dire de l'expression $f(r, \theta, \varphi)$ de l'influence de l'unité de volume sur l'unité de volume qui y multipliait le produit $dx\,dy\,dz\,du$, devait être non seulement plus grande que dans la loi de la raison inverse du cube r^3 de la distance (ce qui aurait suffi si l'intégrale avait été seulement triple), mais, plus même que dans celle de la raison inverse de la quatrième puissance r^4. Et, cependant, les sommations ne s'y étendaient pas, comme dans les cas des séries doubles et triples que nous venons d'examiner, à des valeurs allant pour chaque variable x, y, z, u depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, mais seulement à des fractions plus ou moins grandes du champ total possible.

La transformation, en intégrales, des termes assez petits des séries, n'est pas moins naturelle, remarquons-le en terminant, que la dissémination fictive de la matière d'un corps dans tous ses vides intermoléculaires, en vue de rendre de même calculables par des intégrales sa masse ou diverses sommes s'y rapportant. Toutes ces opérations dérivent, en effet, du grand principe d'unité et du besoin de simplification, qui nous font introduire, le plus souvent à notre insu, la continuité, l'uniformité même, partout où c'est possible sans altération notable du caractère apparent des objets et des phénomènes.

COMPLÉMENT A LA TRENTIÈME LEÇON.

INTÉGRALES DÉFINIES DIVERSES; DIFFICULTÉS QUE PRÉSENTENT LA DIFFÉRENTIATION ET LA TRANSFORMATION DE CERTAINES D'ENTRE ELLES.

319*. — Des difficultés que présente la différentiation de certaines intégrales définies.

Les raisonnements qui ont conduit à la règle de différentiation d'une intégrale définie $\int_a^b f(x, c)\,dx$ reposent sur la considération des divers éléments $f(x, c)\,dx$, et impliquent, par conséquent, que l'on puisse avoir une certaine vue directe de leur ensemble; ils supposent donc, spécialement, des limites a, b bien déterminées et une fonction sous le signe $\int$, $f(x, c)$, finie tant à ces deux limites que dans leur intervalle. Or admettons, au contraire, que a, b soient infinis ou, encore, que $f(x, c)$ devienne infinie aux limites a, b données. Nous savons qu'alors l'expression $\int_a^b f(x, c)\,dx$, dépourvue, par elle-même, de toute signification précise, est néanmoins susceptible, *grâce au principe de continuité,* de représenter une quantité finie et parfaitement déterminée si l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(x, c)\,dx$, à limites α, β variables, tend vers cette quantité quand α, β y grandissent en valeur absolue ou y tendent vers a et b. La règle de différentiation applicable à $\int_\alpha^\beta f(x, c)\,dx$ s'étendra donc à sa limite $\int_a^b f(x, c)\,dx$, pourvu que la différence, constamment évanouissante pour toutes les valeurs considérées de c, par laquelle $\int_\alpha^\beta f(x, c)\,dx$ se distingue de sa limite $\int_a^b f(x, c)\,dx$, *varie graduellement,* c'est-à-dire ne présente pas, quand on y fait changer c, des accroissements et des décroissements successifs assez rapprochés pour empêcher sa dérivée de tendre vers zéro en même temps qu'elle.

En conséquence, cette extension de la règle ordinaire à $\int_a^b f(x,c)\,dx$ sera légitime, dès que, parmi toutes les manières possibles de faire varier, en fonction de c, les limites α et β supposées constamment ou aussi grandes qu'on le voudra en valeur absolue, ou infiniment voisines de a et b, il y en aura une laissant subsister, même à la limite, la graduelle variation de la fonction ; ce dont on s'assurera en constatant si la dérivée obtenue reste bien une intégrale finie et déterminée quand on y pose finalement $\alpha = a$ et $\beta = b$. Car, lorsqu'une fonction de c, $\int_a^b f(x,c)\,dx$, par exemple, est définie comme la limite commune de diverses fonctions, $\int_\alpha^\beta f(x,c)\,dx$, dont les unes sont affectées d'inégalités de plus en plus courtes nuisant (quoique évanouissantes) à l'uniformité de variation de ces fonctions, tandis que d'autres ont une marche plus graduelle, on doit, *en vertu des principes de simplicité et de continuité,* la réputer la limite de celles-ci et non des premières *dès qu'il s'agit d'étudier son mode de variation.* Si même on ne la connaissait que comme limite des premières et que, par suite, elle s'offrît à l'esprit dépourvue de dérivée ou affectée d'inégalités infiniment courtes, il faudrait chercher à rendre sa variation graduelle en lui ajoutant une quantité sans cesse infiniment petite, mais d'une rapidité de changement infinie, à laquelle on attribuerait des inégalités juste capables de faire compensation aux siennes. *Simplifier* ainsi son mode de variation *donné*, sans altérer ses valeurs *effectives,* ce serait, au fond, compléter ou *rectifier* son idée, en la corrigeant d'une imperfection due *à la voie suivie pour la définir, plutôt qu'à sa nature propre.*

Quand a et b seront infinis ou, encore, ne dépendront pas de c, la manière la plus simple de faire varier α et β, supposés soit extrêmement grands en valeur absolue, soit extrêmement voisins de a et b, sera de les prendre constants (indépendants de c) ; ce qui donnera pour dérivée, $\int_\alpha^\beta \frac{df}{dc}\,dx$, ou, à la limite, $\int_a^b \frac{df}{dc}\,dx$. *Il suffira* donc *que la différentiation sous le signe* $\int$ *conduise à une intégrale de valeur finie et déterminée, pour que cette intégrale soit la dérivée de la proposée.*

Dans le cas contraire (où ne réussit pas la différentiation sous le signe $\int$), les éléments $\frac{df(x,c)}{dc}\,dx$ correspondant aux valeurs de x soit très grandes (au signe près), soit très voisines de a et b, auront

leur somme *absolue* infinie; sans quoi cette somme absolue et, à plus forte raison, leur somme algébrique à considérer, tendraient évidemment vers des limites : conséquence en désaccord avec la supposition faite d'une absence de valeur déterminée pour $\int_a^b \frac{df}{dc}dx$. De plus, ces éléments seront affectés de signes variés ou formeront des groupes alternativement positifs et négatifs, se succédant sans fin, et dont la valeur totale, non convergente par hypothèse, ne deviendra pas non plus continuellement infinie, du moins avec un signe constant quel que soit c; car il en résulterait évidemment, pour l'intégrale $\int_a^b f(x,c)\,dx$, une dérivée *sans cesse* infinie qui rendrait infinie cette intégrale elle-même, contrairement à une supposition fondamentale de la question.

Ainsi l'expression $\int_\alpha^\beta \frac{df(x,c)}{dc}dx$, quand elle ne tendra pas vers une limite pour $\alpha = a$ et $\beta = b$, y prendra, en général, des valeurs non infinies, de l'ordre même de celles des groupes positifs ou négatifs de ses éléments; et l'on conçoit qu'en faisant varier convenablement α et β avec c, c'est-à-dire en ajoutant ou retranchant sans cesse plus ou moins des éléments $f(x,c)\,dx$ dont la dérivée en c compose les groupes extrêmes, il soit possible d'obtenir une dérivée totale

$$(9) \qquad \int_\alpha^\beta \frac{df(x,c)}{dc}dx + f(\beta,c)\frac{d\beta}{dc} - f(\alpha,c)\frac{d\alpha}{dc},$$

assez transformée par les deux derniers termes (ou termes aux limites), pour rester finie et déterminée quand on fera tendre finalement α vers a et β vers b. Ce sera cette limite de l'expression (9) qui constituera la dérivée de l'intégrale proposée $\int_a^b f(x,c)\,dx$.

Du reste, au lieu de l'évaluer de cette manière, il sera parfois plus simple de modifier, pendant que c variera, la situation x et la grandeur dx du champ de chaque élément, afin d'avoir toujours le même nombre d'éléments $f(x,c)\,dx$ à considérer, conformément à la première méthode que nous avons indiquée (p. 159) pour différentier une intégrale définie dont les limites varient. Alors on pourra toujours concevoir les divers éléments de l'intégrale numérotés d'une manière continue, pour les distinguer les uns des autres, comme cela se fait pour caractériser les différentes courbes d'une même famille (t. I, p. 125); et, en appelant u la variable qui a pour valeurs la suite des

numéros d'ordre ainsi imaginés ou affectés aux divers éléments, la situation x de chacun de ceux-ci sera évidemment fonction, à la fois, de u et de c, tandis que son champ dx, accroissement de cette fonction corrélatif au passage d'un élément à l'autre ou au changement du du numéro d'ordre (avec c constant), sera $\frac{dx}{du}du$. Les éléments $f(x,c)\,dx$ pourront donc s'écrire $f(x,c)\frac{dx}{du}du$, expression de la forme $\psi(u,c)\,du$, après substitution à x de sa valeur en u et c; de sorte que, si u_0, u_1 désignent les numéros d'ordre du premier et du dernier élément, l'intégrale devient $\int_{u_0}^{u_1}\psi(u,c)\,du$, ou a ses limites constantes.

En d'autres termes, le premier procédé de différentiation des intégrales indiqué au n° **317** (p. 159) revient à échanger la primitive variable x d'intégration contre une autre u ayant ses deux valeurs extrêmes indépendantes de c. Il suffira donc de la choisir telle, que l'expression $\int_{u_0}^{u_1}\frac{d\psi(u,c)}{dc}du$ reste déterminée, même quand on y fera $\alpha = a$ et $\beta = b$. Si, en particulier, l'indétermination de $\int_a^b\frac{df(x,c)}{dc}dx$ tient à la présence, dans $f(x,c)$, d'un facteur $\varphi(x,c)$ trop rapidement variable en fonction de c quand x devient soit très grand en valeur absolue, soit très voisin de a ou de b, on adoptera une fonction de ce facteur pour nouvelle variable u, afin qu'il devienne indépendant de c ou contienne seulement u dans la nouvelle forme de l'intégrale; ce qui dispensera de l'y différentier.

Prenons comme exemple l'expression $\int_{-\infty}^{\infty}f\left(\frac{e^x}{2}\right)\sin\left(\frac{c^2}{2}e^{-x}\right)dx$, où la fonction désignée par f est arbitraire, à cela près qu'on la suppose graduellement variable partout et finie ou, du moins, pas trop rapidement croissante (comme l'on verra) même pour $x = \infty$. Le facteur $\sin\left(\frac{c^2}{2}e^{-x}\right)$, toujours compris entre ± 1, se réduit sensiblement à l'arc correspondant $\frac{c^2}{2}e^{-x}$ pour les grandes valeurs positives de x; et, par suite, du côté de la limite supérieure, les éléments sont de l'ordre de $f\left(\frac{e^x}{2}\right)e^{-x}dx = f\left(\frac{e^x}{2}\right)d(-e^{-x})$ ou ont, comme $\int_x^{\infty}e^{-x}dx = e^{-x}$, leur somme évanouissante pourvu que $f\left(\frac{e^x}{2}\right)$ ne grandisse pas trop avec x, en valeur absolue; ce qu'on admet. Mais, du côté de la limite

inférieure, c'est-à-dire pour $x = -\infty$, l'arc $\frac{c^2}{2}e^{-x}$, où e^{-x} devient très grand, varie de plus en plus vite. Or, comme le sinus correspondant change simplement de signe chaque fois que cet arc croît de π, c'est-à-dire à des intervalles très courts et qui le deviennent de plus en plus, les éléments, sensiblement égaux à $f(0)\sin\left(\frac{c^2}{2}e^{-x}\right)dx$, y forment des groupes de grandeur insensible, à signes alternés, et décroissants jusqu'au delà de toute limite par suite du changement de plus en plus fréquent de signe du sinus à mesure que x s'éloigne de zéro. Donc l'intégrale est finie et déterminée. Mais la *somme absolue* des éléments y est infinie; car, pour les fortes valeurs négatives de x, le sinus se trouve généralement comparable à l'unité et, à moins que le facteur $f(0)$ ne soit nul, ces éléments sont de l'ordre de leurs champs respectifs dx, dont la somme $\int_{-\infty}^{x} dx$ est infinie.

Dans ces conditions, il y a lieu de craindre que la différentiation sous le signe $\int$, par rapport à c, n'aboutisse pas; car les éléments dont il s'agit, se trouvant, pris en somme absolue, infinis et infiniment variables, peuvent, par la combinaison de leurs signes, amener des dérivées de toutes les grandeurs. Et, en effet, il vient

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{e^x}{2}\right)\cos\left(\frac{c^2}{2}e^{-x}\right)(ce^{-x})\,dx,$$

expression où le facteur e^{-x}, infini à la limite inférieure, rend, de ce côté, les éléments de plus en plus grands, de manière à y compenser la diminution de champ des groupes et à empêcher la convergence de la série formée par ceux-ci.

La recherche de la dérivée de l'intégrale exige donc qu'on fasse varier, avec c, la limite inférieure, tenue de devenir $-\infty$, mais pas plus astreinte d'ailleurs à être qu'à n'être pas constante. A cet effet, changeons, comme il a été dit, la variable d'intégration, de telle sorte que la différentiation sous le signe $\int$, effectuée ensuite, donne comme résultat une intégrale parfaitement déterminée. Nous y arriverons en choisissant une nouvelle variable, u, fonction du facteur $\sin\left(\frac{c^2}{2}e^{-x}\right)$ dont la trop rapide variation est cause des difficultés et qu'il faut, par suite, éviter de différentier.

Posons, par exemple,

$$c^2e^{-x} = e^u; \quad \text{d'où} \quad e^x = c^2e^{-u}, \quad x + u = \log(c^2) \quad \text{et} \quad dx = -du.$$

L'intégrale proposée deviendra, en y intervertissant les limites et changeant le signe, $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{c^2}{2}e^{-u}\right)\left(\sin\frac{e^u}{2}\right)du$; ce qui donnera, pour la dérivée cherchée, l'expression

$$(10)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f'\left(\frac{c^2}{2}e^{-u}\right)(ce^{-u})\left(\sin\frac{e^u}{2}\right)du,$$

parfaitement déterminée. En effet, les groupes d'éléments dont la dérivée totale ne pouvait, tout à l'heure, s'obtenir, ou qui correspondent aux valeurs infinies négatives de x et infinies positives de u, donneront ici, grâce au déplacement de leur champ dx et vu que $\frac{c^2}{2}e^{-u}$ y diffère très peu de zéro, la dérivée (en c) $\int_u^{\infty} f'(0)\,ce^{-u}\left(\sin\frac{e^u}{2}\right)du$, formée de groupes à signes alternés et rendus, par le facteur e^{-u}, plus rapidement décroissants encore que ne sont, dans l'intégrale non différentiée, les groupes analogues composant la somme $\int_u^{\infty} f(0)\left(\sin\frac{e^u}{2}\right)du$. La transformation n'a d'ailleurs fait naître aucune difficulté à l'autre limite $x=\infty$ ou $u=-\infty$; car, $\sin\frac{e^u}{2}$ y devenant sensiblement $\frac{e^u}{2}$, les éléments correspondants de (10) se réduisent à $f'\left(\frac{c^2}{2}e^{-u}\right)\frac{c}{2}du$, expression incomparablement moindre que $f'\left(\frac{c^2}{2}e^{-u}\right)\frac{c}{2}e^{-u}du=-\frac{1}{c}d_u f\left(\frac{c^2}{2}e^{-u}\right)$, et dont la somme sera, par suite, infiniment faible, si, *comme nous l'admettrons*, la somme *absolue* des variations de la fonction f pour les très grandes valeurs positives de sa variable reste finie ou, en devenant même infinie, ne dépasse pas un certain ordre d'infinitude.

On aura donc, en définitive,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dc}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{e^x}{2}\right)\sin\left(\frac{c^2}{2}e^{-x}\right)dx &= \frac{d}{dc}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{c^2}{2}e^{-u}\right)\sin\left(\frac{e^u}{2}\right)du \\ &= c\int_{-\infty}^{\infty} f'\left(\frac{c^2}{2}e^{-u}\right)\left(\sin\frac{e^u}{2}\right)e^{-u}du. \end{aligned}\right.$$

Cet exemple est relatif au cas de limites a, b infinies; mais il le devient au cas d'une limite finie, avec valeur infinie correspondante de la fonction sous le signe $\int$, quand on y pose $e^x=y$ ou $x=\log y$, et, en même temps, $e^u=v$ ou $u=\log v$; ce qui change la relation

$x+u=\log(c^2)$ en $yv=c^2$. La formule (11) se transforme alors, terme à terme, en celle-ci :

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dc}\int_0^\infty f\left(\frac{y}{2}\right)\left(\sin\frac{c^2}{2y}\right)\frac{dy}{y} &= \frac{d}{dc}\int_0^\infty f\left(\frac{c^2}{2v}\right)\left(\sin\frac{v}{2}\right)\frac{dv}{v} \\ &= c\int_0^\infty f'\left(\frac{c^2}{2v}\right)\left(\sin\frac{v}{2}\right)\frac{dv}{v^2}. \end{aligned} \right.$$

On reconnaît aisément que le dernier membre est fini et bien déterminé malgré la présence, sous le signe $\int$, du dénominateur v^2 infini à la limite inférieure zéro, pourvu que la fonction f, pour les valeurs très élevées de sa variable $\frac{c^2}{2v}$, soit d'un ordre de grandeur inférieur à 1, c'est-à-dire n'atteignant pas l'ordre de cette variable, ou pourvu que, par suite, sa dérivée f' tende vers zéro en devenant comparable à une puissance de cette même variable dont l'exposant soit négatif. Telle est donc la condition imposée à la fonction f, dans l'intégrale différentiée ici.

Mais revenons, en général, à l'expression $\int_a^b f(x,c)\,dx$.

En se bornant, comme on le fait, aux fonctions $f(x,c)$ *dont la variation ne cesse pas d'être graduelle,* sauf tout au plus pour des valeurs isolées de x et de c, il est encore un cas (outre celui de limites infinies et celui d'une fonction sous le signe $\int$ devenant infinie) où une intégrale $\int_a^b f(x,c)\,dx$ ne peut être considérée directement, mais seulement comme limite d'autres.

Il se présente quand la fonction $f(x,c)$ cesse, tout en restant finie, d'être déterminée pour une valeur de x égale à une limite ou comprise entre les limites, comme il arrive, par exemple, dans l'intégrale $\int_0^b \left(\sin\frac{c}{x^m}\right)dx$, où, à l'approche de $x=0$, $\sin\frac{c}{x^m}$ oscille une infinité de fois (si m est positif) entre -1 et $+1$, sans se fixer près d'aucune valeur intermédiaire. Alors l'indétermination accidentelle de la fonction n'empêche évidemment pas l'intégrale d'être parfaitement définie; car les éléments, dans une petite étendue voisine de la *valeur critique* de x rendant la fonction $f(x,c)$ indéterminée, n'ont qu'une somme absolue infiniment faible à cause de l'étroitesse de leur champ total $\int dx$. On appliquera évidemment à ce troisième cas les mêmes considérations qu'aux deux premiers; et il est clair, par exemple, que, *si la différentiation sous le signe $\int$ donne comme résultat une inté-*

grale finie et déterminée, celle-ci exprimera la dérivée de la proposée.

Or cela devra arriver le plus souvent. Car, la somme *absolue* des éléments de $\int_a^b f(x,c)\,dx$ *voisins* de la valeur critique étant, ici, *toujours* insensible, la dérivée en c de cette somme l'est d'ordinaire (sauf parfois pour des valeurs de c isolées); et, quoique cette dérivée soit généralement inférieure à la somme absolue des dérivées des mêmes éléments (vu les variations possibles, en sens *inverse,* des valeurs absolues de certains d'entre eux), cette dernière somme pourra, néanmoins, être encore infiniment petite, ou assurer, par le fait même, une valeur déterminée au résultat $\int_a^b \frac{df(x,c)}{dc}\,dx$. Elle aurait été, au contraire, infinie dans les deux premiers cas (de limites infinies ou d'une fonction sous le signe $\int$ devenant infinie), si l'intégrale $\int_a^b f(x,c)\,dx$ y avait dû sa valeur déterminée à la succession des signes des groupes d'éléments et non pas seulement à leur décroissement absolu.

On aura, par exemple, au moyen d'une simple différentiation sous le signe $\int$,

$$(13) \qquad \frac{d}{dc}\int_0^b \left(\sin\frac{c}{x^m}\right) dx = \int_0^b \left(\cos\frac{c}{x^m}\right)\frac{dx}{x^m}.$$

En effet, le second membre de (13) peut, à un facteur constant près mc, s'écrire $\int_{x=b}^{x=0} x\,d\sin\frac{c}{x^m}$, intégrale dont les éléments $x\,d\sin\frac{c}{x^m}$ se succèdent bien, à mesure que x décroît, par groupes (à signes alternés) de plus en plus faibles, les changements élémentaires du sinus, pareils dans tous les groupes, s'y trouvant multipliés par le facteur x de plus en plus petit.

321*. — Calcul et propriétés de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$.

On remarquera que, dans l'intégrale précédente $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x}\sin bx\,dx$ (p. 164), où nous supposerons, pour fixer les idées, $b > 0$, les éléments forment des groupes alternativement positifs et négatifs, de même champ $\frac{\pi}{b}$, mais de plus en plus faibles; car le facteur $\sin bx$, d'abord positif, de $bx = 0$ à $bx = \pi$, y change simplement de signe quand

bx croît de π, tandis que l'autre facteur, $\frac{e^{-ax}}{x}$, essentiellement positif, y tend sans cesse vers zéro, *même lorsque a est nul*. L'intégrale constitue donc une série de termes décroissants à signes alternés, toujours convergente; en sorte que sa valeur ne dépend pas des termes infiniment éloignés, qui correspondent à $x = \infty$. Et si l'on fait décroître le nombre a jusqu'à le rendre presque infiniment petit, ce qui donne, à très peu près, pour la valeur (16) de l'intégrale (p. 164), arc tang $\frac{b}{0}$ ou $\frac{\pi}{2}$, tous les éléments *tant soit peu influents* sur la somme deviennent sensiblement les mêmes que pour $a = 0$ ou pour $e^{-ax} = 1$, quoique d'autres, incomparablement plus éloignés, pour lesquels e^{-ax} tend encore vers zéro si faible que soit a, restent bien moindres que dans cette hypothèse $a = 0$. Il suit de là que l'expression $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx$, non seulement tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand a s'évanouit, mais, surtout, reste *continue même* à cette limite, ou n'y diffère pas de $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$.

Remarquons cependant que la suppression de l'exponentielle décroissante e^{-ax} constitue, si près que soit a de s'y évanouir, une modification profonde, accusée par la discontinuité des valeurs *absolues* totales des éléments. En effet, tandis que, dans $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$, les éléments très éloignés, comparables à $\frac{dx}{x} = d\log x$, ont leur somme absolue infinie, les éléments analogues de $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx$ sont, abstraction faite de leurs signes, incomparablement plus faibles que $e^{-ax}dx = d\frac{-e^{-ax}}{a}$ et ont, par suite, leur somme absolue infiniment petite, celle des valeurs de $e^{-ax}dx$ étant finie et même évanouissante.

Malgré cette différence, nous pouvons évidemment, *grâce à la continuité démontrée de l'intégrale*, poser $a = 0$ dans (16), contrairement à l'hypothèse essentielle $a > 0$ exigée par la formule (14) qui a servi de point de départ; et il vient

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{pour } b > 0). \tag{17}$$

Le paramètre b a été supposé positif; mais, comme chaque élément $\frac{\sin bx}{x}\,dx$ change simplement de signe avec b, l'intégrale (17) elle-même

en change tout entière et devient $-\frac{\pi}{2}$ pour b négatif. Elle est donc une fonction *impaire* de son paramètre b, égale à une constante $\pm\frac{\pi}{2}$ pour toutes les valeurs de b qui ont le même signe $+$ ou $-$ et, par suite, brusquement croissante de π quand sa variable devient, de négative, positive.

On s'explique aisément l'invariabilité de sa valeur absolue, en faisant varier, avec b, le champ d'intégration dx des éléments, de manière qu'un même élément corresponde, quel que soit b, à une même valeur de $\sin bx$. Cela revient à prendre l'arc bx comme nouvelle variable u d'intégration, donnant

$$\frac{\sin bx}{x}\,dx = \frac{\sin bx}{bx}\,d(bx) = \frac{\sin u}{u}\,du;$$

et l'on a par suite, vu que u et x, nuls ensemble, deviennent infinis positifs ensemble (quand b est plus grand que zéro),

$$(\text{pour } b > 0)\quad \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,du,$$

expression où b n'entre plus.

Quant à la discontinuité de l'intégrale pour $b = 0$, on peut la regarder comme consistant en ce que, si l'on fait immédiatement $b = 0$ dans $\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x}\,dx$, il vient, par l'annulation de tous les éléments, zéro comme valeur totale, au lieu de $\pm\frac{\pi}{2}$ que l'on aurait si b n'arrivait qu'avec continuité à la valeur zéro, à partir d'une autre quelconque. Quand b, supposé, par exemple, d'abord positif, devient extrêmement voisin de zéro, le champ $dx = \frac{du}{b}$ de chaque élément $\frac{\sin u}{u}\,du$ se dilate dans un rapport immense; et toute l'étendue comprise depuis $x = 0$ jusqu'aux valeurs finies les plus grandes de x est comme envahie par les premiers éléments $\frac{\sin u}{u}\,du$, savoir, par ceux où le facteur $\sin u = \sin bx$ se trouve presque nul, tandis que les éléments *influents* $\frac{\sin u}{u}\,du$, où l'arc u a des valeurs sensibles, s'éloignent jusqu'à l'infini.

L'intégrale, pour b évanouissant, constitue en quelque sorte, tout

à la fois, une *série convergente*, égale à $\pm\frac{\pi}{2}$, et une série *semi-convergente* (t. I, p. 7), ayant la valeur approchée zéro. Autrement dit, la somme des éléments, ajoutés en faisant croître x à partir de la limite inférieure, s'y maintient très longtemps voisine de zéro, comme si la série qu'ils forment ne devait pas quitter cette valeur; et c'est parce que le moment où s'y dessine enfin la tendance vers la limite $\pm\frac{\pi}{2}$ finit par ne plus arriver qu'à l'infini, ou *cesse* effectivement de *se produire*, que la valeur zéro répondant à la semi-convergence devient la vraie quand b s'annule tout de suite dans l'intégrale, au lieu d'arriver graduellement à zéro.

En résumé, l'intégrale a, pour $b=0$, trois valeurs, savoir : $+\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$ et leur moyenne arithmétique zéro, suivant que b atteint la valeur zéro après avoir été positif, ou l'atteint après avoir été négatif, ou, enfin, reçoit immédiatement et isolément cette valeur zéro.

Nous n'avions pas, jusqu'ici, rencontré de fonction, définie analytiquement, qui présentât un pareil passage brusque d'une valeur finie à une autre valeur finie, ou qui, en d'autres termes, impliquât l'existence, pour une seule abscisse, de deux points d'arrêt, dans la courbe représentative de l'ensemble de ses valeurs. L'expression $\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx$ montre donc que les intégrales définies, à éléments même très simples, constituent une catégorie de fonctions plus complexe, plus variée, que tous les types précédemment obtenus, et propre à exprimer des circonstances échappant à ceux-ci. La propriété, non moins remarquable, dont jouit la même expression, d'avoir sa valeur absolue indépendante de son paramètre, est aussi très importante; car elle permet, comme on verra dans une prochaine Leçon, d'exprimer toutes les fonctions *périodiques* par certaines séries, dites *trigonométriques,* procédant suivant les cosinus et sinus affectés de la même périodicité que ces fonctions.

324*. — Application de l'intégrale de Poisson au calcul de certaines valeurs de la fonction Γ.

On voit que les résultats précédents (p. 167), dérivant de ce que le carré de $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ est l'intégrale double $\iint_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$, résultent aussi de la formule (24) de transformation démontrée dans

la dernière Leçon (p. 97*), formule qui nous avait déjà donné (p. 102*) la valeur $\frac{\pi}{4}$ de cette intégrale double.

L'intégrale de Poisson devient, si l'on en double la valeur, une de ces *intégrales eulériennes,* dites *de seconde espèce,* que l'on représente par $\Gamma(n)$, et dont l'expression peut, comme l'on a vu [p. 36*, formule (23)], se mettre sous la forme $2\int_0^\infty u^{2n-1}e^{-u^2}du$. Celle-ci, en y posant $n=\frac{1}{2}$, donne, en effet,

$$(23)\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=2\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

La formule de réduction (21) [p. 35*], savoir $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)$, permettra, par suite, d'obtenir $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$, puis $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$, etc.; ce qui, joint aux valeurs déjà trouvées 1 ou $1.2.3\ldots(n-1)$ de $\Gamma(n)$ pour les valeurs entières de n (p. 36*), fera connaître la fonction $\Gamma(n)$ pour tous les cas où n sera un multiple pair ou impair de $\frac{1}{2}$.

325*. — Deuxième exemple : évaluation des intégrales eulériennes de première espèce, ou à deux paramètres, en fonction de celles de seconde espèce Γ.

On appelle, après Legendre, *intégrale eulérienne de première espèce,* et l'on représente par $B(p,q)$, l'expression $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, où p, q sont deux paramètres positifs : x et $1-x$, compris entre zéro et 1, y égalent les carrés respectifs du sinus et du cosinus d'un même angle θ, variable de zéro à $\frac{\pi}{2}$. En posant ainsi $x=\sin^2\theta$ et, par suite, $dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$, il vient, après des réductions évidentes,

$$(24)\qquad B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta.$$

Cette intégrale se ramène, de la manière suivante, à la fonction Γ.

Dans l'expression, $2\int_0^\infty u^{2n-1}e^{-u^2}du$, de $\Gamma(n)$, remplaçons d'abord n par p et u par y, puis n par q et u par x; enfin multiplions entre

elles les deux intégrales ainsi obtenues $\Gamma(p)$, $\Gamma(q)$, que nous savons être bien déterminées. Il viendra, comme ayant la valeur limite finie $\Gamma(p)\Gamma(q)$, l'intégrale double $4\int\int_0^\infty x^{2q-1}y^{2p-1}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$, à éléments tous positifs, et indépendante, par suite, de la forme que recevra la partie du contour de son champ destinée à s'éloigner à l'infini dans l'angle des xy positifs. On pourra donc y effectuer, conformément à la formule (24) [p. 97*], les transformations et le groupement d'éléments correspondant à l'introduction des coordonnées polaires r, θ, avec remplacement des deux côtés rectilignes du contour parallèles aux axes par un quart de la circonférence de rayon infini décrite de l'origine comme centre; ce qui donnera pour résultat

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^\infty \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\, r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr.$$

Enfin, observant que cette intégrale double se décompose immédiatement en deux facteurs où r et θ sont séparés, l'on aura

$$(25)\quad \Gamma(p)\Gamma(q) = 4\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^\infty r^{2(p+q)-1}e^{-r^2}dr\right).$$

Or, ici, la dernière intégrale entre parenthèses est ce que devient $\frac{1}{2}\Gamma(n)$, ou $\int_0^\infty u^{2n-1}e^{-u^2}du$, quand on remplace u par r et n par $p+q$; c'est $\frac{1}{2}\Gamma(p+q)$. Et, d'autre part, l'intégrale précédente, aussi entre parenthèses, égale, d'après (24), $\frac{1}{2}B(p,q)$. Donc la relation (25) revient à $\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q)$; et elle donne l'importante formule, due à Euler,

$$(26)\qquad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

On voit que, dans ce deuxième exemple du calcul d'une intégrale simple par transformation et décomposition d'une intégrale double, celle-ci se résout en facteurs sous chacune de ses deux formes, et que l'un des quatre facteurs obtenus est précisément l'intégrale $B(p,q)$ à évaluer. Quant aux trois autres, ce sont trois valeurs différentes de la fonction Γ. Aussi est-ce par leur moyen que s'exprime, symétrique-

ment en p et q, l'intégrale eulérienne *à deux paramètres* p, q, ou *de première espèce*.

326*. — Troisième exemple : intégrales $\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2\,dx$ et $\int_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2\,dx$.

Prenons, pour troisième exemple, les deux intégrales

$$(27)\qquad I = \int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2\,dx,\qquad J = \int_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2\,dx,$$

où e^{-ax^2} sera, comme dans l'intégrale de Poisson, une exponentielle décroissante, et où l'on pourra se contenter de supposer positif, comme a, le paramètre b, vu que le changement de b en $-b$ laisserait à la première intégrale, de même qu'à $\cos bx^2$, sa valeur primitive, et ferait simplement changer de signe la seconde, avec le facteur $\sin bx^2$. Nous avons déjà reconnu (p. 106) que cette seconde intégrale représente la somme, *positive*, d'une série à termes décroissants alternativement positifs et négatifs.

Changeant, dans (27), x en y et donnant en même temps à I, J les noms I_1, J_1, écrivons

$$(28)\qquad I_1 = \int_0^\infty e^{-ay^2}\cos by^2\,dy,\qquad J_1 = \int_0^\infty e^{-ay^2}\sin by^2\,dy;$$

puis formons les expressions, en intégrales doubles, des produits II_1, JJ_1, IJ_1, JI_1 et, enfin, des deux sommes algébriques $II_1 - JJ_1$, $IJ_1 + JI_1$, ou $I^2 - J^2$ et $2IJ$. Les deux intégrales doubles obtenues pour ces sommes seront encore transformables en r et θ par la formule (24) [p. 97*]; car la valeur *absolue* de chaque élément s'y trouve inférieure au produit $e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, auquel elle se réduit quand le facteur sinus ou cosinus qui y figure atteint ± 1; et, par suite, la somme limite de toutes les valeurs absolues pareilles n'égalant pas l'expression bien déterminée $\overline{\int\int}_0^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-ay^2}\,dy\right)$, carré de la quantité évidemment finie $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$, ces deux intégrales doubles constituent des séries convergentes en vertu de la petitesse absolue de leurs termes, dont on peut dès lors modifier le

groupement à volonté. Il viendra

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} I^2 - J^2 &= \int\!\!\int_0^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} \cos b(x^2+y^2).dx\,dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} e^{-ar^2} \cos br^2.r\,dr, \\ 2IJ &= \int\!\!\int_0^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} \sin b(x^2+y^2).dx\,dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} e^{-ar^2} \sin br^2.r\,dr. \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on pose $r^2 = u$, d'où $r\,dr = \frac{1}{2}du$, et si l'on observe que u croît de zéro à l'infini en même temps que r, les deux intégrales $\int_0^\infty e^{-ar^2}\cos br^2.r\,dr$ et $\int_0^\infty e^{-ar^2}\sin br^2.r\,dr$ deviendront $\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-au}\cos bu\,du$ et $\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-au}\sin bu\,du$, ou, finalement, $\frac{1}{2}\frac{a}{a^2+b^2}$ et $\frac{1}{2}\frac{b}{a^2+b^2}$, d'après la seconde et la troisième des formules (20) de la page 68. Les derniers membres de (29) égalent donc respectivement $\frac{\pi}{4}\frac{a}{a^2+b^2}$, $\frac{\pi}{4}\frac{b}{a^2+b^2}$; et, multipliés, l'un, par $\frac{4}{\pi}(a^2+b^2)$, l'autre, par $\frac{2}{\pi}(a^2+b^2)$, ils donnent

$$(30)\qquad \frac{4(a^2+b^2)I^2}{\pi} - \frac{4(a^2+b^2)J^2}{\pi} = a, \qquad \frac{4(a^2+b^2)IJ}{\pi} = \frac{b}{2},$$

relations dont la seconde montre que le produit IJ, égal à $\frac{\pi b}{8(a^2+b^2)}$, est positif et que, par suite, l'intégrale I a le même signe que l'intégrale J, ou est, comme J, positive.

Nous avons ainsi, pour compléter la détermination de I et J, les deux équations (30). Si, en vue d'abréger, nous posons

$$X' = \frac{4(a^2+b^2)I^2}{\pi}, \qquad X'' = -\frac{4(a^2+b^2)J^2}{\pi},$$

ces deux équations fourniront immédiatement la somme $X'+X''$, égale à a, et le produit $X'X''$, ou $-\left[\frac{4(a^2+b^2)IJ}{\pi}\right]^2$, égal à $-\frac{b^2}{4}$.

Donc $\frac{4(a^2+b^2)I^2}{\pi}$ et $-\frac{4(a^2+b^2)J^2}{\pi}$ sont respectivement la racine positive et la racine négative de l'équation

$$X^2-(X'+X'')X+X'X''=0, \qquad \text{ou} \qquad X^2-aX-\frac{b^2}{4}=0;$$

ce qui donne

$$\frac{4(a^2+b^2)I^2}{\pi}=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\right), \qquad \frac{4(a^2+b^2)J^2}{\pi}=\frac{1}{2}\left(-a+\sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Enfin, isolant I^2, J^2 et extrayant les racines carrées positives, il vient

$$(31)\qquad \begin{cases} I \quad \text{ou} \quad \int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx^2.\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}\,\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}, \\ J \quad \text{ou} \quad \int_0^\infty e^{-ax^2}\sin bx^2.\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}\,\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

327*. — **Application aux intégrales de la diffraction $\int_0^\infty \cos bx^2.\,dx$ et $\int_0^\infty \sin bx^2.\,dx$.**

A la limite $a=0$, les deux intégrales I, J deviennent égales et ont la valeur $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}$, comme on le déduirait, sans recourir à leurs expressions générales (31), des formules (30), alors réductibles à $I^2-J^2=0$ et à $IJ=\frac{\pi}{8b}$. Or I, J sont continues même pour $a=0$, en ce sens que tous leurs éléments tant soit peu influents peuvent, quand a est, non pas nul, mais extrêmement petit, s'évaluer dans l'hypothèse $ax^2=0$, et être ainsi égalés à $(\cos bx^2)dx$ ou à $(\sin bx^2)dx$, sauf erreur aussi voisine de zéro qu'on le veut. En effet, dans cette hypothèse, les deux intégrales se trouvent encore formées de groupes alternativement positifs et négatifs d'éléments, groupes où la fonction sous le signe $\int$ cesse, il est vrai, de décroître de l'un à l'autre pour prendre indéfiniment dans tous, à partir du second si c'est $\cos bx^2$, et dès le premier si c'est $\sin bx^2$, la même suite de valeurs absolues, mais dont l'atténuation incessante (d'un groupe à l'autre), et indéfinie, reste assurée par le rétrécissement de plus en plus grand, à mesure que l'ordre du groupe s'élève, de son champ partiel $\int dx$, compris dans l'intervalle de deux valeurs de x entre lesquelles bx^2 croît de π.

Ainsi les éléments de plus en plus éloignés, et finissant par se neutraliser entre eux, pour lesquels ax^2 conserve des valeurs sensibles quelque petit que devienne a, sont les seuls dont la grandeur *absolue* soit accrue dans un rapport notable par la suppression de l'exponentielle e^{-ax^2}. Et elle l'est même, il faut le dire, à un degré tel, qu'il en résulterait une discontinuité infinie pour $a=0$ sans les changements de signe de $\cos bx^2$ ou de $\sin bx^2$; puisque, les éléments étant moyennement comparables à $e^{-ax^2}dx$, leur somme absolue l'est à $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$, quantité finie tant que a dépasse zéro, mais infinie pour $a=0$.

Il vient donc, à la limite, malgré ces différences de valeur absolue qu'annihile la fréquence croissante des changements de signe,

$$(32) \qquad \int_0^\infty \cos bx^2\,dx = \int_0^\infty \sin bx^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}},$$

résultats d'un emploi indispensable dans la théorie physique de la diffraction.

On remarquera qu'ils n'auraient pas pu se déduire directement des relations (29) spécifiées pour $a=0$. Car, la suppression de l'exponentielle décroissante ayant rendu infinie la somme *absolue* des éléments des deux intégrales simples I, J et, par suite, de leurs produits ou combinaisons de produits qu'expriment les seconds membres de (29), on n'a plus le droit d'introduire, dans les intégrales doubles, *à champs rectangulaires,* dont ces seconds membres égalent les valeurs limites, de nouveaux éléments, les uns positifs et les autres négatifs, *en proportion inégale,* de manière à pouvoir remplacer les deux côtés $y=\infty$ et $x=\infty$ du champ rectangulaire par l'arc d'un quart de cercle circonscrit $r=\infty$ ayant son centre à l'origine, et rendre de la sorte, dans les troisièmes membres, les intégrations en r effectuables jusqu'à une limite supérieure r *constante,* ou le champ divisible en quarts de zones concentriques $\frac{\pi}{2}\,r\,dr$, comme il a été admis dans l'évaluation de ces troisièmes membres. En effet, les groupes alternativement positifs et négatifs, formés chacun par les éléments de même signe qui correspondent à des zones contiguës, ont leurs champs respectifs, aussi en forme de fragments de zones circulaires, accrus d'un groupe à l'autre par le fait de la substitution du contour circulaire circonscrit au contour rectangulaire, à partir du premier fragment de zone dont l'arc n'atteignait pas un quart de cercle; et voilà pourquoi les groupes, qui finissaient par devenir décroissants dans le cas du champ rectangulaire, cessent de tendre vers zéro après l'arrondissement du contour.

Aussi les troisièmes membres de (29), que l'on peut, a étant nul, écrire (en se réservant d'y faire finalement r infini)

$$\frac{\pi}{4b}\int_{r=0}^{r=r} d\sin br^2 = \frac{\pi\sin br^2}{4b} \qquad \text{et} \qquad \frac{\pi}{4b}\int_{r=0}^{r=r} d(-\cos br^2) = \frac{\pi(1-\cos br^2)}{4b},$$

oscillent-ils indéfiniment, l'un, de $-\frac{\pi}{4b}$ à $\frac{\pi}{4b}$, l'autre de zéro à $\frac{\pi}{2b}$, s'accroissant ainsi de groupes alternativement positifs et négatifs (d'éléments), qui, loin de tendre vers zéro, ont tous la valeur absolue $\frac{\pi}{2b}$.

Mais on voit qu'il suffirait de changer la forme de ce contour limite circulaire (en la rendant, par exemple, elliptique, rectangulaire, etc.), de manière à réduire *graduellement* jusqu'à zéro le champ et, par suite, la valeur des groupes successifs, à partir de l'un d'entre eux d'un ordre déjà fort élevé ou d'une largeur Δr de champ très petite, propre à assurer la continuité des changements ultérieurs de grandeur absolue des groupes, pour que la somme de tous ces groupes décroissants se réduisît à la moitié de celui-là (T. I, p. 13), et fixât ainsi la valeur définitive de l'intégrale juste au milieu de l'intervalle dans lequel elle aurait, sans cette circonstance, indéfiniment oscillé. On s'explique donc que, dans le cas d'un contour rectangulaire, les expressions (29) de $I^2 - J^2$ et de $2IJ$, pour $a = 0$, soient bien respectivement zéro et $\frac{\pi}{4b}$.

328*. — Calcul de certaines intégrales définies par introduction d'un paramètre, suivie d'opérations diverses sur les résultats : application à $\int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{coh} 2\alpha x\,dx$ et à $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$.

Il existe encore quelques autres procédés pour évaluer certaines intégrales définies sans passer par les intégrales indéfinies. Le plus simple consiste à effectuer un changement de variables capable d'introduire un paramètre dans une intégrale donnée, et à effectuer ensuite sur l'intégrale ainsi obtenue, déjà un peu plus générale que la proposée, diverses transformations propres à en faire connaître d'autres, comme, par exemple, un nombre quelconque de différentiations par rapport au paramètre introduit. On arrive, de la sorte, à une infinité d'intégrales distinctes, qui, combinées par voie d'addition, peuvent en fournir encore de nouvelles, très importantes quelquefois.

Considérons, par exemple, l'intégrale de Poisson, $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Si, $\sqrt{a}$ désignant une constante positive, nous y posons $u = x\sqrt{a}$ (d'où $du = \sqrt{a}\,dx$), il est clair que x variera, comme u, de zéro à l'infini; en sorte que nous aurons $\int_0^\infty e^{-ax^2}\sqrt{a}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, et, par suite, en divisant par $\sqrt{a}$,

$$(33)\qquad \int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,a^{-\frac{1}{2}}.$$

Différentions par rapport à a, un nombre indéfini de fois, les deux membres de (33). Il viendra, en changeant chaque fois le signe des résultats,

$$(34)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{2}\,a^{-\frac{3}{2}}, \\ \int_0^\infty x^4 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1.3}{2^2}\,a^{-\frac{5}{2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\,a^{-\frac{2n+1}{2}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Faisons maintenant, dans (33) et (34), $a = 1$; ce qui donnera

$$(35)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ \int_0^\infty x^2 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{2}, \\ \int_0^\infty x^4 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1.3}{2^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

c'est-à-dire les intégrales $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})$, $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{3}{2})$, $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{5}{2})$, ..., dont on connaissait déjà, explicitement ou implicitement, les valeurs (p. 122*). Puis multiplions respectivement les relations (35) par 1, $\pm\frac{(2\alpha)^2}{1.2}$, $\frac{(2\alpha)^4}{1.2.3.4}$,

$\pm \frac{(2\alpha)^6}{1.2.3.4.5.6}$, et ainsi de suite jusqu'à l'infini, α étant une constante quelconque; enfin ajoutons les résultats et observons que, aux seconds membres, les expressions de la forme

$$\pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n} \frac{(2\alpha)^{2n}}{1.2\ldots(2n)}$$

se simplifieront par la disparition des facteurs impairs communs $1.3\ldots(2n-1)$, pour donner successivement

$$\pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{2^n} \frac{(2\alpha)^{2n}}{2.4.6\ldots 2n} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\alpha^{2n}}{1.2.3\ldots n}.$$

Réunis, les seconds membres seront donc, à la limite,

$$(36) \qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 \pm \frac{\alpha^2}{1} + \frac{\alpha^4}{1.2} \pm \frac{\alpha^6}{1.2.3} + \ldots\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\pm\alpha^2}.$$

On voit que, *même* en prenant tous leurs termes en grandeur *absolue*, ils constituent une série convergente, dont la valeur limite égale $\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\alpha^2}$. Ainsi les sommes à évaluer se composent de parties assez rapidement décroissantes pour que les termes suffisamment éloignés y donnent, de quelque manière qu'on les groupe en nombre quelconque, un total aussi faible qu'on le veut. Donc, comme d'ailleurs les éléments des intégrales (35) sont tous positifs, ceux d'entre eux qui se rapportent aux valeurs très élevées tant de x que de n ne pourront avoir que des sommes négligeables à la limite, du moins après leur multiplication par les facteurs respectifs introduits. Par suite, il importera peu qu'un nouveau mode de groupement fasse prendre plus ou moins de ces éléments très éloignés et notamment, dès l'abord, des éléments se rapportant aux valeurs infinies de n. Autrement dit, l'on aura le droit de grouper, dans la somme des premiers membres, qui est

$$(36\ bis) \quad \int_0^\infty e^{-x^2} dx \pm \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{(2\alpha x)^2}{1.2} dx + \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{(2\alpha x)^4}{1.2.3.4} dx \pm \ldots,$$

tous les éléments correspondant au même champ dx compris entre les deux valeurs x et $x + dx$ de la variable; ce qui donnera

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\left[1 \pm \frac{(2\alpha x)^2}{1.2} + \frac{(2\alpha x)^4}{1.2.3.4} \pm \frac{(2\alpha x)^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right] dx,$$

ou bien $\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{coh}(2\alpha x)\, dx$ dans le cas des signes supérieurs et

$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2\alpha x)\,dx$ dans celui des signes inférieurs. Vu les valeurs (36) du second membre, il viendra donc les deux intégrales, ne se réduisant à celle de Poisson (prise comme point de départ) que pour $\alpha = 0$,

$$(37)\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{ch} 2\alpha x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{\alpha^2},\qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\alpha^2}.$$

329*. — Réflexion sur les transformations d'intégrales peu convergentes et sur l'introduction provisoire de facteurs exponentiels décroissants, destinée à y garantir l'exactitude des résultats.

On remarquera que la transformation consistant à faire entrer *immédiatement,* dans la somme (36 *bis*), les éléments relatifs aux valeurs les plus élevées de n, après avoir obtenu cette somme pour le cas où l'on n'y comprend *immédiatement* que les éléments relatifs aux valeurs les plus élevées de x, ne serait pas légitime, si, comme dans un exemple précédent (p. 119*), la somme ne devait d'être finie et *déterminée* qu'au mode de groupement choisi, ou à ce qu'elle exprimerait l'excédent de termes d'un certain signe, et d'une valeur totale infinie, sur d'autres de signe contraire; car l'interversion dont il s'agit pourrait changer la proportion des termes positifs aux termes négatifs, et faire, par suite, varier le total dans un rapport quelconque.

Aussi est-il bon d'avoir sous les signes $\int$, pendant toutes les transformations de ce genre sur une intégrale à éléments les uns positifs et les autres négatifs, quelque exponentielle décroissante, comme e^{-ax} ou e^{-ax^2}, dont la présence assure d'ordinaire la convergence des valeurs absolues. Cela n'empêche pas de se débarrasser finalement de l'exponentielle, en posant $a = 0$ dans les résultats obtenus, *pourvu que l'intégrale sur laquelle auront porté les raisonnements reste bien continue à cette limite* $a = 0$. Il faudra donc que les éléments correspondant aux très grandes valeurs absolues de x, pour lesquels, quelque faible que soit a, l'exponentielle e^{-ax} ou e^{-ax^2} différera beaucoup de sa limite 1, n'aient pas d'influence appréciable sur l'intégrale, même à l'instant où l'on pose $a = 0$, afin que la réduction finale de e^{-ax} ou e^{-ax^2} à 1, quoique modifiant ces éléments dans un grand rapport, ne modifie pas sensiblement l'intégrale. C'est ce qui arrive dans les exemples étudiés aux n^{os} **321** et **327*** (pp. 118* et 126*).

Mais il n'en serait pas de même dans $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin ax}{x}\,dx$, qui a pour

valeur, d'après (16) [p. 164], $\operatorname{arctang} \frac{a}{a}$ ou $\frac{\pi}{4}$; car, si l'on fait tendre a vers zéro, l'influence principale y passe à des éléments de plus en plus éloignés, comme pour l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx$ (p. 120*). Aussi l'hypothèse $a = 0$ y produit-elle une brusque diminution, égale à $\frac{\pi}{4}$, en annulant la fonction $e^{-ax} \frac{\sin ax}{x}$ placée sous le signe $\int$.

330*. — Calcul, par le même procédé, de $\int_0^\infty \cos x^2 \cos 2\alpha x . dx$ et de $\int_0^\infty \sin x^2 \cos 2\alpha x . dx$.

Nous avons, par des opérations diverses où figuraient des différentiations sous le signe $\int$, déduit les deux intégrales $\int_0^\infty e^{-x^2} \operatorname{coh} 2\alpha x . dx$ et $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2\alpha x . dx$ de celle de Poisson $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$, en effectuant une transformation qui, sans changer les limites zéro et ∞, revenait à multiplier la variable x par un paramètre constant. Donnons encore un exemple de ce fécond procédé d'évaluation des intégrales définies, mais un exemple où le paramètre introduit vienne simplement s'ajouter à la variable, et où, d'ailleurs, l'on n'ait pas besoin d'effectuer de différentiation d'intégrale. Pour que les limites de l'intégration ne soient pas changées, ce qui, dans les cas les plus intéressants, les rendrait moins simples, il faudra qu'elles soient infinies; car les valeurs $\pm\infty$ sont les seules que ne modifie pas d'une manière appréciable l'addition d'une quantité finie quelconque.

Partons des deux intégrales (32) [p. 127*], où nous ferons, pour simplifier, $b = 1$, et que nous doublerons afin de pouvoir leur attribuer les limites $\pm\infty$, vu la nature paire de la fonction $\cos bx^2$ ou $\sin bx^2$ y figurant sous le signe $\int$. Alors leur valeur commune sera $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, et si, pour en définir le champ d'une manière précise, nous y remplaçons provisoirement les limites $\pm\infty$ par $\pm m$, où m désignera un nombre positif très grand, nous aurons, avec une approximation indéfinie, en appelant d'ailleurs u la variable d'intégration,

$$(38) \qquad \int_{-m}^{m} \cos u^2 \, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_{-m}^{m} \sin u^2 \, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Effectuons actuellement la transformation qui consiste à ajouter un

paramètre α à la variable, en posant $u = x - \alpha$ ou, par suite, $du = dx$. Comme x, identique à $u + \alpha$, variera entre les limites $\pm m + \alpha$, et que, d'autre part, $\cos u^2$, $\sin u^2$ seront

$$\cos[\alpha^2 + (x^2 - 2\alpha x)], \quad \sin[\alpha^2 + (x^2 - 2\alpha x)],$$

c'est-à-dire

$$\cos\alpha^2 \cos(x^2 - 2\alpha x) - \sin\alpha^2 \sin(x^2 - 2\alpha x)$$

et

$$\sin\alpha^2 \cos(x^2 - 2\alpha x) + \cos\alpha^2 \sin(x^2 - 2\alpha x),$$

les relations (38) deviendront

$$(39)\quad \begin{cases} (\cos\alpha^2)\displaystyle\int_{-(m-\alpha)}^{m+\alpha} \cos(x^2 - 2\alpha x)\,dx - (\sin\alpha^2)\int_{-(m-\alpha)}^{m+\alpha} \sin(x^2 - 2\alpha x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ (\sin\alpha^2)\displaystyle\int_{-(m-\alpha)}^{m+\alpha} \cos(x^2 - 2\alpha x)\,dx + (\cos\alpha^2)\int_{-(m-\alpha)}^{m+\alpha} \sin(x^2 - 2\alpha x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{cases}$$

Isolons-y les deux intégrales ayant pour éléments $\cos(x^2 - 2\alpha x)\,dx$ et $\sin(x^2 - 2\alpha x)\,dx$, en ajoutant ces deux relations respectivement multipliées soit par $\cos\alpha^2$ et $\sin\alpha^2$, soit par $-\sin\alpha^2$ et $\cos\alpha^2$. Il viendra

$$(40)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-(m-\alpha)}^{m+\alpha} \cos(x^2 - 2\alpha x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2), \\ \displaystyle\int_{-(m-\alpha)}^{m+\alpha} \sin(x^2 - 2\alpha x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2). \end{cases}$$

Or l'arc $x^2 - 2\alpha x$, dont le cosinus et le sinus constituent, dans ces intégrales, les fonctions sous le signe $\int$, a pour dérivée $2(x - \alpha)$, et varie très lentement dans le voisinage de la valeur $x = \alpha$, mais de plus en plus vite à mesure qu'on s'éloigne de cette valeur. Comme son cosinus et son sinus changent simplement de signe chaque fois qu'il décroît ou croît de π, l'intégrale comprend, tant en deçà qu'au delà de ses principaux groupes d'éléments (dont le champ correspond évidemment aux valeurs de x voisines ou peu éloignées de α), une suite d'un très grand nombre de groupes alternativement positifs et négatifs, de moins en moins étendus et, par conséquent, de plus en plus faibles, qui ont leur somme algébrique évidemment négligeable. Il est donc clair que les derniers groupes, relatifs aux valeurs absolues très grandes de x, donnent, à la limite ou pour m infini, un total évanouissant; ce qui permet de remplacer simplement par $\pm m$, ou mieux

par $\pm\infty$, les valeurs extrêmes $\pm m + \alpha$ de x. Et l'on a

$$(41)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2 - 2\alpha x)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2), \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2 - 2\alpha x)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2). \end{cases}$$

Ajoutons enfin, respectivement, ces relations avec celles qui s'en déduisent par le changement de α en $-\alpha$, et, observant que les nouvelles fonctions sous le signe $\int$,

$$\cos(x^2 - 2\alpha x) + \cos(x^2 + 2\alpha x), \quad \sin(x^2 - 2\alpha x) + \sin(x^2 + 2\alpha x),$$

sont les fonctions *paires* $2\cos x^2 \cos 2\alpha x$, $2\sin x^2 \cos 2\alpha x$, ou que leurs produits par dx peuvent, sauf à doubler ensuite les résultats, n'être intégrés que de o à ∞, divisons finalement par 4. Il viendra

$$(42)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \cos x^2 \cos 2\alpha x\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha^2\right), \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2 \cos 2\alpha x\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha^2\right). \end{cases}$$

Ainsi se trouvent calculées simplement, pour des valeurs quelconques de leur paramètre α, les deux intégrales

$$\int_0^{\infty} (\cos x^2 \text{ ou } \sin x^2) \cos 2\alpha x\, dx,$$

à partir de leurs valeurs particulières $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ pour $\alpha = 0$.

331*. — Intégrales déduites d'autres par l'attribution, à certains paramètres, de valeurs imaginaires.

On remarquera que la seconde formule (37) [p. 131*] se déduit de la première par le changement de α en $\alpha\sqrt{-1}$, qui transforme $\operatorname{coh}(2\alpha x)$ en $\cos(2\alpha x)$ et e^{α^2} en $e^{-\alpha^2}$; que, de même, la relation (33) [p. 129*], en y faisant $a = -b\sqrt{-1}$ et, par suite,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\,\frac{1}{\sqrt{-\sqrt{-1}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{-1}}}{\sqrt{b}} = \pm\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2b}},$$

devient

$$\int_0^{\infty} e^{bx^2\sqrt{-1}}\, dx = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2b}},$$

ou bien

$$\int_0^\infty (\cos bx^2 + \sqrt{-1}\sin bx^2)\,dx = \pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}} + \sqrt{-1}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\right),$$

et donne les deux formules (32) [p. 127*], par l'égalité, dans les deux membres, des parties réelles aux parties réelles et des parties imaginaires aux parties imaginaires, sous la réserve de prendre le second membre avec son signe supérieur, à raison de la valeur évidemment positive de $\int_0^\infty \sin bx^2 dx$; etc. Donc le *passage du réel à l'imaginaire,* par l'introduction de valeurs de la forme $a + b\sqrt{-1}$ dans les paramètres d'intégrales déjà déterminées, peut faire découvrir de nouvelles intégrales à éléments cependant réels, grâce à la séparation finale, effectuée comme on vient de voir, du réel et de l'imaginaire, tant dans les éléments de l'intégrale d'où l'on part que dans sa valeur donnée. On l'avait, du reste, déjà vu (pp. 14* et 17*) pour certaines sommes de différences finies et pour certaines intégrales indéfinies.

Or ce genre de transformation constitue précisément l'un des moyens de calcul des intégrales définies, qu'il nous restait à mentionner. Il a une véritable importance comme procédé d'invention, et les analystes y ont eu très souvent recours; mais on conçoit que son emploi nécessite, en général, le contrôle d'autres méthodes plus démonstratives et plus sûres. Il ne repose, en effet, par lui-même, que sur une analogie parfois assez vague et sujette à erreur, comme le calcul des séries divergentes qu'utilisaient souvent aussi les géomètres du siècle dernier. On conçoit que des transformations effectuées soit sur ces séries, soit sur celles que forment l'infinité d'éléments imaginaires d'une intégrale de l'espèce dont il s'agit, gardent fréquemment certaines traces de propriétés présentées par d'autres séries ou sommes d'éléments analogues, mais convergentes ou réelles, et puissent être, en quelque sorte, un fil conducteur, plus ou moins saisissable, pour découvrir ces propriétés, tout en n'éclairant pas l'esprit au point d'écarter complètement les chances d'erreur.

Le surcroît désirable de lumière, en ce qui concerne un emploi régulier des imaginaires dans le calcul des intégrales définies, résulterait d'une étude, faite au point de vue spécial considéré, des fonctions où l'on introduit le symbole $\sqrt{-1}$. Mais une telle étude, bien digne de tenter les efforts des géomètres, excéderait les limites de ce Cours, au but duquel elle se trouve presque entièrement étrangère, du moins dans l'état actuel de la Science.

332*. — Calcul de certaines intégrales par le moyen d'équations différentielles qu'elles vérifient.

Enfin, un procédé de calcul qu'il est indispensable de connaître et dont d'importants exemples seront donnés ultérieurement, consiste à différentier une ou plusieurs fois l'intégrale définie proposée, par rapport à un de ses paramètres, et à transformer les résultats de ces différentiations de manière à mettre en évidence, entre l'intégrale définie et une ou plusieurs de ses dérivées, quelque relation finie, assez simple pour pouvoir conduire à la forme de l'expression de l'intégrale en fonction de son paramètre. La connaissance de certaines valeurs particulières de cette expression ou de ses dérivées les moins élevées suffit ensuite pour déterminer les constantes qui y figurent et pour achever, par conséquent, de la rendre explicite.

Soit, comme exemple, à évaluer l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$, que nous appellerons I, et que nous supposerons connue seulement pour $\alpha = 0$, alors qu'elle se réduit à l'intégrale de Poisson, $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On reconnaît immédiatement, en y remplaçant le facteur $\cos 2\alpha x$ par son maximum absolu 1, qu'elle est bien déterminée; car ses éléments correspondant aux grandes valeurs de x y ont une somme moindre que $\int_x^\infty e^{-x^2}dx$ et, par conséquent, évanouissante lorsque ces valeurs croissent sans limite. Ayant ainsi posé

$$\text{(43)} \qquad \mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx,$$

différentions sous le signe $\int$ par rapport au paramètre α : ce qui, malgré la limite supérieure infinie de l'intégrale, donnera bien un résultat déterminé et, par suite, exact (p. 112*); car la nouvelle fonction sous le signe $\int$ obtenue sera, malgré la présence d'un facteur x, infiniment petite d'un ordre supérieur à tout nombre donné pour les valeurs de x croissantes, à cause de l'exponentielle e^{-x^2}. Il viendra donc, en effectuant finalement une intégration par parties évidente :

$$\text{(44)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathrm{I}}{d\alpha} &= -\int_0^\infty e^{-x^2}(\sin 2\alpha x)2x\,dx = \int_{x=0}^{x=\infty} \sin 2\alpha x . de^{-x^2} \\ &= (e^{-x^2}\sin 2\alpha x)_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty e^{-x^2}\frac{d\sin 2\alpha x}{dx}\,dx. \end{aligned} \right.$$

Or, dans le dernier membre, le terme intégré, dont les deux facteurs e^{-x^2}, $\sin 2\alpha x$ n'y dépassent jamais la valeur absolue 1, s'annule, avec e^{-x^2}, à la limite supérieure ∞ et, avec $\sin 2\alpha x$, à la limite inférieure zéro. Ainsi, ce terme ne donne rien, tandis que le suivant, évidemment égal à $-2\alpha\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$, n'est autre que $-2\alpha I$. Telle est donc la valeur, bien finie et déterminée, de la dérivée de I; ce qui prouve la parfaite continuité de cette fonction I, puisqu'il en résulte la relation $dI = -2\alpha I\,d\alpha$. Enfin, celle-ci, écrite $\frac{dI}{I} = -2\alpha\,d\alpha = d(-\alpha^2)$, montre que, si α s'éloigne peu à peu de zéro, le logarithme népérien de I, initialement égal à la quantité bien réelle $\log\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, éprouvera, d'un instant à l'autre, des variations, $d\log I = \frac{dI}{I}$, identiques à celles, $d(-\alpha^2)$, de la quantité initialement nulle $-\alpha^2$, ou, en d'autres termes, que l'on aura constamment

$$(45)\qquad \log I - \log\frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\alpha^2 = \log e^{-\alpha^2},\quad \text{c'est-à-dire } I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}.$$

On voit comment l'équation différentielle obtenue, $\frac{dI}{d\alpha} = -2\alpha I$, a pu, en se combinant avec la connaissance que l'on avait déjà de la valeur de I pour $\alpha = 0$, conduire à la véritable expression générale de I, trouvée autrement plus haut par la seconde formule (37) [p. 131*].

Mais les équations différentielles qu'introduit l'application du procédé ne se traitent pas toujours d'une manière aussi simple; et c'est pourquoi nous serons obligés de renvoyer d'autres exemples, utiles dans quelques applications physiques, après l'exposé de la théorie générale de ces sortes d'équations, à peu près indispensable pour l'étude de celles qui s'y présentent.

TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES INTÉGRALES DÉFINIES ET USAGE DE CES EXPRESSIONS.

333*. — Premier exemple d'une expression asymptotique d'intégrale définie : cas de la fonction Γ, ou formule de Stirling.

Quand la valeur d'une intégrale définie, fonction d'un paramètre donné n, n'admet pas de forme simple, il lui arrive cependant quelquefois de tendre, à mesure que le paramètre grandit, vers une telle forme, qui finit par l'exprimer avec une approximation *relative* indéfinie. Une pareille expression, dont le rôle vis-à-vis de l'intégrale rappelle celui de l'asymptote par rapport à la branche infinie de courbe qui s'en approche, peut être appelée la *forme asymptotique* de l'intégrale ; et elle constitue souvent, comme on verra, un point de départ ou de repère précieux, pour évaluer l'intégrale, même alors que sa variable n n'est plus très grande.

Cherchons, en premier lieu, l'expression asymptotique de la fonction eulérienne $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx$, où nous supposerons, par conséquent, n très élevé. La quantité $x^n e^{-x}$ sous le signe $\int$, ayant sa dérivée, $(n-x)x^{n-1}e^{-x}$, de même signe que $n-x$, grandit depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$, pour décroître au delà, et les éléments les plus forts de l'intégrale correspondent aux valeurs de x voisines de n. Comme leur importance est capitale, il y a lieu de simplifier leur expression le plus possible ; ce que nous ferons en posant $x = n+\sqrt{2n}\,u$. Cette substitution de u à x donne, en effet,

$$(1)\qquad \Gamma(n+1) = \sqrt{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} \left(1+u\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{2n}}\,du\,;$$

et, en y observant que, pour les petites valeurs absolues de $u\sqrt{\frac{2}{n}}$, le bi-

nôme $1+u\sqrt{\frac{2}{n}}$ peut s'écrire $e^{u\sqrt{\frac{2}{n}}-\frac{u^2}{n}(1+\varepsilon)}$, avec ε de l'ordre de $\frac{u}{\sqrt{n}}$ [d'après l'expression $u\sqrt{\frac{2}{n}}-\frac{u^2}{n}+\frac{2\sqrt{2}\,u^3}{3n\sqrt{n}}-\ldots$ de $\log\left(1+u\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$ qui résulte du développement en série, (11), de la page 78], la nouvelle fonction sous le signe $\int$, $\left(1+u\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{2n}}$, devient simplement $e^{-u^2(1+\varepsilon)}$, c'est-à-dire e^{-u^2}, sauf une erreur relative négligeable tant que $u^2\varepsilon$ ou $\frac{u^3}{\sqrt{n}}$ resteront de petites fractions de l'unité.

C'est ce qui a lieu même pour de grandes valeurs absolues de u, si l'on a pris n suffisamment fort; et, par conséquent, dans l'intégrale figurant au second membre de (1), les *principaux éléments*, réductibles à la forme $e^{-u^2}du$, ont, pour n assez grand, leur somme aussi peu différente que l'on veut de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}du$, ou du double, $\sqrt{\pi}$, de l'intégrale de Poisson. Ce sont, par exemple, tous les éléments compris entre les deux limites $u=\pm\sqrt{\log n}$, lesquelles, rendant l'expression $\frac{u^3}{\sqrt{n}}$ égale à $\pm\left(\frac{\log n}{n^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$, laissent bien sa valeur absolue inférieure à toute petite fraction donnée, si n est assez grand, et néanmoins réduisent la fonction sous le signe $\int$, ou, à fort peu près, e^{-u^2}, à la quantité insensible $e^{-\log n}=\frac{1}{n}$.

Il suit de là que cette fonction est au plus de l'ordre de $\frac{1}{n}$ hors des limites $u=\pm\sqrt{\log n}$ et que, par suite, tous les éléments compris, *extérieurement à ces dernières*, depuis $u=-\sqrt{\frac{n}{2}}$, limite inférieure de l'intégrale à calculer, jusqu'à la valeur $u=2\sqrt{\frac{n}{2}}$, ayant leur champ total inférieur à $3\sqrt{\frac{n}{2}}$, auront leur somme moindre que $\frac{3}{n}\sqrt{\frac{n}{2}}$ ou $\frac{3}{\sqrt{2n}}$, c'est-à-dire négligeable. Et il en sera de même des autres éléments non encore évalués, dont le champ s'étend de $u=2\sqrt{\frac{n}{2}}$ à l'infini; car, si on les intègre séparément de $u=2\sqrt{\frac{n}{2}}$

à $u = 3\sqrt{\frac{n}{2}}$, puis de $u = 3\sqrt{\frac{n}{2}}$ à $u = 4\sqrt{\frac{n}{2}}$, etc., le facteur $\left(1 + u\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n$ n'atteindra pas 4^n dans le premier intervalle, ni 5^n dans le second, ni 6^n dans le troisième, etc.; en sorte que la somme totale de ces éléments sera inférieure à l'expression immédiatement intégrable,

$$4^n \int_{2\sqrt{\frac{n}{2}}}^{3\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-u\sqrt{2n}} du + 5^n \int_{3\sqrt{\frac{n}{2}}}^{4\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-u\sqrt{2n}} du + \ldots < \frac{1}{\sqrt{2n}} [4^n e^{-2n} + 5^n e^{-3n} + 6^n e^{-4n} + \ldots].$$

Or, dans le second membre de cette inégalité, obtenu en remplaçant par $+\infty$ les limites supérieures des intégrales qui figurent au premier, le rapport, $\left(\frac{4+k}{3+k}\frac{1}{e}\right)^n$, du $k+1^{\text{ième}}$ terme au $k^{\text{ième}}$, décroît évidemment lorsque k grandit et n'égale par suite $\left(\frac{5}{4e}\right)^n$ qu'au début. Donc ce second membre se trouve moindre que la progression par quotient $\frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\frac{2}{e}\right)^{2n}\left[1 + \left(\frac{5}{4e}\right)^n + \left(\frac{5}{4e}\right)^{2n} + \ldots\right]$, formée à partir du même premier terme, et d'une somme négligeable à cause de $e > 2$.

Ainsi, quand n est très grand, l'intégrale qui paraît au second membre de (1) tend à se réduire à ses éléments principaux, dont le champ s'étend entre les limites $u = \pm\sqrt{\log n}$, et dont la somme converge vers $\sqrt{\pi}$. La formule (1) devient, par conséquent, en appelant $\sqrt{\pi}(1+\varepsilon)$ la valeur exacte de l'intégrale ou ε une quantité évanouissante,

$$(2) \qquad \Gamma(n+1) = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon);$$

et l'on peut dire que la forme asymptotique de la fonction $\Gamma(n+1)$ est $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, en ce sens du moins que le rapport de $\Gamma(n+1)$ à cette expression très grande tend vers l'unité.

Prenons les logarithmes népériens des deux membres; et il viendra comme formule asymptotique, exacte à la limite, de la fonction $\log\Gamma(n+1)$,

$$(3) \qquad \log\Gamma(n+1) = n\log n - n + \log\sqrt{2\pi n} \quad \text{(pour } n \text{ infini)}.$$

Lorsque, en particulier, la variable n est entière, $\Gamma(n+1)$ a la

valeur $1.2.3\ldots n$. Le second membre fournit donc une expression approchée du logarithme du produit des n premiers facteurs entiers à partir de 1, pourvu que leur nombre soit un peu grand. Ce second membre constitue alors la partie principale d'une série semi-convergente célèbre, appelée *formule de Stirling*, qui permet d'obtenir avec une grande approximation le logarithme dont il s'agit, à la condition de n'y prendre que le nombre de termes convenable.

334*. — **Expression indéfiniment approchée (sous forme de produit) qui résulte, pour toutes les valeurs de $\Gamma(n)$, de la forme asymptotique de cette fonction.**

Connaissant maintenant $\Gamma(n+1)$, à une erreur *relative* près évanouissante, pour toutes les valeurs très grandes de n, nous pourrons, par la formule $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, que nous avons déduite (p. 35*) d'une intégration par parties, rattacher $\Gamma(n)$ non plus aux *premières* valeurs de cette fonction, comprises dans l'intervalle allant de $n=0$ à $n=1$, procédé qui nous a réussi seulement pour les valeurs de n multiples de $\frac{1}{2}$, mais bien aux *dernières* (si l'on peut ainsi dire), en ajoutant successivement à n un nombre indéfini d'unités au lieu d'en retrancher. Il viendra de la sorte, pour $\Gamma(n)$, la suite d'expressions

$$(4)\quad \Gamma(n)=\frac{\Gamma(n+1)}{n}=\frac{\Gamma(n+2)}{n(n+1)}=\ldots=\frac{\Gamma(n+p+1)}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}.$$

Supposons que, n étant une valeur positive quelconque de la variable, on lui ait ainsi ajouté un nombre très grand, $p+1$, d'unités, de manière à avoir, par la formule (2),

$$(5)\quad \begin{cases} \Gamma(p+n+1)=\left(\dfrac{p+n}{e}\right)^{p+n}\sqrt{2\pi(p+n)}(1+\varepsilon) \\ \qquad\qquad =\left(\dfrac{p}{e}\right)^{p+n}\left(1+\dfrac{n}{p}\right)^{p}\left(1+\dfrac{n}{p}\right)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi p}(1+\varepsilon). \end{cases}$$

Nous pourrons, dans le troisième membre, remplacer $\sqrt{\pi p}$ par la valeur $\frac{2}{1}\frac{4}{3}\frac{6}{5}\cdots\frac{2p}{2p-1}$, que donne pour cette racine, avec une erreur relative négligeable, la formule de Wallis (t. I, p. 29*), et qui peut s'écrire aussi $\frac{2^p(1.2.3\ldots p)}{1.3.5\ldots(2p-1)}$. D'autre part, $\left(1+\frac{n}{p}\right)^p$ tend vers $\lim\left(1+\frac{n}{m}\right)^m$ ou vers e^n, tandis que $\left(1+\frac{n}{p}\right)^{n+\frac{1}{2}}$ tend vers l'unité.

Donc, en appelant ε' une quantité évanouissante, comme ε, pour p infini, la formule (5) revient à

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \Gamma(n+p+1) &= \left(\frac{p}{e}\right)^{p+n} e^n \frac{2^p(1.2.3\ldots p)}{3.5\ldots(2p-1)}\sqrt{2}(1+\varepsilon') \\ &= p^n\left(\frac{2p}{e}\right)^p \frac{1.2.3\ldots p}{3.5\ldots(2p-1)}\sqrt{2}(1+\varepsilon'). \end{aligned}\right.$$

Or, si l'on avait simplement, dans cette formule, $n=0$, son premier membre serait $1.2.3\ldots p$, et, son troisième membre, $\left(\frac{2p}{e}\right)^p \frac{1.2.3\ldots p}{3.5\ldots(2p-1)}\sqrt{2}(1+\varepsilon')$. L'égalité des deux membres dans ce cas particulier montre que, sauf erreur relative négligeable, $\left(\frac{2p}{e}\right)^p \frac{1}{3.5\ldots(2p-1)}\sqrt{2}$ vaut l'unité; et, par conséquent, la formule (6) peut encore s'écrire, en appelant ε_1 une nouvelle quantité évanouissante, analogue à ε ou à ε',

$$(7)\quad \Gamma(n+p+1) = \Gamma(p+1)p^n(1+\varepsilon_1) = p^n(1.2.3\ldots p)(1+\varepsilon_1).$$

Transportons enfin cette dernière valeur de $\Gamma(n+p+1)$ dans (4), et il viendra, pour définir $\Gamma(n)$ comme limite d'une fonction algébrique,

$$(8)\quad \Gamma(n) = \frac{p^n}{n}\,\frac{1}{n+1}\,\frac{2}{n+2}\,\frac{3}{n+3}\cdots\frac{p}{n+p} \qquad (\text{pour } p \text{ infini}).$$

On remarquera que, dans le facteur p^n du second membre, le très grand nombre entier p peut être accru d'une constante k quelconque sans changement du résultat limite; car remplacer p^n par $(p+k)^n$ revient à multiplier par $\left(1+\frac{k}{p}\right)^n = 1+\frac{nk}{p}+\frac{n(n-1)k^2}{1.2p^2}+\ldots$, expression tendant vers 1 pour p infini. Si la formule (8) devait servir au calcul numérique de $\Gamma(n)$, on choisirait naturellement k de manière que, p étant un entier donné, assez grand, mais fini, le second membre se trouvât déjà le plus près possible de sa limite, ou fût le moins modifié possible par les changements de p en $p+1$, en $p+2$, etc. Or le changement de p en $p+1$ multiplie l'expression dont il s'agit, savoir $\frac{(p+k)^n}{n}\,\frac{1}{n+1}\,\frac{2}{n+2}\cdots\frac{p}{n+p}$, par $\frac{(p+k+1)^n}{(p+k)^n}\,\frac{p+1}{n+p+1}$, facteur équivalent à $\left(1+\frac{k}{p+1}\right)^n\left(1+\frac{k-1}{p+1}\right)^{-n}\left(1+\frac{n}{p+1}\right)^{-1}$, et qui aisément développable, par un triple emploi de la formule du binôme, suivant les puissances des petites quantités $\frac{k}{p+1}$, $\frac{k-1}{p+1}$, $\frac{n}{p+1}$, c'est-

à-dire suivant les puissances *négatives* de $p+1$, devient la série $1+\frac{n(1+n-2k)}{2(p+1)^2}+\ldots$, ou, sous forme d'exponentielle (toujours développable suivant les puissances de son exposant), $e^{\frac{n(1+n-2k)}{2(p+1)^2}+\cdots}$. Un changement ultérieur de $p+1$ en $p+2$ introduirait de même, à fort peu près, le nouveau facteur $e^{\frac{n(1+n-2k)}{2(p+2)^2}+\cdots}$, et ainsi de suite; en sorte que le résultat approché, $\frac{(p+k)^n}{n}\frac{1}{n+1}\frac{2}{n+2}\cdots\frac{p}{n+p}$, aurait besoin, pour devenir $\Gamma(n)$, d'être multiplié par

$$e^{\frac{n(1+n-2k)}{2}\left[\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}+\cdots\right]+\cdots}.$$

On devra donc, quand il faudra rendre ce facteur correctif aussi voisin que possible de l'unité, choisir $k=\frac{1+n}{2}$, afin d'y réduire l'exposant de e à des termes de l'ordre de $\frac{1}{(p+1)^3}$ seulement.

Mais la relation plus simple (8), où $k=0$, est préférable comme formule théorique. On en déduit aisément les propriétés de $\Gamma(n)$ déjà démontrées plus haut. En premier lieu, si l'on change n en $n+1$ dans le second membre, celui-ci gagne un facteur p au numérateur et un facteur $n+p+1$ au dénominateur, mais perd un facteur n au dénominateur. Il vient donc $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\frac{p}{n+p+1}$, c'est-à-dire, en rendant p infini, $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$, comme on le savait. En deuxième lieu, si l'on fait successivement $n=1$ et $n=\frac{1}{2}$, le second membre de (8) se réduit, dans un cas, à $\frac{p}{n+p}$, fraction qui devient bien l'unité pour p infini [1], et, dans l'autre cas, à $\frac{2\sqrt{p}}{2p+1}\left(\frac{2}{1}\frac{4}{3}\cdots\frac{2p}{2p-1}\right)$, quantité où le produit entre parenthèses peut être, à la limite, remplacé par $\sqrt{\pi p}$, d'après la formule de Wallis; ce qui donne bien, finalement, $\sqrt{\pi}$.

La formule (8) conduit encore, presque sans calculs, à une relation simple qui, dans l'intervalle compris de $n=0$ à $n=1$, existe entre les valeurs de Γ correspondant aux valeurs de n équidistantes du milieu $n=\frac{1}{2}$ de l'intervalle, et qui permettra, par suite, de déduire Γ,

---

[1] Ce second membre (8), rendu plus convergent par la substitution, à p^n, de $\left(p+\frac{1+n}{2}\right)^n$, est alors exactement $\Gamma(1)=1$.

pour toute une moitié de l'intervalle, de ses valeurs dans l'autre moitié. A cet effet, supposant n plus petit que 1, multiplions le second membre de (8) par ce qu'il devient quand on y substitue $1-n$ à n. Si nous associons deux à deux, dans le résultat, les facteurs p^n, p^{1-n} et $1 \pm n$, $2 \pm n, \ldots, p \pm n$, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \Gamma(n)\Gamma(1-n) &= \lim \frac{p}{n} \frac{1}{1-n^2} \frac{4}{4-n^2} \cdots \frac{p^2}{p^2-n^2} \frac{1}{1-n+p} \\ &= \lim \frac{1}{n\left(1-\frac{n^2}{1}\right)\left(1-\frac{n^2}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{n^2}{p^2}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Or la formule qui permet de décomposer un sinus en ses facteurs élémentaires (t. I, p. 27*) montre que le produit indéfini $n\left(1-\frac{n^2}{1}\right)\left(1-\frac{n^2}{4}\right)\cdots$ égale $\frac{\sin n\pi}{\pi}$. Donc il vient, en définitive,

$$(9) \qquad \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi},$$

relation due à Euler et qui, pour $n=\frac{1}{2}$, donne bien $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$.

Le produit $\Gamma(n)\Gamma(1-n)$, identique à $\frac{\Gamma(n)\Gamma(1-n)}{\Gamma(n+1-n)}$, exprime, d'après la formule (26) de la page 123*, l'intégrale eulérienne de première espèce $B(n, 1-n)$ ou $\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{-n}dx$. Posons, dans celle-ci,

$$1-x = \left(1+u^{\frac{1}{n}}\right)^{-1}$$

$\left[\text{d'où } dx = \frac{1}{n}\left(1+u^{\frac{1}{n}}\right)^{-2} u^{\frac{1}{n}-1} du \text{ et } x = \left(1+u^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} u^{\frac{1}{n}}\right]$; ce qui fait croître la nouvelle variable u de zéro à l'infini pendant que x va de zéro à 1. Nous aurons $B(n, 1-n) = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^{\frac{1}{n}}}$; et la relation (9), multipliée par n, donnera la formule, remarquée également par Euler,

$$(10) \qquad (\text{Pour } n \text{ compris entre zéro et } 1) \int_0^\infty \frac{du}{1+u^{\frac{1}{n}}} = \frac{n\pi}{\sin n\pi}.$$

Pour n égal à 1 et, à plus forte raison, pour $n > 1$, l'intégrale du premier membre, dont tous les éléments éloignés grandissent avec n, est infinie.

335*. — Deuxième exemple : expressions asymptotiques de $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh}^n x}$ et de $\int_{-\infty}^{x} \frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh}^n x}$.

Considérons, en deuxième lieu, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh}^n x}$, dont le paramètre positif n est supposé très élevé, et où $f(x)$ désigne une fonction continue, toujours finie, ou, au plus, de l'ordre de $\operatorname{coh}^k x$ pour les grandes valeurs absolues de x, k étant un exposant positif donné. De part et d'autre de $x = 0$, le dénominateur $\operatorname{coh}^n x$ croîtra très rapidement, de sorte que les éléments principaux de l'intégrale correspondront aux petites valeurs absolues de x.

Afin d'exprimer le plus simplement possible ces éléments principaux, réduisons-y $\operatorname{coh} x$ ou $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots$ [en prenant son logarithme naturel, savoir

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots\right)^2 + \ldots = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \ldots\Bigg]$$

à l'exponentielle $e^{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \ldots}$, que nous pourrons écrire $e^{\frac{x^2}{2}(1+\varepsilon)}$, si ε désigne une petite quantité, de l'ordre de x^2. Les éléments dont il s'agit deviennent alors $f(x) e^{-\frac{n}{2}x^2} e^{-\frac{n}{2}x^2\varepsilon} dx$, et, tant que $\frac{n}{2} x^2 \varepsilon$, qui est de l'ordre de $n x^4$, reste une très petite fraction de l'unité, ils sont réductibles à $f(x) e^{-\frac{n}{2}x^2} dx$ ou, sensiblement, vu la petitesse de x, à $f(0) e^{-\frac{n}{2}x^2} dx$. Pour y simplifier l'exponentielle, posons $x = u\sqrt{\frac{2}{n}}$ $\left(\text{d'où } dx = \sqrt{\frac{2}{n}}\, du\right)$, et ils deviendront $f(0)\sqrt{\frac{2}{n}}\, e^{-u^2} du$. Cette forme simplifiée, applicable tant que $n x^4$ ou $\frac{4u^4}{n}$ est une minime fraction de l'unité, subsiste, comme dans le calcul précédent de $\Gamma(n+1)$ [p. 139*], même quand u atteint les valeurs $u = \pm\sqrt{\log n}$, déjà très éloignées de zéro ; car alors $\frac{u^4}{n}$ n'est encore que la petite quantité $\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right)^2$; et, par conséquent, pour n de plus en plus considérable, la somme des

éléments principaux dont il s'agit tend vers

$$f(o)\sqrt{\frac{2}{n}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = f(o)\sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

C'est dire qu'elle est très petite, mais seulement de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Or il est facile de voir que l'on n'obtient qu'une quantité d'un ordre de petitesse supérieur en ajoutant tous les autres éléments, où $\operatorname{coh}^{-n} x = e^{-u^2(1+\varepsilon)}$ atteint au plus sa valeur, $\frac{1}{n}$ environ, relative aux limites précédentes $u = \pm\sqrt{\log n}$ embrassant les éléments regardés comme principaux.

Pour le reconnaître, partageons le champ total de ces éléments en deux, dans l'un desquels, borné par les valeurs $x = \pm\log 2 = \pm 0,693\ldots$, on ait $e^{\sqrt{x^2}} < 2$, tandis que, dans l'autre, étendu de $-\infty$ à $+\infty$ en dehors des limites $x = \pm\log 2$, $e^{\sqrt{x^2}}$ dépassera 2 (¹). Tous les éléments compris dans le premier, qui n'égale pas 2, et où le facteur $f(x)$, indépendant de n, ne dépasse pas une certaine grandeur, tandis que l'autre facteur sous le signe $\int$, $\operatorname{coh}^{-n} x$, y atteint à peine $\frac{1}{n}$, fourniront au plus une somme de l'ordre de $\frac{1}{n}$, négligeable, par conséquent, en comparaison de la précédente. Quant aux éléments pour lesquels $e^{\sqrt{x^2}}$ dépasse 2, la fonction $\operatorname{coh} x = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{x^2}} + e^{-\sqrt{x^2}}\right)$, supérieure à $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x^2}}$, y donnera $\operatorname{coh}^{-n} x < 2^n e^{-n\sqrt{x^2}}$; et, d'autre part, $f(x)$ y sera, par hypothèse, tout au plus comparable au produit d'un certain nombre M par l'exponentielle $e^{k\sqrt{x^2}}$. Ces éléments, pour l'un quelconque des deux intervalles allant soit de $x = \log 2$ à $x = \infty$, soit de $x = -\infty$ à $x = -\log 2$, auront donc une somme inférieure à

$$\mathrm{M}.2^n \int_{\log 2}^{\infty} e^{-(n-k)x}\,dx = \mathrm{M}\,\frac{2^n}{n-k}\left[-e^{-(n-k)x}\right]_{x=\log 2}^{x=\infty} = \mathrm{M}\,\frac{2^n}{n-k}\,2^{-(n-k)} = \frac{2^k \mathrm{M}}{n-k};$$

et cette somme est encore, au plus, de l'ordre de l'inverse de n, c'est-à-dire négligeable.

(¹) Comme on ne considère ordinairement que la valeur arithmétique ou positive des radicaux réels, la notation $\sqrt{x^2}$ est employée ici pour désigner la valeur *absolue* de x, c'est-à-dire $+x$ ou $-x$ suivant que x est positif ou négatif.

Il vient, en résumé, pour l'expression asymptotique cherchée de l'intégrale,

$$(11)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh}^n x} = f(0)\sqrt{\frac{2\pi}{n}} \text{ (quand } n \text{ est très grand).}$$

On voit que, lorsque n croît de plus en plus, l'intégrale, tout en se rapetissant, se concentre autour de $x=0$. Si donc on lui assignait d'autres limites que $\pm\infty$, de manière à lui ôter une partie de ses éléments, sa valeur, pour n très grand, ne changerait dans un rapport appréciable qu'à l'instant où le rétrécissement de son champ, atteignant les valeurs de x voisines de zéro, lui ferait perdre ses éléments principaux. Ainsi l'on pourra, par exemple, écrire

$$(12)\qquad \text{(quand } n \text{ est très grand)} \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh}^n x} = \begin{cases} \text{zéro (pour } x<0\text{),} \\ f(0)\sqrt{\dfrac{2\pi}{n}} \text{ (pour } x>0\text{).} \end{cases}$$

336*. — Développement en série, grâce à ces expressions asymptotiques, des intégrales de la forme $\int \frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh}^n x}$, quand $f(x)$ est une fonction proportionnelle à sa dérivée seconde.

Lorsque $f(x)$ est une fonction qui se reproduit, à un facteur constant près négatif ou positif $\mp k^2$, par deux différentiations consécutives, des intégrations par parties ramènent aisément l'intégrale

$$(13)\qquad I_n = \int \frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh}^n x},$$

où l'exposant n du dénominateur est supposé positif, à une autre de même forme, mais avec son paramètre n accru de deux unités, et par suite, de proche en proche, à une *dernière,* I_{n+p}, assez élevée pour admettre, avec une approximation relative indéfinie, l'expression asymptotique (12). L'intégrale proposée I_n se trouve, de la sorte, développée finalement en une série, qui provient des termes détachés ou intégrés à chacune de ces opérations, et en un *résidu* ou *terme complémentaire,* contenant ce que l'intégration par parties et les dédoublements auront été impuissants à extraire ou à résoudre, mais qu'évaluera la formule asymptotique (12).

Changeons, en effet, dans (13), n en $n+2$, ou considérons I_{n+2}; et introduisons-y sous le signe $\int$, à côté de $f(x)$, le facteur $\operatorname{coh}^2 x - \operatorname{sih}^2 x$, égal à 1. L'intégrale I_{n+2} se dédoublera en deux, savoir I_n et

$-\int\frac{f(x)\,\text{sih}^2 x\,dx}{\text{coh}^{n+2}x}$, que l'on peut écrire $\int\frac{f(x)\,\text{sih}\,x}{n+1}\,d\,\frac{1}{\text{coh}^{n+1}x}$. Or cette dernière, intégrée par parties, donnera

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{n+1}\,\frac{f(x)\,\text{sih}\,x}{\text{coh}^{n+1}x}-\frac{1}{n+1}\int\frac{f(x)\,\text{coh}\,x+f'(x)\,\text{sih}\,x}{\text{coh}^{n+1}x}\,dx\\&\quad=\frac{1}{n+1}\,\frac{f(x)\,\text{sih}\,x}{\text{coh}^{n+1}x}-\frac{\text{I}_n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)n}\int f'(x)\,d\,\frac{1}{\text{coh}^n x};\end{aligned}\right.$$

et le dernier terme, traité de même au moyen de l'intégration par parties, deviendra

$$\frac{1}{(n+1)n}\left[\frac{f'(x)}{\text{coh}^n x}-\int\frac{f''(x)\,dx}{\text{coh}^n x}\right]=\frac{1}{(n+1)n}\left[\frac{f'(x)}{\text{coh}^n x}\pm k^2\,\text{I}_n\right].$$

On aura donc, en définitive, à une constante arbitraire près,

$$(14)\qquad \text{I}_{n+2}=\frac{1}{n(n+1)}\,\frac{nf(x)\,\text{sih}\,x+f'(x)\,\text{coh}\,x}{\text{coh}^{n+1}x}+\frac{n^2\pm k^2}{n(n+1)}\,\text{I}_n.$$

La constante arbitraire à ajouter au second membre sera même nulle si, comme nous l'admettrons, on prend $-\infty$ pour limite inférieure. Car l'intégrale I_n étant alors supposée finie même quand on la compte à partir de cette limite, il est entendu, par le fait même, que $f(x)$, lorsqu'il a la forme $\text{A}\,\text{sih}(\text{const.}\pm kx)+\text{B}\,\text{coh}(\text{const.}\pm kx)$ et qu'il devient, par conséquent, infini, comme $\text{coh}\,kx$, pour $x=\pm\infty$, le devient infiniment moins que le dénominateur $\text{coh}^n x$. Or, $\text{coh}\,x$ se trouvant comparable à $e^{\sqrt{x^2}}$ et $\text{coh}^n x$, comparable à $e^{n\sqrt{x^2}}$ ou à $\text{coh}\,nx$, il suit de là que le nombre positif k est alors inférieur à n, et que, dans (14), le double terme intégré, où $f(x)$ et $f'(x)$ deviennent de l'ordre de $\text{coh}\,kx$ pour x très grand, tend vers zéro, comme si $f(x)$ et $f'(x)$ étaient proportionnels à des sinus ou à des cosinus circulaires, vu le dénominateur $\text{coh}^{n+1}x$, dont le rapport à un numérateur, $nf(x)\,\text{sih}\,x+f'(x)\,\text{coh}\,x$, de l'ordre de $\text{coh}\,kx\,\text{coh}\,x$, grandit sans limite. Ainsi, le second terme de la formule (14) s'annulera pour $x=-\infty$, comme le premier et le troisième affectés de I_{n+2} et I_n; en sorte que la constante arbitraire à joindre au second membre se trouvera bien réduite à zéro.

Cette formule (14) serait propre à donner I_{n+2} si I_n était connu. Mais, comme nous voulons ramener, au contraire, I_n à I_{n+2}, il faut la

résoudre par rapport à I_n. Il vient

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} I_n &= -\frac{nf(x)\operatorname{sih}x + f'(x)\operatorname{coh}x}{(n^2 \pm k^2)\operatorname{coh}^{n+1}x} + \frac{n(n+1)}{n^2 \pm k^2} I_{n+2} \\ &= -\frac{\operatorname{coh}^{-2n}x}{n^2 \pm k^2}\,\frac{d.f(x)\operatorname{coh}^n x}{dx} + \frac{n(n+1)}{n^2 \pm k^2} I_{n+2}. \end{aligned} \right.$$

Supposons, par exemple, que l'on parte de $n=1$ et que l'on emploie le second membre de (15); I_1 se dédoublera en deux termes, l'un, de forme finie, $-\dfrac{f(x)\operatorname{sih}x + f'(x)\operatorname{coh}x}{(1 \pm k^2)\operatorname{coh}^2 x}$, l'autre, égal à $\dfrac{1.2}{1 \pm k^2} I_3$. Puis celui-ci, par une application du même second membre de (15) faite en prenant $n=3$, donnera pareillement un terme de forme finie, plus l'expression $\dfrac{1.2}{1 \pm k^2}\,\dfrac{3.4}{9 \pm k^2} I_5$; et ainsi de suite à l'infini. Donc I_1 se décomposera en une série, complétée par le terme en quelque sorte *résiduel*, que j'appellerai T_1,

$$(16)\qquad T_1 = \lim \frac{1.2}{1 \pm k^2}\,\frac{3.4}{9 \pm k^2}\,\frac{5.6}{25 \pm k^2} \cdots \frac{p(p+1)}{p^2 \pm k^2} I_{p+2}.$$

Or, d'après (12), I_{p+2} y vaut, ou zéro, si la limite supérieure de l'intégrale est négative, ou $f(0)\sqrt{\dfrac{2\pi}{p+2}}$ si cette limite est positive; et, d'autre part, $\sqrt{\dfrac{2\pi}{p+2}}$ ou, sensiblement, $\dfrac{\pi}{\sqrt{\pi\dfrac{p+1}{2}}}$, peut, d'après la formule de Wallis (t. I, p. 29*), être remplacé par $\pi\dfrac{1.3.5\ldots p}{2.4.6\ldots(p+1)}$. Le terme T_1, donné par (16), devient donc : 1° zéro, si la limite supérieure de l'intégrale est négative, et, 2°,

$$(17)\quad T_1 = \frac{\pi f(0)}{\left(1 \pm \frac{k^2}{1}\right)\left(1 \pm \frac{k^2}{9}\right)\left(1 \pm \frac{k^2}{25}\right)\cdots} = \frac{\pi f(0)}{\left(\operatorname{coh}\frac{k\pi}{2} \text{ ou } \cos\frac{k\pi}{2}\right)},$$

si la limite supérieure de l'intégrale est positive, la dernière expression (17) résultant, comme on voit, de la précédente (17), en vertu des formules (t. I, pp. 31* et 27*) qui donnent les facteurs du second degré d'un cosinus soit hyperbolique, soit naturel.

Le résidu ou terme complémentaire T_1, qu'il faut, pour exprimer l'intégrale I_1, joindre à la série obtenue, prend donc tout à coup, après avoir, jusque-là, été nul, la valeur (17), à l'instant où le champ de l'intégrale, compté à partir de $x = -\infty$, commence à atteindre les valeurs positives de x. Comme l'intégrale I_1 constitue évidemment

une fonction continue de sa limite supérieure, c'est non pas elle, mais sa partie développée en série, qui présente une discontinuité pour $x=0$ et qui, à ce moment, sans perdre définitivement sa convergence, décroît brusquement de la quantité (17). La question traitée offre donc l'exemple curieux d'une série convergente, qui, en deçà d'une certaine limite, représente une fonction continue, mais qui ne l'exprime plus au delà, si ce n'est à une constante près.

Une fois I_1 connu, on pourra, par la formule (14), en déduire I_3, puis I_5, etc.

On évaluerait de la même manière I_2 et puis I_4, I_6, ... Le terme complémentaire, que j'appellerai T_2, du développement de I_2, serait évidemment, dans le cas d'une limite supérieure positive,

$$\frac{2.3}{4 \pm k^2}\,\frac{4.5}{16 \pm k^2}\cdots\frac{p(p+1)}{p^2 \pm k^2}\sqrt{\frac{2\pi}{p+2}}\,f(0).$$

En y remplaçant $\sqrt{\frac{2\pi}{p+2}}$ ou, sensiblement, $\frac{2}{p+1}\sqrt{\pi\frac{p}{2}}$, d'après la formule de Wallis, par $\frac{2}{p+1}\,\frac{2.4\ldots p}{1.3\ldots(p-1)}$, on trouverait successivement

$$(18)\quad \begin{cases} T_2 = 2\,\dfrac{2^2}{4 \pm k^2}\,\dfrac{4^2}{16 \pm k^2}\cdots\dfrac{p^2}{p^2 \pm k^2}\,f(0) \\[2ex] \quad = \dfrac{k\pi f(0)}{\dfrac{k\pi}{2}\left(1 \pm \dfrac{k^2}{4}\right)\left(1 \pm \dfrac{k^2}{16}\right)\left(1 \pm \dfrac{k^2}{36}\right)\cdots} = \dfrac{k\pi f(0)}{\left(\operatorname{sih}\dfrac{k\pi}{2} \text{ ou } \sin\dfrac{k\pi}{2}\right)}. \end{cases}$$

Il est évident que, sauf une complication plus grande des résultats, on obtiendrait de même les valeurs de I_n correspondant à des indices n fractionnaires.

Toutes ces intégrales se simplifient quand leur limite supérieure devient infinie et que leur champ s'étend, par suite, de $x=-\infty$ à $x=\infty$. Alors, en effet, les termes déduits successivement du second de la formule (15) s'annulent, et la valeur de l'intégrale se réduit au terme résidu ou complémentaire T_n. Les formules (17) et (18) donnent donc, notamment,

$$(19)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh} x} = \frac{\pi f(0)}{\left(\operatorname{coh}\dfrac{k\pi}{2} \text{ ou } \cos\dfrac{k\pi}{2}\right)}, \\[3ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,dx}{\operatorname{coh}^2 x} = \frac{k\pi f(0)}{\left(\operatorname{sih}\dfrac{k\pi}{2} \text{ ou } \sin\dfrac{k\pi}{2}\right)}, \end{cases}$$

formules doubles, où les dénominateurs coh $\frac{k\pi}{2}$ et sih $\frac{k\pi}{2}$ doivent se prendre quand $f(x)$ est un sinus ou un cosinus circulaire, c'est-à-dire quand $f''(x) = -k^2 f(x)$, tandis qu'il faut y employer les dénominateurs cos $\frac{k\pi}{2}$ et sin $\frac{k\pi}{2}$, quand $f(x)$ est composé de cosinus et de sinus hyperboliques, c'est-à-dire quand $f''(x) = k^2 f(x)$. On remarquera que, pour k infiniment petit, les variations de $f(x)$ deviennent négligeables, cette fonction ne différant pas de $f(0)$ dans tous les éléments tant soit peu influents des deux intégrales (19), ou qui correspondent à des valeurs finies de x. D'ailleurs, les seconds membres de (19) se réduisent alors à $\pi f(0)$ et à $2f(0)$; en sorte qu'il vient, par la suppression du facteur commun $f(x)$ ou $f(0)$,

$$(20) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{coh} x} = \pi, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\operatorname{coh}^2 x} = 2,$$

résultat dont le second avait déjà été donné à la page 68 [deuxième formule (19)].

En vue d'une application ultérieure (n° 403*) à l'intégration d'une équation différentielle importante, formons encore les expressions de I_1 et de $\frac{2}{k} I_3$, pour le cas où, c étant un certain paramètre, on a

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \text{soit } \sin(kc - kx), \text{ soit } \operatorname{sih}(kc - kx); \\ \quad \text{d'où} \\ f'(x) = \text{soit } -k\cos(kc - kx), \text{ soit } -k \operatorname{coh}(kc - kx), \end{array} \right.$$

et où les intégrations se font de $x = -\infty$ à $x = c$. Dans le second terme de (15), $f(x)$ et $f'(x)$, où il faut poser $x = c$, deviennent respectivement zéro et $-k$; ce qui réduit cette formule (15) à

$$(22) \qquad I_n = \frac{k}{(n^2 \pm k^2) \operatorname{coh}^n c} + \frac{n(n+1)}{(n^2 \pm k^2)} I_{n+2};$$

et, vu que, d'ailleurs, pour $x = 0$, $f(x)$ devient, dans (17), $f(0) = \sin kc$ ou $\operatorname{sih} kc$, on trouve aisément

$$(23) \qquad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = T_1 + \dfrac{k}{(1 \pm k^2) \operatorname{coh} c} + \dfrac{1.2}{(1 \pm k^2)} \dfrac{k}{(9 \pm k^2) \operatorname{coh}^3 c} \\ \qquad + \dfrac{1.2}{1 \pm k^2} \dfrac{3.4}{9 \pm k^2} \dfrac{k}{(25 \pm k^2) \operatorname{coh}^5 c} + \ldots, \\ \text{avec } T_1 = 0 \text{ pour } c < 0, \text{ et } T_1 = \dfrac{\pi(\sin kc \text{ ou } \operatorname{sih} kc)}{\left(\operatorname{coh} \dfrac{k\pi}{2} \text{ ou } \cos \dfrac{k\pi}{2}\right)} \text{ pour } c > 0. \end{array} \right.$$

Enfin $\frac{2}{k}$ I_3 s'obtient en faisant $n = 1$ dans la relation (22), qui donne alors $\frac{2}{k} I_3 = -\frac{1}{\operatorname{coh} c} + \frac{1 \pm k^2}{k} I_1$, et en substituant à I_1 sa valeur (23). Si l'on appelle R le produit $\frac{1 \pm k^2}{k} T_1$, il vient

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{2}{k} I_3 = R + \frac{1.2}{9 \pm k^2} \frac{1}{\operatorname{coh}^3 c} + \frac{1.2}{9 \pm k^2} \frac{3.4}{25 \pm k^2} \frac{1}{\operatorname{coh}^5 c} + \ldots \\
&\qquad + \frac{1.2}{9 \pm k^2} \frac{3.4}{25 \pm k^2} \cdots \frac{(2m-1)(2m)}{(2m+1)^2 \pm k^2} \frac{1}{\operatorname{coh}^{2m+1} c} + \ldots, \\
&\text{avec}\quad R = 0, \text{ pour } c < 0, \text{ et} \\
&\qquad R = \pi \frac{1 \pm k^2}{k} \left(\frac{\sin kc}{\operatorname{coh} \frac{k\pi}{2}} \text{ ou } \frac{\operatorname{sih} kc}{\cos \frac{k\pi}{2}} \right), \text{ pour } c > 0.
\end{aligned}
\right.
$$

337*. — Troisième exemple : expressions asymptotiques de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(r \cos x)\, dx$ et de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos(r \cos x)\, dx$, où r désigne un paramètre qui grandit sans limite.

Cherchons maintenant l'expression asymptotique d'intégrales, que nous appellerons, pour abréger, φ_m, définies par la formule

$$
(25)\qquad \varphi_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos(r \cos x)\, dx,
$$

où $2m$ désigne un exposant entier pair, au moins égal à zéro, et où r est un paramètre très grand en valeur absolue, que l'on peut supposer positif, car $\cos(r \cos x)$ reste le même quand on change r en $-r$.

Occupons-nous d'abord du cas le plus simple, celui où $m = 0$. Alors, r étant d'ailleurs considérable, la fonction sous le signe $\int$, $\cos(r \cos x)$, est le cosinus d'un arc, $r \cos x$, qui décroît, d'abord très lentement et puis de plus en plus vite, de r à zéro, pendant que x grandit de zéro à $\frac{\pi}{2}$. En effet, $r \cos x$ a sa dérivée, $-r \sin x$, croissante (en valeur absolue) depuis zéro jusqu'à la limite très élevée r. L'arc $r \cos x$ variant ainsi de plus en plus rapidement, et, chaque fois qu'il décroît de π, son cosinus changeant simplement de signe, les éléments $\cos(r \cos x)\, dx$ de l'intégrale constituent des groupes à signes alternés, dont le champ se rétrécit sans cesse presque jusqu'à zéro, et qui ont, par suite, leurs valeurs absolues totales de plus en plus

faibles. L'intégrale forme donc une suite de termes alternativement positifs et négatifs, ou négatifs et positifs, décroissants à partir du second, sinon même à partir du premier; et l'on aura sa valeur, avec une erreur relative négligeable, par l'addition algébrique des premiers termes, pris en nombre suffisant pour que le dernier d'entre eux soit insensible comparativement à leur somme. Il y a lieu, par conséquent, d'évaluer avec soin ces termes principaux, dans lesquels x est très petit.

A cet effet, observons que $r\cos x$ pourra, au moyen du développement de $\cos x$ en série, s'y écrire $r - \frac{rx^2}{2} + \frac{rx^4}{2.3.4} - \ldots$, ou $r - \frac{rx^2}{2}(1+\varepsilon)$, si ε désigne une quantité de l'ordre de petitesse de x^2; et, pour que cet arc, beaucoup plus vite variable que x dès que sa dérivée $(-rx + \ldots)$ est sensible, décroisse de π, il faudra, passé les premiers groupes, que x grandisse d'une quantité, Δx, dont le produit par rx égale à fort peu près π. On voit que, pour toute petite valeur *assignée* de x, cette quantité décroissante Δx, $\frac{\pi}{rx}$ environ, sera déjà devenue très faible, au point de rendre négligeable, comparativement aux premiers, le groupe d'éléments qui l'aura pour champ, si le paramètre r se trouve être assez considérable. Et alors l'expression rx^2, incomparablement moindre que rx, devient, elle-même, aussi grande que l'on veut, avant que le produit beaucoup plus faible $rx^2\varepsilon$, de l'ordre de $rx^4 = \frac{(rx^2)^2}{r}$, soit une fraction sensible de $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour r assez grand, les groupes relativement négligeables d'éléments se présentent avant que l'arc décroissant $r\cos x$, dont il s'agit de prendre le cosinus, ait cessé d'être réductible à $r - \frac{rx^2}{2}$ malgré les grandes valeurs qu'y atteint $\frac{rx^2}{2}$; et l'on peut, par suite, dans tous les éléments à évaluer, écrire

$$\cos(r\cos x) = \cos\left(r - \frac{rx^2}{2}\right) = \cos r \cos\frac{rx^2}{2} + \sin r \sin\frac{rx^2}{2}.$$

En y posant finalement $\frac{rx^2}{2} = u^2$, ou $x = u\sqrt{\frac{2}{r}}$ et $dx = \sqrt{\frac{2}{r}}\,du$, ces éléments $\cos(r\cos x)\,dx$ valent donc

$$\sqrt{\frac{2}{r}}\,[\cos r(\cos . u^2)\,du + \sin r(\sin . u^2)\,du],$$

et, vu que u y croît de zéro à des valeurs considérables (quand r est assez grand), leur somme diffère, relativement, aussi peu qu'on veut de l'expression

$$\sqrt{\frac{2}{r}}\left(\cos r \int_0^\infty \cos u^2\, du + \sin r \int_0^\infty \sin u^2\, du\right),$$

qui égale $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{r}}(\cos r + \sin r)$, d'après les formules (32) de la dernière Leçon (p. 127*). Il vient donc, en définitive, pour l'expression asymptotique cherchée de l'intégrale φ_0,

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l}(\text{pour } r \text{ très grand})\\ \varphi_0 \text{ ou } \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(r\cos x)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\,\frac{\cos r + \sin r}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\cos\left(r - \frac{\pi}{4}\right).\end{array}\right.$$

Cela posé, il sera facile de déduire successivement, par des différentiations en r, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$ de φ_0. La relation (25) différentiée donne, en effet,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\varphi_m}{dr} &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos x \sin(r\cos x)\, dx\\ &= -\frac{1}{2m+1}\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \sin(r\cos x)\, d\sin^{2m+1} x,\end{aligned}\right.$$

ou bien, en intégrant le dernier membre par parties, et en n'écrivant pas le terme intégré parce qu'il s'annule tant pour $x = 0$, à raison du facteur $\sin^{2m+1} x$, que pour $x = \frac{\pi}{2}$, à raison du facteur $\sin(r\cos x)$:

$$\frac{d\varphi_m}{dr} = -\frac{r}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2} x \cos(r\cos x)\, dx = -\frac{r}{2m+1}\varphi_{m+1}.$$

Résolvons par rapport à φ_{m+1}, et il viendra

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l}\varphi_{m+1} = -\dfrac{2m+1}{r}\dfrac{d\varphi_m}{dr};\\ \text{d'où}\\ \varphi_1 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi_0}{dr},\quad \varphi_2 = -\dfrac{3}{r}\dfrac{d\varphi_1}{dr},\quad \varphi_3 = -\dfrac{5}{r}\dfrac{d\varphi_2}{dr},\quad \ldots.\end{array}\right.$$

D'ailleurs, en évaluant la dérivée en r de l'expression asymptotique de φ_0 donnée par le troisième membre de (26), on n'aura pas à diffé-

rentier le petit facteur $r^{-\frac{1}{2}}$; ce qui n'introduirait, en effet, qu'un terme de l'ordre de $r^{-\frac{3}{2}}$, négligeable à côté du terme où $r^{-\frac{1}{2}}$, non différentié, paraît; et, de même, en différentiant φ_1 pour avoir φ_2, puis φ_2 pour avoir φ_3, ..., on pourra traiter comme des constantes les facteurs analogues. Il viendra donc, successivement,

$$(28)\qquad \text{(pour } r \text{ très grand)}\quad \begin{cases} \varphi_1 = -\dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{\pi}{2r}}\,\dfrac{d}{dr}\cos\left(r-\dfrac{\pi}{4}\right), \\ \varphi_2 = \dfrac{1.3}{r^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2r}}\,\dfrac{d^2}{dr^2}\cos\left(r-\dfrac{\pi}{4}\right), \\ \varphi_3 = -\dfrac{1.3.5}{r^3}\sqrt{\dfrac{\pi}{2r}}\,\dfrac{d^3}{dr^3}\cos\left(r-\dfrac{\pi}{4}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nous verrons plus loin (nº 419*), en étudiant certaines équations différentielles auxquelles satisfont les intégrales $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, comment ces expressions asymptotiques (26) et (28) peuvent servir de point de départ pour évaluer à très peu près les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, ou d'autres analogues, dès que leur variable r atteint des valeurs un peu grandes.

338*. — Du calcul approché des intégrales $\int_0^u e^{-x^2}\,dx$, $\int_0^u \cos x^2\,dx$, $\int_0^u \sin x^2\,dx$, quand elles diffèrent modérément de ce qu'elles sont pour u infini.

En résumé, la connaissance de l'expression vers laquelle tendent les intégrales définies quand leurs paramètres grandissent sans limite conduit assez fréquemment à des formules permettant de les évaluer dans des cas où ces paramètres ont des valeurs modérées, sinon quelconques. Or il en est parfois de même lorsque ce sont non des paramètres, mais les limites de l'intégrale, qui grandissent indéfiniment en valeur absolue : la connaissance de l'intégrale, alors qu'elle atteint sa valeur en quelque sorte asymptotique, c'est-à-dire alors que sa limite variable est infinie, peut servir de point de départ à des procédés plus ou moins approchés de calcul pour les cas où cette limite ne s'abaisse pas au-dessous d'une certaine grandeur.

Soient, par exemple, les trois intégrales importantes $\int_0^u e^{-x^2}\,dx$,

$\int_0^u \cos x^2\,dx$, $\int_0^u \sin x^2\,dx$, qui, pour $u=\infty$, ont respectivement les valeurs $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Il suffira évidemment d'obtenir ce qui leur manque pour atteindre ces valeurs, savoir les différences, que nous supposerons assez petites, exprimées par les intégrales $\int_u^\infty e^{-x^2}dx$, $\int_u^\infty \cos x^2\,dx$ et $\int_u^\infty \sin x^2\,dx$. Or des intégrations par parties, où l'on prend e^{-x^2}, $\sin x^2$ et $\cos x^2$ pour facteurs intégrés, y conduisent aisément. L'on a, en effet,

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \int_u^\infty e^{-x^2}dx &= -\frac{1}{2}\int_{x=u}^{x=\infty}\frac{1}{x}\,de^{-x^2}\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x^2}}{x}\right)_u^\infty - \frac{1}{2}\int_u^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{x^2} = \frac{e^{-u^2}}{2u} - \frac{1}{2}\int_u^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{x^2}, \end{aligned}\right.$$

et, pareillement,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \int_u^\infty \cos x^2\,dx &= \frac{1}{2}\int_{x=u}^{x=\infty}\frac{1}{x}\,d\sin x^2 = -\frac{\sin u^2}{2u} + \frac{1}{2}\int_u^\infty \sin x^2\frac{dx}{x^2},\\ \int_u^\infty \sin x^2\,dx &= -\frac{1}{2}\int_{x=u}^{x=\infty}\frac{1}{x}\,d\cos x^2 = \frac{\cos u^2}{2u} - \frac{1}{2}\int_u^\infty \cos x^2\frac{dx}{x^2}. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, en appliquant la même méthode de décomposition aux derniers termes de (29) et (30), il vient

$$\left\{\begin{aligned} \int_u^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{x^2} &= -\frac{1}{2}\int_{x=u}^{x=\infty}\frac{1}{x^3}\,de^{-x^2} = \frac{e^{-u^2}}{2u^3} - \frac{3}{2}\int_u^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{x^4},\\ \int_u^\infty \sin x^2\frac{dx}{x^2} &= -\frac{1}{2}\int_{x=u}^{x=\infty}\frac{1}{x^3}\,d\cos x^2 = \frac{\cos u^2}{2u^3} - \frac{3}{2}\int_u^\infty \cos x^2\frac{dx}{x^4},\\ \int_u^\infty \cos x^2\frac{dx}{x^2} &= \frac{1}{2}\int_{x=u}^{x=\infty}\frac{1}{x^3}\,d\sin x^2 = -\frac{\sin u^2}{2u^3} + \frac{3}{2}\int_u^\infty \sin x^2\frac{dx}{x^4}; \end{aligned}\right.$$

d'où, au lieu de (29) et (30),

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \int_u^\infty e^{-x^2}dx &= e^{-u^2}\left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{2^2u^3}\right) + \frac{1.3}{2^2}\int_u^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{x^4},\\ \int_u^\infty \cos x^2\,dx &= -\frac{\sin u^2}{2u} + \frac{\cos u^2}{2^2u^3} - \frac{1.3}{2^2}\int_u^\infty \cos x^2\frac{dx}{x^4},\\ \int_u^\infty \sin x^2\,dx &= \frac{\cos u^2}{2u} + \frac{\sin u^2}{2^2u^3} - \frac{1.3}{2^2}\int_u^\infty \sin x^2\frac{dx}{x^4}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules (31), les intégrales qui figurent aux derniers termes comportent encore le même genre de dédoublement, et ainsi de suite à l'infini. Seulement, ce dédoublement cessera d'être avantageux, quand la différentiation des facteurs à exposants négatifs croissants x^{-5}, x^{-7}, x^{-9}, ... aura fini par introduire, malgré la présence d'un nouveau dénominateur 2 à chaque intégration par parties, un coefficient numérique 1.3.5.7.9... assez grand pour rendre le dernier terme intégré supérieur à l'avant-dernier (abstraction faite des facteurs périodiques $\cos u^2$ et $\sin u^2$ dans la seconde et la troisième formule). Il faudra s'en tenir alors, comme valeur approximative cherchée, à la somme de l'avant-dernier terme dont il s'agit et de ceux qui le précèdent : ce qui n'entraînera qu'une erreur inférieure, en valeur absolue, au même terme, dans lequel on remplacerait les facteurs $\cos u^2$ ou $\sin u^2$, s'ils y figurent, par l'unité.

En effet, l'intégrale définie terminant à chaque instant l'une quelconque des trois formules, et qui constitue, en quelque sorte, son *terme complémentaire*, est plus faible que le terme précédent ou dernier alors intégré, quand on y met pour les facteurs périodiques $\cos u^2$ et $\sin u^2$ la valeur maxima 1. Car ces deux termes résultent toujours, solidairement, de l'intégration par parties qu'exprime la triple formule, où K est un coefficient numérique approprié,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{K}\int_{x=u}^{x=\infty}\frac{1}{x^{2m+1}}\,d(e^{-x^2},\text{ ou }\cos x^2,\text{ ou }\sin x^2)\\ &\quad=-\mathrm{K}\,\frac{(e^{-u^2},\text{ ou }\cos u^2,\text{ ou }\sin u^2)}{u^{2m+1}}\\ &\qquad\quad-\mathrm{K}\int_{x=u}^{x=\infty}(e^{-x^2},\text{ ou }\cos x^2,\text{ ou }\sin x^2)\,d\,\frac{1}{x^{2m+1}};\end{aligned}\right.$$

et l'on voit que le dernier terme, inférieur (en grandeur absolue) à ce qu'il devient quand on y remplace e^{-x^2}, $\cos x^2$, $\sin x^2$ par leurs plus fortes valeurs respectives e^{-u^2}, ± 1, ± 1, se trouve compris entre zéro et

$$-\mathrm{K}(e^{-u^2},\text{ ou }\pm 1)\int_{x=u}^{x=\infty}d\,\frac{1}{x^{2m+1}}=\mathrm{K}\,\frac{(e^{-u^2},\text{ ou }\pm 1)}{u^{2m+1}}.$$

C'est bien dire que le terme non intégré, que l'on négligera, n'atteint pas, en valeur absolue, le dernier terme intégré

$$-\mathrm{K}\,\frac{(e^{-u^2},\text{ ou }\cos u^2,\text{ ou }\sin u^2)}{u^{2m+1}},$$

dans lequel on remplacerait par 1 le facteur $\cos u^2$ ou $\sin u^2$, s'il y paraît : il est clair de plus que, lorsqu'il s'agit de l'expression $\int_u^\infty e^{-x^2}dx$, l'erreur se trouve toujours de signe contraire au dernier terme calculé.

Plus u sera grand, et plus sera nombreuse, à raison des puissances ascendantes u^{2m+1} figurant aux dénominateurs, la suite des termes décroissants, en même temps que ces termes seront plus petits. On obtiendra donc des valeurs pratiquement très exactes, si u est considérable. Mais l'effectuation des calculs montre que les résultats déduits de deux ou trois termes sont encore passablement approchés, même pour des valeurs de u assez peu supérieures à 1. Et, quant à celles qui seraient moindres (c'est-à-dire peu supérieures ou même inférieures à l'unité), on y développerait les intégrales $\int_0^u e^{-x^2}dx$, $\int_0^u \cos x^2\,dx$, $\int_0^u \sin x^2 dx$ suivant les puissances *non plus descendantes,* mais ascendantes, de u, en intégrant indéfiniment par parties avec e^{-x^2}, $\cos x^2$, $\sin x^2$ pour facteurs non intégrés, ou, plus simplement encore, en remplaçant, sous le signe $\int$, les fonctions e^{-x^2}, $\cos x^2$, $\sin x^2$ par les séries bien connues, alors assez avantageuses pour le calcul numérique,

$$1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2} - \ldots, \quad 1 - \frac{x^4}{1.2} + \ldots, \quad \frac{x^2}{1} - \frac{x^6}{1.2.3} + \ldots;$$

et intégrant chaque terme.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

SUITE DES CALCULS D'EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES D'INTÉGRALES DÉFINIES : SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

339*. — **Autre exemple : développement d'une fonction périodique finie quelconque suivant les cosinus et sinus affectés de la même périodicité; intégrale définie dont cette fonction représente l'expression asymptotique.**

Les intégrales définies dont nous avons jusqu'ici obtenu des expressions asymptotiques, c'est-à-dire indéfiniment approchées pour les valeurs assez grandes de leur paramètre, avaient la somme de leurs *éléments principaux* évaluable au moyen des intégrales $\int_0^\infty e^{-u^2}du$, $\int_0^\infty \cos u^2\,du$ et $\int_0^\infty \sin u^2\,du$. Or il en est d'autres, également réductibles à des éléments principaux quand un paramètre n y croît indéfiniment, où la somme de ces éléments se calcule par la formule $\int_0^\infty \frac{\sin bu}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$, b étant un facteur positif (p. 119*). Et il y a lieu de nous y arrêter plus encore qu'aux précédentes; car elles doivent une importance exceptionnelle à cette particularité que, dépendant d'un second paramètre x, elles admettent, suivant les cas, pour l'expression asymptotique dont il s'agit (relative à n), telle fonction que l'on veut du paramètre x, du moins entre certaines limites. En d'autres termes, leur valeur pour n infini devient une fonction $f(x)$ arbitraire dans un intervalle quelconque désigné d'avance; en sorte que leur emploi permet de donner à toutes les fonctions $f(x)$ une forme analytique commune, qui se trouve être avantageuse ou même indispensable dans certains problèmes.

On arrive à ces intégrales en essayant de décomposer toute *fonction périodique* donnée $f(x)$, affectée de la période quelconque $2a$, ou telle, que $f(x+2a)=f(x)$, en termes proportionnels respectivement aux cosinus et sinus des multiples de l'arc $\frac{\pi x}{a}$, qui croît de 2π quand x croît de $2a$.

Soit donc $f(x)$ une fonction *finie* et périodique de x, pouvant, dans l'intervalle d'une période $2a$, de $x=-a$ à $x=+a$, par exemple, recevoir des valeurs quelconques et présenter même un nombre fini de discontinuités : toutefois, dans ce dernier cas, on convient, pour que la fonction $f(x)$ ne cesse pas d'être déterminée, de lui attribuer une valeur égale à la moyenne arithmétique de sa valeur précédente et de la suivante, moyenne représentée par $\frac{1}{2}[f(x-\varepsilon)+f(x+\varepsilon)]$, où ε désigne un infiniment petit positif. Il est naturel de chercher à exprimer cette fonction $f(x)$ au moyen des fonctions les plus simples qui admettent la même période $2a$, c'est-à-dire au moyen des fonctions $A_i \cos\frac{i\pi x}{a}+B_i \sin\frac{i\pi x}{a}$, i désignant un entier quelconque [qu'on peut supposer positif, sauf à changer le signe de B_i] et A_i, B_i étant deux coefficients constants. Ainsi, proposons-nous de développer $f(x)$ en une série de la forme

$$(33) \qquad f(x)=\sum_{i=0}^{i=\infty}\left(A_i \cos\frac{i\pi x}{a}+B_i \sin\frac{i\pi x}{a}\right),$$

où les notations $i=0$ et $i=\infty$, inscrites au-dessous et au-dessus du signe de sommation Σ, signifient que les divers termes de la série se forment en donnant successivement à i, dans l'expression qui suit, toutes les valeurs *entières,* depuis (et y compris) zéro jusqu'à $+\infty$.

A cet effet, nous admettrons d'abord que le développement soit possible, ou que la fonction $f(x)$ égale bien la somme limite d'une série convergente ordonnée suivant les cosinus et sinus indiqués; et nous déterminerons, dans cette hypothèse, les coefficients A_i, B_i. Puis, connaissant de la sorte la forme précise de la série, nous démontrerons qu'elle convient pour toute fonction périodique $f(x)$.

Le calcul de A_i, B_i se fait par une méthode due, en principe, à Lagrange et à Euler, mais que l'on appelle *méthode de Fourier,* en souvenir du géomètre français (du commencement de ce siècle) qui en a montré les nombreuses applications à des séries très diverses employées dans la Physique mathématique et spécialement dans la *Théorie analytique de la chaleur,* créée par lui. On multiplie l'équation (33) par $\cos\frac{i\pi x}{a}\,dx$ ou par $\sin\frac{i\pi x}{a}\,dx$, et l'on intègre les deux membres dans toute l'étendue d'une période, de $x=-a$ à $x=+a$, en observant que le second membre de (33) peut être traité comme une somme d'un nombre fini de termes, vu que l'erreur commise sur ce second membre en l'arrêtant à un terme assez éloigné est aussi

petite qu'on veut et ne donnera, dans le résultat des intégrations, qu'un terme complémentaire inférieur, lui aussi, à toute erreur donnée. D'ailleurs, les produits du terme quelconque $A_j \cos \frac{j\pi x}{a} + B_j \sin \frac{j\pi x}{a}$ du second membre de (33) par $\cos \frac{i\pi x}{a}$ et par $\sin \frac{i\pi x}{a}$ sont, respectivement,

$$\tfrac{1}{2} A_j \left[\cos \frac{(i+j)\pi x}{a} + \cos \frac{(i-j)\pi x}{a}\right] + \tfrac{1}{2} B_j \left[\sin \frac{(i+j)\pi x}{a} - \sin \frac{(i-j)\pi x}{a}\right],$$

$$\tfrac{1}{2} A_j \left[\sin \frac{(i+j)\pi x}{a} + \sin \frac{(i-j)\pi x}{a}\right] + \tfrac{1}{2} B_j \left[\cos \frac{(i-j)\pi x}{a} - \cos \frac{(i+j)\pi x}{a}\right],$$

et se composent de termes proportionnels soit à des sinus qui ont leurs valeurs moyennes nulles, soit à des cosinus nuls aussi en moyenne, si ce n'est quand ils se réduisent à l'unité ou qu'on a $i \pm j = 0$, c'est-à-dire ou $i = j = 0$, ou, du moins, $j = i$. Or il est évident que tous ces termes, multipliés par dx et intégrés dans l'intervalle $2a$ qui comprend une ou plusieurs de leurs périodes, donnent pour résultats les produits de $2a$ par leurs valeurs moyennes. Il vient donc simplement : 1° pour les valeurs de i qui diffèrent de zéro,

$$\int_{-a}^{a} f(x) \cos \frac{i\pi x}{a}\, dx = a A_i, \qquad \int_{-a}^{a} f(x) \sin \frac{i\pi x}{a}\, dx = a B_i;$$

2° pour $i = 0$ $\left(\text{ce qui annule le terme } B_i \sin \frac{i\pi x}{a}\right)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2a A_0.$$

On voit que, *grâce aux multiplicateurs choisis* et aux intégrations effectuées, *les diverses constantes* à déterminer *se sont séparées* d'elles-mêmes les unes des autres ; et l'on a ainsi, pour chacune, une équation qui la donne en particulier. Le même fait se produit dans toutes les séries analogues auxquelles s'applique le procédé d'élimination de Fourier, qui consiste à choisir, toujours de même, pour multiplicateur, le produit de la fonction figurant dans le terme dont on veut isoler et déterminer le coefficient, par l'élément du champ où existe la fonction développée, puis à intégrer le résultat dans toute l'étendue de ce champ ; ce qui revient évidemment à le faire entre les limites d'une seule période, quand les mêmes valeurs se représenteraient indéfiniment au dehors.

Afin d'éviter plus loin une confusion qui serait à craindre, appe-

lons ξ, dans les formules trouvées, la variable d'intégration, et posons, en conséquence,

$$(34)\qquad \begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{a} f(\xi)\,d\xi, \\[2ex] A_i = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-a}^{a} f(\xi)\cos\dfrac{i\pi\xi}{a}\,d\xi, \\[2ex] B_i = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-a}^{a} f(\xi)\sin\dfrac{i\pi\xi}{a}\,d\xi. \end{cases}$$

La formule (33) deviendra celle que l'on se proposait d'établir et qui s'appelle *série de Fourier :*

$$(35)\qquad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{-a}^{a} f(\xi)\,d\xi + \dfrac{1}{a}\sum_{i=1}^{i=\infty}\Bigg[\cos\dfrac{i\pi x}{a}\int_{-a}^{a} f(\xi)\cos\dfrac{i\pi\xi}{a}\,d\xi \\[2ex] \qquad\qquad + \sin\dfrac{i\pi x}{a}\displaystyle\int_{-a}^{a} f(\xi)\sin\dfrac{i\pi\xi}{a}\,d\xi\Bigg]. \end{cases}$$

On la rend un peu plus symétrique en y introduisant les valeurs négatives de i, auxquelles on fait correspondre des termes de même grandeur qu'aux valeurs positives. Comme le changement de i en $-i$ ne change rien aux produits $\cos\frac{i\pi x}{a}\cos\frac{i\pi\xi}{a}$ et $\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{i\pi\xi}{a}$, il suffit, pour cela, de partager chaque terme du second membre, sauf le premier où $i=0$ et qu'il n'y a pas lieu de dédoubler, en deux parties égales, dont on attribue l'une à la valeur négative et l'autre à la valeur positive de i. Alors la formule (35), en y transportant d'ailleurs sous les signes $\int$ les facteurs $\cos\frac{i\pi x}{a}$ et $\sin\frac{i\pi x}{a}$, puis réduisant, devient

$$(36)\qquad f(x) = \frac{1}{2a}\sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\int_{-a}^{a} f(\xi)\cos\frac{i\pi(x-\xi)}{a}\,d\xi;$$

et elle peut encore se simplifier par l'introduction d'exponentielles imaginaires. Ajoutons, en effet, au facteur $\cos\frac{i\pi(x-\xi)}{a}$, ce qui lui manque pour devenir $e^{\frac{i\pi(x-\xi)}{a}\sqrt{-1}}$, savoir $\sqrt{-1}\sin\frac{i\pi(x-\xi)}{a}$; addition n'altérant pas le second membre, car elle revient à lui joindre l'expression $\frac{\sqrt{-1}}{2a}\sum_{i=-\infty}^{i=\infty}\int_{-a}^{a} f(\xi)\sin\frac{i\pi(x-\xi)}{a}\,d\xi$, dont les termes pour i positif et pour i négatif se neutralisent mutuellement à cause du

changement de signe de $\sin \frac{i\pi(x-\xi)}{a}$ avec i. Il vient alors la forme suivante, due à Cauchy, et aussi concise que possible, de la série de Fourier :

$$(37)\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2a} \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{i=\infty} \int_{-a}^{a} f(\xi) e^{\frac{i\pi(x-\xi)}{a}\sqrt{-1}} d\xi \\ \quad = \dfrac{1}{2a} \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{i=\infty} e^{\frac{i\pi x}{a}\sqrt{-1}} \int_{-a}^{a} f(\xi) e^{-\frac{i\pi\xi}{a}\sqrt{-1}} d\xi. \end{cases}$$

Mais revenons, pour la condenser en une intégrale définie unique, à la première forme, (35), qui est la plus utilisable immédiatement. Ne faisons varier d'abord i, au second membre, que depuis la valeur 1 jusqu'à un nombre entier très grand $n-1$; et, après avoir transporté sous les signes $\int$ les facteurs $\cos \frac{i\pi x}{a}$, $\sin \frac{i\pi x}{a}$, réduisons la somme obtenue d'intégrales, prises toutes entre les mêmes limites $\pm a$, à l'intégrale, entre ces limites, de la somme de leurs différentielles.

La formule (35) deviendra évidemment

$$(38)\ f(x) = \lim \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} f(\xi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{i=n-1} \cos \frac{i\pi(x-\xi)}{a} \right] d\xi \quad (\text{pour } n \text{ infini}),$$

c'est-à-dire, d'après la première formule de sommation (13) de la page 15*, où il faudra faire $k = \frac{\pi(x-\xi)}{a}$,

$$(39)\ f(x) = \lim \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} \frac{f(\xi)}{2\sin\frac{\pi(x-\xi)}{2a}} \sin \frac{(2n-1)\pi(x-\xi)}{2a}\, d\xi \quad (\text{pour } n \text{ infini}).$$

En résumé, si la fonction périodique $f(x)$ se trouve bien développable, comme on l'admet, en une série procédant suivant les cosinus et sinus d'arcs proportionnels à x et dont les périodes, de plus en plus courtes, soient des sous-multiples exacts de la sienne $2a$: 1° le développement ne peut se faire que d'une seule manière, ses coefficients A_i, B_i étant complètement déterminés par les formules (34); 2° cette fonction $f(x)$ constitue l'expression asymptotique, ou relative à n infini, de l'intégrale qui figure dans le second membre de (39). De plus, comme cette intégrale n'est qu'une transformation de la série (35) réduite à un nombre quelconque (de plus en plus grand) de termes, il suffit, en y supposant $f(\xi)$ une fonction périodique finie, *quelconque*

dans toute la période comprise entre les limites $x = \pm a$, de constater que $f(x)$ en représente *toujours* l'expression asymptotique, pour avoir établi, par le fait même, la convergence, vers $f(x)$, du second membre de (35), à mesure que le nombre de termes y grandit, et pour avoir ainsi reconnu, dans tous les cas, la légitimité de la série de Fourier.

340*. — Démonstration de la série de Fourier ou série trigonométrique principale, par le calcul de l'expression asymptotique d'intégrale qui la résume.

Nous avons donc à chercher l'expression asymptotique, ou correspondant à n infini, de l'intégrale qui figure au second membre de (39).

Comme la fonction sous le signe $\int$ n'y change pas quand x varie de $2a$, nous pourrons admettre qu'on y ait réduit cette variable à ne pas sortir, plus que ξ, de l'intervalle des deux limites $\pm a$, *entre* lesquelles nous commencerons même par la supposer comprise. Les *éléments principaux* seront, naturellement, ceux où le dénominateur $2 \sin \frac{\pi(x-\xi)}{2a}$ aura ses plus petites valeurs et où, par suite, la différence $x - \xi$ se trouvera très voisine de zéro. Appelons u cette différence et prenons-la, au lieu de ξ, pour variable d'intégration, afin que les éléments principaux se rapportent, comme dans les exemples précédents (pp. 138*, 145* et 153*), aux petites valeurs absolues de u. Nous aurons $\xi = x - u$, $d\xi = -du$, et u décroîtra de $x + a$ à $x - a$ pendant que ξ croîtra de $-a$ à $+a$. L'intégrale dont il s'agit, second membre de (39), sera donc, après permutation des deux limites et changement corrélatif du signe,

$$(40) \qquad \int_{x-a}^{x+a} \frac{f(x-u)}{2a \sin \frac{\pi u}{2a}} \sin \frac{(2n-1)\pi u}{2a}\, du \quad \text{(à évaluer pour } n \text{ infini).}$$

Sans la présence, sous le signe $\int$, du facteur $\frac{f(x-u)}{2a \sin \frac{\pi u}{2a}}$, l'intégrale exprimerait l'aire comprise entre un axe des abscisses u et les $2n - 2$ arceaux complets, accrus d'un fragment d'arceau à chaque extrémité, qu'offre en tout, de $u = x - a$ à $u = x + a$, la sinusoïde ayant pour ordonnée $\sin \frac{(2n-1)\pi u}{2a}$. La surface partielle limitée par chaque arceau est, en valeur absolue, comparable au produit de sa très petite

base $\frac{2a}{2n-1}$ par sa hauteur 1 ; de sorte que la somme de toutes ces surfaces serait finie, comparable à $2a$, si on les prenait en valeur absolue. Mais, comme deux arceaux consécutifs ont leurs ordonnées égales chacune à chacune, également espacées et de signes contraires, ces aires, en très grand nombre, s'entre-détruisent deux à deux et ont leur somme algébrique incomparablement plus faible que leur somme absolue; car elle se réduit finalement à l'aire, nulle pour n infini, de quelques fragments d'arceau situés aux extrémités.

Or il est aisé de voir en quoi le facteur $\frac{f(x-u)}{2a\sin\frac{\pi u}{2a}}$ modifie le résultat. Ce facteur, où $f(x-u)$ est toujours fini, ne peut devenir infini que pour $u=0$, car l'arc $\frac{\pi u}{2a}$ n'y varie qu'entre les limites $\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}\mp 1\right)$, c'est-à-dire, par hypothèse, dans une partie de l'intervalle compris entre $-\pi$ et π (puisque nous supposons x d'une grandeur absolue moindre que a).

Faisons d'abord abstraction des valeurs de u très voisines de zéro. Pour toutes les autres, le facteur dont il s'agit varie graduellement dans des intervalles comprenant un grand nombre d'arceaux de la sinusoïde. Ses produits par les ordonnées de celle-ci ont donc leurs valeurs finies et à fort peu près pareilles, sauf le signe, pour deux arceaux consécutifs; de sorte que les aires de ces arceaux continuent à s'entre-détruire sensiblement et à donner une somme algébrique sans comparaison plus faible que leur somme arithmétique, c'est-à-dire s'annulant à la limite.

Il ne subsiste dès lors que les éléments principaux, ceux dans lesquels u est très petit et compris, par exemple, entre deux limites $\pm\mu$, aussi rapprochées que l'on veut, assez pour que l'on puisse, dans leur intervalle, remplacer $\sin\frac{\pi u}{2a}$ par l'arc $\frac{\pi u}{2a}$, mais indépendantes de n. Si l'on appelle ε un infiniment petit positif, le facteur en question $\frac{f(x-u)}{2a\sin\frac{\pi u}{2a}}$ s'y réduit évidemment à $\frac{f(x+\varepsilon)}{\pi u}$ quand u est négatif, et à $\frac{f(x-\varepsilon)}{\pi u}$ quand u est positif. Ces éléments valent donc, en tout,

$$(41)\qquad \frac{f(x+\varepsilon)}{\pi}\int_{-\mu}^{0}\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2a}\,\frac{du}{u}+\frac{f(x-\varepsilon)}{\pi}\int_{0}^{\mu}\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2a}\,\frac{du}{u},$$

ou bien, vu que la fonction sous le signe $\int$ est paire et que

$f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)$ égale *toujours* $2f(x)$,

$$(42)\qquad \frac{2f(x)}{\pi}\int_0^{\mu}\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2a}\,\frac{du}{u}.$$

Or, lorsque n est suffisamment grand, on peut remplacer la limite supérieure μ par l'infini. En effet, on n'ajoute ainsi à l'intégrale (42) que les aires d'arceaux de sinusoïde analogues à ceux dont il vient d'être parlé, aires, très petites et à signes alternés, qui seront ici lentement décroissantes d'un arceau complet au suivant à cause du dénominateur u de plus en plus fort, et dont, par conséquent, la somme, toujours moindre qu'un seul des termes, sera négligeable. La valeur limite de l'expression (42) est donc $\frac{2f(x)}{\pi}\int_0^{\infty}\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2a}\frac{du}{u}$ ou simplement $f(x)$, d'après la formule (17) de la page 119*; ce qu'il fallait démontrer.

Jetons enfin un coup d'œil sur le cas où la variable x, au lieu d'être, comme nous l'admettions, comprise entre les limites $-a$ et $+a$ de la période considérée, atteint l'une de ces limites, $+a$ par exemple. Alors la nouvelle variable d'intégration $u=x-\xi=a-\xi$ décroît de $2a$ à zéro dans le second membre de (39); et les éléments principaux de l'intégrale, qui correspondent aux petites valeurs de $\sin\frac{\pi u}{2a}$, se trouvent situés, les uns, encore dans le voisinage de la limite $u=0$, mais seulement du côté des u positifs, où $f(a-u)$ peut s'écrire $f(a-\varepsilon)$, les autres, dans le voisinage de la seconde limite $u=2a$, où $f(a-u)$ prend de même la forme $f(a-2a+\varepsilon)$, équivalente à $f(a+\varepsilon)$, et où d'ailleurs, en posant $u-2a=v$, $\sin\frac{\pi u}{2a}$, égal à $-\sin\frac{\pi v}{2a}$, est réductible à $-\frac{\pi v}{2a}$. La somme des éléments principaux se compose donc encore, comme (41), de deux parties, dont l'une a la forme du second terme de (41) et dont l'autre, destinée à remplacer le premier terme de (41), est

$$\frac{f(a+\varepsilon)}{\pi}\int_{2a-\mu}^{2a}\sin\frac{(2n-1)\pi u}{2a}\,\frac{du}{-v},$$

ou bien

$$\frac{f(a+\varepsilon)}{\pi}\int_{-\mu}^{0}\sin\frac{(2n-1)\pi v}{2a}\,\frac{dv}{v}.$$

On voit que celle-ci revient exactement au premier terme de (41). Par suite, le second membre de (39) n'exprime pas moins la fonction $f(x)$ aux limites $x=\pm a$ d'une période, qu'entre ces limites.

341*. — Séries trigonométriques dérivées de celle de Fourier et procédant, les unes, suivant les sinus, les autres, suivant les cosinus, des multiples ou quelconques, ou impairs, d'un arc.

La formule (35) en comprend quatre autres souvent utiles. Les deux premières s'obtiennent en concevant que la fonction $f(x)$ soit ou impaire, ou paire, c'est-à-dire telle, qu'on ait $f(-x) = \mp f(x)$; ce qui n'empêche pas de lui attribuer des valeurs quelconques entre les limites $x = 0$ et $x = a$.

Si $f(-x) = -f(x)$, les expressions (34) de A_0 et de A_i sont nulles, vu que, sous les signes $\int$, les éléments correspondant à deux valeurs égales et contraires de ξ se détruisent. Quant aux éléments analogues de l'expression de B_i, ils sont égaux et s'ajoutent. Il vient donc pour $f(x)$ le développement, dû à Lagrange,

$$(43) \qquad f(x) = \frac{2}{a}\sum_{i=1}^{i=\infty} \sin\frac{i\pi x}{a}\int_0^a f(\xi)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi,$$

développement constituant la première série trigonométrique qui ait été connue.

Si, au contraire, $f(-x) = f(x)$, c'est l'expression (34) de B_i qui s'annule, et ce sont celles de A_0, A_i qu'on peut ne prendre qu'entre les limites zéro et a, sauf à doubler les résultats. On trouve

$$(44) \qquad f(x) = \frac{1}{a}\int_0^a f(\xi)\,d\xi + \frac{2}{a}\sum_{i=1}^{i=\infty} \cos\frac{i\pi x}{a}\int_0^a f(\xi)\cos\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi,$$

relation due à Euler.

Les deux dernières formules cherchées se déduisent de (43) et de (44), en supposant que la fonction $f(x)$ reçoive, à pareille distance des deux limites o et a, des valeurs égales et de même signe dans la formule (43), égales et de signes contraires dans la formule (44), c'est-à-dire en posant respectivement $f(a-x) = \pm f(x)$. Alors, aux seconds membres de (43) et (44), les termes pour lesquels i est pair s'annulent, vu que les éléments respectifs d'intégrale $f(\xi)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi$, $f(\xi)\cos\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi$, correspondant à deux valeurs de ξ également distantes de zéro et a, s'y détruisent.

Au contraire, ces deux éléments s'ajoutent et sont égaux pour i impair. Si, afin d'abréger, on appelle b la moitié de a, la fonction

$f(x)$, complètement arbitraire depuis $x = 0$ jusqu'à $x = b$, comportera ainsi, entre ces limites, les deux expressions

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{b}\sum_{i=0}^{i=\infty} \sin\frac{(2i+1)\pi x}{2b}\int_0^b f(\xi)\sin\frac{(2i+1)\pi\xi}{2b}\,d\xi,\\ f(x) &= \frac{2}{b}\sum_{i=0}^{i=\infty} \cos\frac{(2i+1)\pi x}{2b}\int_0^b f(\xi)\cos\frac{(2i+1)\pi\xi}{2b}\,d\xi. \end{aligned}\right.$$

On passerait d'ailleurs de l'une de ces formules à l'autre, par le changement de x en $b - x$, puis par ceux de ξ en $b - \xi$ et de $f(b - x)$ en $f(x)$.

342*. — Formule de Fourier, permettant de donner à une fonction arbitraire la forme d'une intégrale double à élément trigonométrique.

Enfin l'équation (38) [p. 163*] conduit à une relation importante dont nous verrons plus loin l'usage (XLIXe Leçon), la *formule de Fourier*, en faisant grandir indéfiniment la période $2a$; ce qui permet de supposer arbitraire la fonction $f(x)$ depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$. Alors, quand on passe d'un terme de la série Σ au terme suivant, l'expression $\frac{i\pi}{a}$, que l'on peut appeler α, croît de la très petite quantité $\Delta\alpha = \frac{\pi}{a}$, qui devient, à la limite, une différentielle $d\alpha$; en sorte qu'il semble permis de remplacer, dans (38), le facteur $\frac{1}{a}$ par $\frac{d\alpha}{\pi}$, puis d'introduire $d\alpha$ sous le signe $\int$ et de transformer la somme Σ en une intégrale prise de $\alpha = 0$ à $\alpha = \frac{n\pi}{a}$. Il vient donc, sauf vérification ultérieure,

$$(46)\quad f(x) = \lim \frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{\infty} f(\xi)\,d\xi \int_0^{\alpha} \cos\alpha(x-\xi)\,d\alpha \quad (\text{pour } \alpha \text{ infini positif}),$$

ou bien, en changeant l'ordre de groupement des éléments sans en introduire ni supprimer aucun,

$$(46\ bis)\quad f(x) = \lim \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\alpha(x-\xi)\,d\xi \quad (\text{pour } \alpha \text{ infini positif}).$$

Cette formule n'offrant pas à l'esprit, par suite de la disparition, à l'infini, de la période $2a$, un sens aussi net que les séries précédentes,

il est bon d'en fixer la portée par une démonstration directe. Effectuons, dans le second membre de (46), l'intégration par rapport à α, *en n'y supposant pas encore infinie* la limite supérieure α. Ce second membre devient $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{\sin\alpha(x-\xi)}{x-\xi}\,d\xi$, ou, si l'on continue à poser $x-\xi=u$,

$$(47)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x-u)}{u}\sin\alpha u\,du.$$

Le nombre α étant très grand, on peut appliquer à cette expression (47) la discussion faite au n° 340* (p. 164*) sur l'expression (40), à cela près qu'ici le facteur $\frac{f(x-u)}{\pi u}$ remplace le facteur plus complexe $\frac{f(x-u)}{2a\sin\frac{\pi u}{2a}}$. On reconnaît de la sorte que les éléments de l'intégrale correspondant aux très petites valeurs absolues de u rendent à eux seuls, pour α infini, l'expression (47) égale à $f(x)$. Comme d'ailleurs, d'après ce que l'on a vu au même endroit, tout groupe d'autres éléments, dont le champ comprend un intervalle fini quelconque, ne donne qu'un total nul à la limite, il faudra et il suffira, pour l'exactitude de la formule (46), que les éléments de l'intégrale (47) correspondant aux très grandes valeurs absolues de u soient eux-mêmes négligeables.

C'est ce qui arrivera, par exemple, si la fonction f est continue pour les très grandes valeurs absolues de sa variable et, de plus, telle, que, $\pm u$ y croissant sans limite, l'expression $\frac{f(x-u)}{u}$ ou s'annule, ou tende vers zéro en finissant par conserver son signe. Alors, en effet, les éléments considérés de l'intégrale (47) se trouvent groupés de manière à représenter des aires alternativement positives et négatives, toutes fort petites, et qui décroissent de l'une à l'autre à mesure que u marche vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Ces aires ont donc leur somme algébrique moindre que la première d'entre elles, nulle pour α infini, et la formule (46) est bien exacte.

Mais il importe d'observer que cette formule de Fourier, si on l'écrit, comme il arrive souvent,

$$(48)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\alpha(x-\xi)\,d\xi,$$

a pour second membre une intégrale devant en partie sa convergence,

sa valeur finie et déterminée, à l'ordre dans lequel se succèdent ses éléments (ordre qui y règle la proportion des éléments positifs aux éléments négatifs), et non à leur seule petitesse absolue; de sorte qu'il faudra ne la transformer qu'avec de minutieuses précautions et en vérifiant dans chaque cas si l'on n'altère pas sa valeur. Il faut se souvenir que, d'après la démonstration précédente, la limite supérieure de l'intégration en α est supposée indépendante de ξ; de plus, elle ne doit devenir infinie qu'à la fin des calculs, quoique l'intégration en α ait été effectuée la première. Heureusement, ces précautions deviennent inutiles quand la nature de la question introduit (comme on verra dans la XLIXe Leçon) sous les deux signes $\int$, avec une variable indépendante distincte de x, une exponentielle décroissante assurant la convergence dès que cette autre variable reçoit les valeurs qu'on veut lui attribuer.

343*. — Exemples : développement de quelques fonctions simples, entre les limites zéro et π, en séries procédant suivant les sinus ou les cosinus des multiples de la variable; remarque sur les séries trigonométriques non susceptibles d'être différentiées; sommation de séries numériques importantes.

Pour donner deux exemples très simples de l'emploi des séries trigonométriques, développons par la formule de Lagrange, (43) [p. 167*], entre les limites zéro et π, ou plutôt ε et $\pi-\varepsilon$, les deux fonctions les plus simples possibles, savoir $f(x)=$ la quantité constante $\frac{\pi}{4}$ et $f(x)=$ l'expression du premier degré $\frac{x}{2}$. L'intégrale $\int_0^a f(\xi)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi$ sera, dans le premier cas,

$$\frac{\pi}{4}\int_0^\pi \sin i\xi\,d\xi=-\frac{\pi}{4i}(\cos i\xi)_0^\pi=\frac{\pi}{4}\,\frac{1-\cos i\pi}{i},$$

c'est-à-dire $\frac{\pi}{2i}$ ou zéro suivant que i se trouvera impair ou pair, et, dans le second cas,

$$\int_0^\pi \frac{\xi}{2}\sin i\xi\,d\xi=\left(-\frac{\xi\cos i\xi}{2i}+\frac{\sin i\xi}{2i^2}\right)_0^\pi=-\frac{\pi\cos i\pi}{2i},$$

c'est-à-dire $\frac{\pi}{2i}$ pour i impair et $-\frac{\pi}{2i}$ pour i pair.

Il vient donc, vu qu'ici $a = \pi$: 1° d'une part,

$$(49) \quad (\text{de } x = \varepsilon \text{ à } x = \pi - \varepsilon) \quad \frac{\pi}{4} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots.$$

généralisation de la formule de Leibnitz $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$ (p. 80), qu'elle donne pour $x = \frac{\pi}{2}$; et, 2° d'autre part,

$$(50) \quad (\text{de } x = 0 \text{ à } x = \pi - \varepsilon) \quad \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots,$$

ou, plus simplement, en remplaçant cette dernière relation par sa différence, terme à terme, d'avec (49),

$$(51) \quad (\text{de } x = \varepsilon \text{ à } x = \pi - \varepsilon) \quad \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 6x}{6} + \ldots.$$

On remarquera que, dans ces formules, les séries des seconds membres tendent vers les premiers membres lorsqu'on y prend de plus en plus de termes, sans que leurs dérivées,

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots, \qquad \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots, \text{ etc.},$$

convergent vers aucune limite, les termes ne s'y approchant pas de zéro. Il arrive donc aux séries trigonométriques, même dans des cas très simples, de ne pouvoir être différentiées ; et, cela, comme on a vu dès le n° **13*** (t. I, p. 2*), à cause de la variation trop rapide de leurs petits termes de plus en plus éloignés. On peut dire alors que les *fonctions développées* $\frac{\pi}{4}, \frac{x}{2}, \ldots$, *ont*, comme il est évident, *des dérivées*, $0, \frac{1}{2}, \ldots$, *mais que leurs expressions en série n'en ont pas, faute d'une variation assez graduelle;* et cette circonstance constitue, malheureusement, un grave défaut des développements dont il s'agit, comme, en général, d'autres séries, quelles qu'elles fussent d'ailleurs, qui procéderaient de même suivant des termes affectés d'ondulations se raccourcissant trop vite d'un terme à l'autre. Aussi, dans les questions où le rôle des dérivées sera essentiel, devra-t-on regarder comme insuffisante une solution constituée par des séries pareilles ; puisque, quel que soit le nombre de leurs termes qu'on y utilisera pour le calcul numérique, les dérivées qu'elles donneront n'auront, pour ainsi dire, rien de commun (sauf en moyenne) avec celles que l'on se propose d'obtenir.

Mais revenons à (49), le premier des développements trouvés ci-

dessus, pour en déduire d'autres séries trigonométriques plus facilement, à certains égards, que par l'emploi direct des formules du nº 341*. A cet effet, multiplions-y chaque terme par dx et intégrons-le depuis $x = 0$ jusqu'à une limite x inférieure ou égale à π. Nous aurons

$$(52)\quad (\text{de } x=0 \text{ à } x=\pi)\quad \frac{\pi x}{4} = \frac{1-\cos x}{1^2} + \frac{1-\cos 3x}{3^2} + \frac{1-\cos 5x}{5^2} + \ldots,$$

et, en faisant $x = \frac{\pi}{2}$, de manière à annuler $\cos x$, $\cos 3x$, ...,

$$(53)\qquad \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots;$$

d'où enfin, retranchant (52) de (53), on tirera

$$(54)\quad (\text{de } x=0 \text{ à } x=\pi)\quad \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots.$$

Or multiplions de même cette dernière par dx, et intégrons encore chaque terme à partir de $x = 0$. Il viendra

$$(55)\quad (\text{de } x=0 \text{ à } x=\pi)\quad \frac{\pi}{8}(\pi x - x^2) = \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots.$$

relation analogue à celle d'où l'on est parti, (49), et qui, en y posant de même $x = \frac{\pi}{2}$, donne

$$(56)\qquad \frac{\pi^3}{32} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \ldots.$$

D'ailleurs, une nouvelle multiplication de (55) par dx, suivie d'une intégration effectuée sur chaque terme à partir de $x = 0$, amène la formule, rappelant (52),

$$(57)\quad \begin{cases} (\text{de } x=0 \text{ à } x=\pi) \\ \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{1-\cos x}{1^4} + \frac{1-\cos 3x}{3^4} + \frac{1-\cos 5x}{5^4} + \ldots; \end{cases}$$

d'où l'hypothèse $x = \frac{\pi}{2}$ déduira la relation, analogue à (53),

$$(58)\qquad \frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots.$$

Et, si l'on retranche (57) de (58), il vient encore, pareillement à (54),

$$(59)\quad (\text{de } x=0 \text{ à } x=\pi)\quad \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) = \frac{\cos x}{1^4} + \frac{\cos 3x}{3^4} + \frac{\cos 5x}{5^4} + \ldots$$

En continuant de même, on voit que la série d'où l'on est parti, $\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$, égale à $\frac{\pi}{4}$ entre les limites o et π, conduit, entre les mêmes limites, à des expressions finies, rationnelles et entières (en x) des séries trigonométriques rentrant dans chacun des deux types $\frac{\cos x}{1^{2n}} + \frac{\cos 3x}{3^{2n}} + \ldots$, $\frac{\sin x}{1^{2n+1}} + \frac{\sin 3x}{3^{2n+1}} + \ldots$; et qu'il en résulte l'égalité, au produit de facteurs commensurables par π^{2n} ou par π^{2n+1}, des séries numériques respectives

$$(59\ bis)\qquad \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \ldots \quad \text{et} \quad \frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \ldots,$$

dont la seconde n'est autre, pour $n = 0$, que l'expression de $\frac{\pi}{4}$ trouvée par Leibnitz.

Un raisonnement très simple, exposé, pour le cas $n = 2$, dans le nº 22* (t. I, p. 28*) où nous avions déjà obtenu d'une autre manière la formule (53), ramène d'ailleurs la série, que j'appellerai S_m, formée par les puissances d'un certain degré m des inverses des entiers 1, 2, 3, ..., à la série que composent les puissances analogues des inverses des seuls impairs 1, 3, 5, ... Ce raisonnement consiste à dire que l'on a

$$S_m = \left(\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots\right) + \frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \ldots\right)$$

ou

$$S_m = \left(\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots\right) + \frac{S_m}{2^m}$$

et, par suite,

$$(60)\qquad S_m = \frac{2^m}{2^m - 1}\left(\frac{1}{1^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} + \ldots\right).$$

Il viendra donc, en particulier, pour $m = 2$ et $m = 4$, vu les formules (53) et (58),

$$(61)\qquad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Les sommes des séries numériques remarquables (61), (59 *bis*) ont été, en premier lieu, déduites (plus ou moins directement) par Euler de la décomposition de $\sin x$ et $\cos x$ en facteurs, qu'il avait lui-même découverte et qui rend évidente (t. I, p. 27*) la plus utile de ces sommes, savoir, la première (61), relative aux inverses des carrés entiers.

344*. — **Des séries trigonométriques, doubles ou triples, que donne le développement des fonctions de point dans un espace à deux ou trois dimensions constantes, et des intégrales soit quadruples, soit sextuples, auxquelles conduit alors la formule de Fourier, quand cet espace est indéfini en tous sens.**

Une fonction de plusieurs variables x, y, ..., périodique par rapport à chacune d'elles, peut se développer, si l'on n'y considère d'abord que x, en une série procédant suivant les cosinus ou les sinus d'arcs proportionnels à x, avec des coefficients exprimés, comme le montrent les formules (35), (43), etc., par des intégrales définies simples, ayant la variable d'intégration que nous appelons ξ et, sous le signe $\int$, le facteur $f(\xi, y, \ldots)$. Or, dans chaque terme de cette série, développons de même le facteur $f(\xi, y, \ldots)$ suivant les cosinus ou les sinus d'arcs proportionnels à y, qui s'y trouveront affectés, en coefficient, d'intégrales définies simples prises, entre des limites constantes, par rapport à une nouvelle variable d'intégration η et où la fonction f aura la forme $f(\xi, \eta, \ldots)$. L'intégrale en ξ considérée se décomposera donc en une infinité d'intégrales doubles, d'où sortiront, pour passer à côté du cosinus ou sinus fonction de x qui la multiplie, les facteurs cosinus ou sinus fonctions analogues de y; et, chaque terme de la série primitive étant devenu lui-même une série, la fonction $f(x, y, \ldots)$ sera exprimée au moyen d'une série double dont les coefficients contiendront sous leurs deux signes $\int$ le facteur $f(\xi, \eta, \ldots)$. S'il y a une troisième variable z, ce facteur $f(\xi, \eta, z)$ se développera encore en une série trigonométrique suivant les cosinus ou sinus d'arcs proportionnels à z : la fonction $f(x, y, z)$ deviendra donc une série triple. Et ainsi de suite.

Soit, par exemple, a, b, c désignant trois droites de longueur connue, $f(x, y, z)$ une fonction de point arbitrairement donnée, dans l'angle des coordonnées positives, de $x = 0$ à $x = a$, de $y = 0$ à $y = b$, enfin de $z = 0$ à $z = c$, c'est-à-dire dans une *étendue de dimensions constantes* (ou comprise entre limites parallèles); et supposons qu'on veuille la développer par la formule de Lagrange (43) [p. 167*]. Trois applications de celle-ci donneront, en appelant ζ la troisième variable d'intégration introduite, et i, j, k trois entiers indépendants qui recevront successivement toutes les valeurs positives,

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{8}{abc}\sum_{i=1}^{i=\infty}\sum_{j=1}^{j=\infty}\sum_{k=1}^{k=\infty} \sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b}\sin\frac{k\pi z}{c} \\ &\times \int_{\xi=0}^{\xi=a}\int_{\eta=0}^{\eta=b}\int_{\zeta=0}^{\zeta=c} f(\xi,\eta,\zeta)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\sin\frac{j\pi\eta}{b}\sin\frac{k\pi\zeta}{c}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta. \end{aligned}\right.$$

Si c'est dans tout l'espace ou plan, ou solide, que la fonction de point $f(x, y)$, ou $f(x, y, z)$, est donnée, il faudra recourir à la formule de Fourier (46 *bis*) [p. 168*], et, en appelant β, γ des variables d'intégration analogues à α, comme η, ζ le sont à ξ, il viendra, par la même méthode :

(63)
$$\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{1}{\pi^2} \overline{\displaystyle\iint}_0^{+\infty} d\alpha\, d\beta\, \overline{\displaystyle\iint}_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) \cos\alpha(x-\xi) \cos\beta(y-\eta)\, d\xi\, d\eta, \\ f(x, y, z) = \dfrac{1}{\pi^3} \overline{\displaystyle\iiint}_0^{+\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma \\ \qquad \times \overline{\displaystyle\iiint}_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta) \cos\alpha(x-\xi) \cos\beta(y-\eta) \cos\gamma(z-\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \end{cases}$$

La formule de Fourier décompose donc, d'une manière régulière (mais sous les réserves exprimées au n° 342*, p. 170*), une fonction $f(x)$, ou $f(x, y)$, ou $f(x, y, z)$, ..., arbitrairement donnée dans tout l'espace, en éléments d'une forme déterminée très simple, qui est celle d'un produit de cosinus dont les arcs dépendent, chacun, d'une seule variable, x, ou y, ou z, ..., et en sont des fonctions linéaires. Nous verrons dans la Leçon XLIX quelle peut être l'utilité d'un tel mode de décomposition.

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

DE L'EMPLOI DES INTÉGRALES DÉFINIES, POUR EXPRIMER DES FONCTIONS ÉCHAPPANT GÉNÉRALEMENT AUX AUTRES MODES DE REPRÉSENTATION FOURNIS PAR L'ANALYSE : INTÉGRALES POURVUES, SOUS LES SIGNES $\int$, DE FONCTIONS ARBITRAIRES, ET DONT LES DÉRIVÉES ONT DES FORMES SIMPLES.

345*. — **De la représentation des fonctions par les intégrales définies; sur certains types d'intégrales faciles à différentier, et ayant sous les signes $\int$ des fonctions arbitraires.**

Les trois dernières Leçons nous ont montré (pp. 121*, 163*, etc.) que les intégrales définies, sommes d'une infinité d'infiniment petits comportant une expression très variée, sont des fonctions bien plus diverses, bien plus libres d'allure, en quelque sorte, que les fonctions élémentaires de l'Analyse, auxquelles une définition étroite interdit, pour ainsi dire, tout écart, et que les combinaisons d'un nombre, même illimité, de ces fonctions, procédant par termes de grandeur finie, comme sont les séries *convergentes,* supposées toutefois l'être assez pour qu'un *certain* nombre assignable de leurs termes fournisse leur somme avec toute l'approximation requise. En effet, dans ces fonctions élémentaires, et même dans les séries dont il s'agit (où l'influence des termes très éloignés reste *constamment* insensible), la continuité, l'enchaînement des valeurs successives, ne consistent pas seulement en une manière graduelle dont se produisent les variations; mais aussi en rapports *directs* imposés par la loi de formation aux valeurs les plus distantes, à ce point qu'un arc quelconque, fût-il infiniment petit, de la courbe les représentant, suffit, comme on sait, pour déterminer cette courbe tout entière.

Aussi les fonctions et séries élémentaires considérées sont-elles impuissantes à exprimer la solution des principaux problèmes de la Mécanique physique et de la Physique mathématique, où l'infinie diversité possible de ce qu'on appelle l'*état initial* des corps introduit des *fonctions arbitraires,* c'est-à-dire des fonctions ayant leur cours composé de parties indépendantes, impossibles à déduire les unes des autres, quelque parfaits que soient d'ailleurs les *raccordements* ménagés entre elles ou la graduelle variation de leur ensemble. Or l'exemple de

la formule de Fourier (p. 168*) prouve que les intégrales définies pourront, au contraire, représenter de telles fonctions; et celui de la série de Fourier, réductible du reste à l'expression asymptotique d'une intégrale définie, montre qu'elles partageront cette aptitude avec certaines séries, à variation généralement non graduelle, dont les termes sont affectés d'ondulations de plus en plus courtes à mesure que leur ordre s'élève. Mais les intégrales auront, sur ces séries (d'un calcul numérique parfois non moins laborieux que le leur, ou peu s'en faut), l'avantage de la continuité offerte par leurs éléments successifs, à la place de la discontinuité que présente la suite des termes d'une série par le fait même que leur grandeur est sensible; à quoi il faut ajouter enfin que les intégrales définies doivent à leur notation commode et concise, à la simplicité de leur représentation géométrique, à la multitude de leurs applications, d'être devenues presque aussi familières aux géomètres que les expressions de forme finie, dont elles constituent, pour ainsi dire, une nouvelle espèce.

Il y aura donc lieu de recourir aux intégrales définies, prises entre limites soit variables, soit constantes, quand l'emploi des fonctions plus élémentaires paraîtra insuffisant; ce qui arrivera presque toujours dans les questions qu'il nous reste à aborder, savoir, dans l'intégration des équations différentielles, et surtout dans celle des équations aux dérivées partielles. Les intégrales définies y réussiront assez souvent, là où auront échoué les expressions plus simples; mais il arrivera quelquefois aussi qu'une même solution d'équation différentielle sera représentée à la fois par une intégrale et par une fonction moins complexe, circonstance entraînant évidemment la réduction, à cette dernière, de l'intégrale, que l'on regardera dès lors comme évaluée.

Par suite de l'importance physique du paramètre différentiel $\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} +, \ldots$ et, plus généralement, des dérivées secondes directes $\frac{d^2}{dx^2}, \ldots, \frac{d^2}{dt^2}$, des fonctions de point $f(x, y, \ldots, t)$ représentatives des phénomènes, les intégrales définies, à limites constantes et à élément fonction des paramètres $x, y, \ldots, t$, les mieux appropriées aux problèmes de la Philosophie naturelle, seront celles dont les dérivées secondes directes se formeront le plus simplement, et qui, d'ailleurs, contiendront sous leurs signes $\int$ une fonction arbitraire pouvant s'adapter à toutes les variétés de l'*état initial*. La formule de Fourier (pp. 169* et 175*) doit justement son utilité à la réalisation de ces conditions; car les éléments de l'intégrale n'y contiennent x,

$y, \ldots$, que par le produit $\cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)\ldots$, et leurs dérivées secondes directes en $x, y, \ldots$, ainsi que leur paramètre différentiel Δ_2, ne font que les reproduire, aux facteurs constants près $-\alpha^2, -\beta^2, \ldots, -(\alpha^2+\beta^2+\ldots)$.

Mais il y a des intégrales plus avantageuses encore que celle de Fourier, sujette au grave inconvénient d'exiger deux signes $\int\int$, ou une double intégration, pour chaque coordonnée $x, y, \ldots$; de sorte qu'il faut, comme on verra (XLIXe Leçon), savoir effectuer dans les formules obtenues par son emploi la moitié des intégrations qu'elle y introduit, si l'on veut en tirer la solution, *sous forme accessible,* des problèmes auxquels elle est applicable. Des intégrales simples pour le cas d'une seule coordonnée ou d'un seul paramètre, et doubles ou au plus triples pour ceux de deux et de trois coordonnées, vaudront bien mieux si elles sont également aptes à vérifier les conditions des problèmes, puisque les intégrations dont il s'agit s'y trouveront toutes faites. Or c'est ce qui arrive pour deux certains types d'intégrales, auxquels nous consacrerons la Leçon actuelle et les deux Leçons suivantes. Ils présentent le caractère commun d'avoir sous leurs signes $\int$, du moins quand on les envisage au point de vue le plus général, deux fonctions arbitraires multipliées l'une par l'autre, et dont l'une reste encore arbitraire après qu'un choix convenable de l'autre a fait acquérir à l'intégrale les propriétés caractéristiques voulues : mais ils diffèrent, et par la manière dont les paramètres s'y trouvent combinés, sous les signes $\int$, avec les variables d'intégration, et en ce que les intégrales du premier type sont simples, tandis que celles du second sont triples ou tout au moins doubles, dans les cas utiles.

346*. — Premier type : intégrales de la forme $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$ et de la forme plus générale $\int_0^\infty F\left(\frac{\alpha^2}{2}, \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$.

Le premier type est constitué par les intégrales, que j'appellerai ici φ, de la forme

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha, \tag{1}$$

où α désigne, comme on voit, la variable d'intégration, t un paramètre, supposé *positif* pour fixer les idées, et f, ψ deux fonctions arbitraires, assujetties seulement à rendre l'intégrale finie et déter-

minée. Le produit $f\psi$ placé sous le signe $\int$ doit, pour cela, ne pas devenir, à la limite inférieure zéro, infini de l'ordre de $\frac{1}{\alpha}$ ou d'un ordre plus élevé (p.64); et, si l'on admet, comme nous le ferons, que les fonctions f, ψ restent finies dans l'intervalle des limites, il faut encore que les éléments correspondant aux très grandes valeurs de α, exprimés à fort peu près par $f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi(0)\,d\alpha$, donnent une somme évanouissante, ou que l'intégrale $\int_\alpha^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$ soit elle-même finie et déterminée, du moins dans l'hypothèse d'une valeur de $\psi(0)$ différente de zéro.

Cela posé, différentions sous le signe $\int$, par rapport à t, l'expression (1) de φ. Comme la dérivée, en t, de $\frac{t^2}{2\alpha^2}$ est $\frac{t}{\alpha^2}$, nous aurons pour résultat $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\frac{t\,d\alpha}{\alpha^2}$; ce qui revient à $\int_{\alpha=\infty}^{\alpha=0} f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\frac{t}{\alpha}$, c'est-à-dire à $\int_0^\infty f\left(\frac{t^2}{2u^2}\right)\psi'\left(\frac{u^2}{2}\right)du$, si l'on pose $\frac{t}{\alpha}=u$, ou que l'on prenne pour nouvelle variable d'intégration u le rapport $\frac{t}{\alpha}$, croissant de zéro à l'infini (vu l'hypothèse $t>0$) quand α ou $\frac{t}{u}$ décroît de l'infini à zéro. Le nom u de la variable d'intégration important peu, remplaçons-le par α; et nous aurons alors

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dt}=\int_0^\infty f\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha,$$

expression de la dérivée de φ que nous savons devoir convenir pourvu qu'elle soit bien déterminée, ou à la double condition que le produit $f\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$ ne devienne pas, pour $\alpha=0$, infini de l'ordre de $\frac{1}{\alpha}$, et que, si $f(0)$ diffère de zéro, l'intégrale $\int_\alpha^\infty \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$ soit elle-même déterminée, du moins dans l'hypothèse d'une dérivée ψ' constamment finie entre les deux limites de l'intégration.

En résumé, et sous ces réserves, on voit que *l'intégrale* (1) *conserve, dans la différentiation, sa forme caractéristique, malgré la grande généralité que lui donnent ses deux fonctions arbitraires f, ψ; seulement, l'une de ces deux fonctions, celle qui contenait le paramètre t, est remplacée par sa dérivée, et échange d'ailleurs*

sa variable $\frac{t^2}{2\alpha^2}$ *contre celle,* $\frac{\alpha^2}{2}$, *de l'autre fonction.*

La même règle, appliquée à la dérivée première (2), donnera pour la dérivée seconde la formule

$$(3) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \int_0^\infty f'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha.$$

Donc, *la dérivée seconde de l'intégrale* (1) *s'obtient par une simple différentiation effectuée sur les deux facteurs de la fonction sous le signe* $\int$, *relativement à leurs variables respectives* $\frac{\alpha^2}{2}$ *et* $\frac{t^2}{2\alpha^2}$. Par suite, la dérivée quatrième de φ en t ne contiendra, sous le signe $\int$, que les dérivées secondes f'', ψ''; la fonction φ et toutes ses dérivées se réduiront, pour $t=0$, aux deux formes $\psi(0)\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$, $f(0)\int_0^\infty \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$, dans lesquelles f et ψ pourront être remplacées par leurs dérivées successives; etc.

Nous aurons à prendre pour ψ, dans les cas les plus simples, les fonctions qui se reproduisent, au signe près, par une ou par deux différentiations, et qui ne dépassent jamais l'unité en valeur absolue, savoir, la fonction exponentielle affectée d'un exposant négatif, ou l'une quelconque des deux fonctions circulaires cosinus et sinus. Les intégrales $\int_\alpha^\infty \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$, $\int_\alpha^\infty \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$, $\int_\alpha^\infty \psi''\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha, \ldots$, même en y faisant partir de zéro l'intégration, sont bien alors finies et déterminées; car, si l'on y pose $\alpha = u\sqrt{2}$, elles deviennent $\sqrt{2}\int_0^\infty \psi(u^2)\,du$, $\sqrt{2}\int_0^\infty \psi'(u^2)\,du, \ldots$, c'est-à-dire, suivant les cas et abstraction faite du signe, $\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-u^2}du$, $\sqrt{2}\int_0^\infty \cos u^2\,du$, $\sqrt{2}\int_0^\infty \sin u^2\,du$; et leurs valeurs sont $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'après les formules (20) et (32) des pp. 167 et 127*. Ainsi l'on a

$$(4) \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \int_0^\infty \cos\frac{\alpha^2}{2}\,d\alpha = \int_0^\infty \sin\frac{\alpha^2}{2}\,d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Si, d'ailleurs, la fonction f, sans devenir jamais infinie (non plus que les dérivées f', f'', ... introduites dans les formules), reste arbi-

traire, en décroissant toutefois assez, quand sa variable grandit sans limite, pour que les expressions $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$, $\int_0^\infty f'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$, ... soient également finies et déterminées, l'intégrale φ et ses dérivées accepteront bien les règles de différentiation précédentes. Nous verrons vers la fin du Cours (XLVIIe et XLVIIIe Leçons) comment ces diverses intégrales, avec quelques autres un peu moins simples contenues aussi dans le type (1), fournissent les solutions d'importants problèmes de la Physique mathématique.

Remplaçons, dans (1), le produit $f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)$ par une fonction arbitraire de la forme $F\left(\frac{\alpha^2}{2}, \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)$: nous aurons le type plus général $\int_0^\infty F\left(\frac{\alpha^2}{2}, \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$, auquel les mêmes raisonnements seront applicables. En appelant F' la dérivée de F par rapport à sa seconde variable, il viendra

$$(5)\qquad \frac{d}{dt}\int_0^\infty F\left(\frac{\alpha^2}{2}, \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha = \int_0^\infty F'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}, \frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha.$$

Par exemple, si la fonction F se réduit à la forme $f\left(\frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)$, sa dérivée F' par rapport à $\frac{t^2}{2\alpha^2}$ sera $\pm f'\left(\frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)$; et la formule (5), appliquée deux fois de suite, donnera

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha = \pm\int_0^\infty f'\left(\frac{t^2}{2\alpha^2} \pm \frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha, \\ \dfrac{d^2}{dt^2}\displaystyle\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha = \pm\int_0^\infty f''\left(\frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha. \end{cases}$$

347* — Cas particulier d'intégrales se reproduisant par différentiation ; calcul de $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\frac{t^2}{\alpha^2}\right)}d\alpha$.

Si, dans (1), on prend non seulement pour ψ, mais aussi pour f, une exponentielle à exposant négatif, un cosinus ou un sinus, il est clair que l'intégrale φ se différentiera par les règles précédentes et se reproduira par différentiation; ce qui nous permettra, dès à présent, dans le cas le plus simple, et plus loin (XXXIXe et XLe Leçons) dans les autres cas, d'en calculer la valeur.

Quand l'un des deux facteurs, ψ par exemple, sera un cosinus ou un sinus, sa dérivée première ne le reproduira pas (en valeur absolue),

mais seulement sa dérivée seconde. Or il faudra quatre différentiations de φ pour que cette dérivée ψ'' se présente avec la même variable $\frac{t^2}{2\alpha^2}$ que le fait ψ dans (1); et l'autre facteur f se sera alors reproduit lui-même, en changeant de signe, comme ψ, s'il est un cosinus ou un sinus, sans changement de signe s'il est une exponentielle. L'intégrale φ vérifiera donc l'équation $\frac{d^4\varphi}{dt^4} = \pm\varphi$, où le second membre aura le signe supérieur $+$ dans le premier cas, c'est-à-dire quand chacun des deux facteurs f, ψ sera trigonométrique, et le signe inférieur — dans le second, où un seul facteur sera une fonction circulaire, l'autre étant une fonction exponentielle.

Si, au contraire, f, ψ sont deux exponentielles, à exposant négatif pour ne pas rendre infinie l'intégrale, celle-ci

$$(7) \qquad \varphi = \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}} d\alpha = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\frac{t^2}{\alpha^2}\right)} d\alpha$$

rentrera dans le type $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$, avec une fonction f exponentielle, égale et de signe contraire à sa dérivée f'. La première équation (6) donnera donc $\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi$, et, au signe près, l'intégrale se reproduira à chaque différentiation. La quantité φ étant ainsi proportionnelle à sa dérivée, avec le coefficient de proportionnalité -1, sa valeur sera elle-même proportionnelle à e^{-t}, d'après un résultat obtenu au n° 63* (t. I, p. 81*); et comme, pour $t=0$, alors que $e^{-t}=1$, elle devient $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ d'après (7) et la première (4), l'on aura, en définitive,

$$(8) \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\alpha^2+\frac{t^2}{\alpha^2}\right)} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-t}.$$

Pour obtenir ici des intégrales qui se reproduisent (en valeur absolue) par deux différentiations, il faut recourir au type $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha$, en y prenant pour la fonction f un cosinus ou un sinus. Posons, en effet,

$$(9) \qquad \begin{cases} \text{soit } \varphi = \displaystyle\int_0^\infty \cos\left(\frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha, \\ \text{soit } \varphi = \displaystyle\int_0^\infty \sin\left(\frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha; \end{cases}$$

et la seconde équation (6) donnera $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mp\varphi$.

348*. — Propriétés qu'acquiert le premier type, quand on y introduit comme paramètre, au lieu de t, l'une quelconque de ses puissances.

Un changement très simple de variable permet de donner à l'intégrale φ, définie par (1), une forme plus générale. Il consiste à remplacer t, comme paramètre, par une quelconque, r, de ses puissances. Posons, en effet, $r = t^{\frac{p}{2}}$, $r^2 = t^p$, c'est-à-dire $t = r^{\frac{2}{p}}$, p désignant une constante (positive ou négative) quelconque, et, en même temps, vu l'identité $\alpha^2 = (\alpha^p)^{\frac{2}{p}}$, faisons figurer α^p, au lieu de α^2, dans les variables des fonctions f, ψ. Celles-ci, devenues $f\left[2^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}}\right]$, $\psi\left[2^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)^{\frac{2}{p}}\right]$, seront respectivement deux certaines fonctions des deux variables $\frac{\alpha^p}{2}$, $\frac{r^2}{2\alpha^p}$, dont la forme est plus générale que $\frac{\alpha^2}{2}$ et $\frac{t^2}{2\alpha^2}$: nous pourrons écrire ces fonctions, $f_1\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)$, $\psi_1\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)$. De plus, l'échange des variables $\frac{\alpha^2}{2}$, $\frac{t^2}{2\alpha^2}$ entre f et ψ', échange réalisé dans la formule (2), donnera, comme on voit, $f_1\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)$ et $\psi'\left[2^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}}\right]$. Cette dernière fonction ψ', rapport de $d\psi$ à $d\left[2^{\frac{2}{p}-1}\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}}\right]$, ou à $2^{\frac{2}{p}-1}\frac{2}{p}\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)^{\frac{2}{p}-1} d\left(\frac{\alpha^p}{2}\right) = \frac{2}{p}\alpha^{2-p}d\frac{\alpha^p}{2}$, diffère de $\psi'_1\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)$, rapport de $d\psi_1 = d\psi$ à $d\frac{\alpha^p}{2}$, en ce qu'elle égale, comme on voit, son quotient par $\frac{2}{p}\alpha^{2-p}$ ou son produit par $\frac{p}{2}\alpha^{p-2}$. Ainsi, les deux expressions (1) et (2) de φ et de $\frac{d\varphi}{dt}$ deviennent respectivement

$$\int_0^\infty f_1\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi_1\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha \quad \text{et} \quad \frac{p}{2}\int_0^\infty f_1\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)\psi'_1\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\alpha^{p-2}\,d\alpha,$$

formules dans lesquelles nous pourrons désormais effacer les indices ou représenter simplement par f, ψ les deux fonctions f_1, ψ_1, évidemment arbitraires, comme f, ψ, sous les seules réserves de rendre déterminées les deux intégrales. Nous poserons donc simplement

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha; \tag{10}$$

et comme, d'ailleurs, la relation $t = r^{\frac{2}{p}}$ $\left(\text{d'où } \frac{dt}{dr} = \frac{2}{p} r^{\frac{2}{p}-1}\right)$ donnera $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p}{2} r^{1-\frac{2}{p}} \frac{d\varphi}{dr}$, il viendra, par la suppression d'un facteur commun $\frac{p}{2}$,

$$(11) \qquad r^{1-\frac{2}{p}} \frac{d\varphi}{dr} = \int_0^\infty f\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right) \psi'\left(\frac{\alpha^p}{2}\right) \alpha^{p-2}\, d\alpha.$$

Mais le second membre de celle-ci n'a pas encore sa forme la plus simple. Appelons q le nombre, corrélatif à p, défini par la relation symétrique

$$(12) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{ou} \quad p + q = pq;$$

et appelons β une nouvelle variable d'intégration, telle que l'on ait $\alpha^p = \beta^q$, β variant ainsi de zéro à l'infini ou de l'infini à zéro, pendant que α croît de zéro à l'infini, suivant que p, q ont même signe ou signes contraires. Vu la deuxième (12) qui donne $(p-1)q = p$ ou $p - 1 = \frac{p}{q}$, nous aurons $\alpha^{p-1} = \alpha^{\frac{p}{q}} = \beta$ et, en différentiant, $\alpha^{p-2}\, d\alpha = \frac{d\beta}{p-1} = \frac{q}{p}\, d\beta$. Le second membre de (11) deviendra donc

$$\frac{q}{p} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} f\left(\frac{r^2}{2\beta^q}\right) \psi'\left(\frac{\beta^q}{2}\right) d\beta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left(\pm \frac{q}{p}\right) \int_0^\infty f\left(\frac{r^2}{2\beta^q}\right) \psi'\left(\frac{\beta^q}{2}\right) d\beta,$$

expression dans laquelle le signe supérieur $+$ se rapporte au cas où α, β varient dans le même sens, et le signe inférieur $-$, au cas où α, β varient en sens contraire. Ces cas respectifs se produisant suivant que le rapport $\frac{q}{p}$ est ou n'est pas positif, $\left(\pm \frac{q}{p}\right)$ devra, dans tous les cas, être pris positivement et pourra être remplacé par $\sqrt{\frac{q^2}{p^2}}$, sous la condition d'y faire signifier toujours au radical une racine carrée *arithmétique*. En remplaçant d'ailleurs, désormais, β par α sous le signe $\int$, la formule (11) deviendra donc

$$(13) \qquad r^{1-\frac{2}{p}} \frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{q^2}{p^2}} \int_0^\infty f\left(\frac{r^2}{2\alpha^q}\right) \psi'\left(\frac{\alpha^q}{2}\right) d\alpha.$$

Ainsi, en dehors du cas particulier $p = 2$, l'intégrale φ, définie par

(10), ne conserve plus sa forme caractéristique dans la différentiation; car il faut, pour y retrouver cette forme, multiplier sa dérivée par $r^{1-\frac{2}{p}}$ et aussi, d'après (13), par $\sqrt{\frac{p^2}{q^2}}$. Et, encore, l'exposant p est-il remplacé dans le résultat par un autre, q, associé à p en vertu de la relation symétrique (12), sans compter que les deux fonctions ψ' et f continuent à échanger leurs variables.

On généralisera évidemment, d'une manière analogue, la formule (5).

Mais, pour obtenir une relation où entre la dérivée deuxième de φ, appliquons la même règle de différentiation à l'intégrale figurant dans le second membre de (13); ce qui, par suite de la permutation des rôles entre p et q, donnera

$$r^{1-\frac{2}{q}}\frac{d}{dr}\int_0^\infty f\left(\frac{r^2}{2\alpha^q}\right)\psi'\left(\frac{\alpha^q}{2}\right)d\alpha = \sqrt{\frac{p^2}{q^2}}\int_0^\infty f'\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi'\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha.$$

Si donc nous différentions en r les deux membres de (13), puis que nous multipliions les résultats par $r^{1-\frac{2}{q}}$, il viendra simplement, au second membre, $\int_0^\infty f'\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi'\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha$, tandis que le premier,

$$r^{1-\frac{2}{q}}\frac{d}{dr}\left(r^{1-\frac{2}{p}}\frac{d\varphi}{dr}\right) \quad \text{ou} \quad r^{1-\frac{2}{q}}\left[r^{1-\frac{2}{p}}\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\left(1-\frac{2}{p}\right)r^{-\frac{2}{p}}\frac{d\varphi}{dr}\right],$$

se réduira, en vertu de (12), à $\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\left(1-\frac{2}{p}\right)\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}$. On aura ainsi, comme généralisation de l'équation (3),

$$(14) \qquad \frac{d^2\varphi}{dr^2}+\left(1-\frac{2}{p}\right)\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = \int_0^\infty f'\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi'\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha.$$

En résumé, *pour que l'intégrale* $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha$ *conserve sa forme avec substitution, aux deux fonctions* f, ψ, *de leurs dérivées premières, il ne suffit plus, quand* p *diffère de* 2, *d'en prendre la dérivée seconde par rapport au paramètre* r; *mais il faut, à cette dérivée seconde, ajouter* $\left(1-\frac{2}{p}\right)$ *fois le quotient de la dérivée première par le paramètre* r.

La répétition de la même opération donnera, évidemment, $\int_0^\infty f''\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi''\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha$ et reproduira, en valeur absolue, l'inté-

grale φ, si l'on a pris pour f et ψ, comme on l'a fait précédemment dans le cas $p=2$ (p. 182*), des exponentielles à exposant négatif, des cosinus, ou des sinus. On voit même que, déjà, le second membre de (14) sera identique à φ, si f et ψ sont deux exponentielles.

La formule (3), traitée comme l'a été ci-dessus (2) pour donner (11), conduit à un résultat digne de remarque par sa simplicité, sans qu'il y ait lieu de changer la variable t, c'est-à-dire de substituer r^2 à t^p.

Mais peut-être est-il maintenant préférable de déduire ce résultat de (14), en se souvenant que le premier membre de celle-ci s'est présenté comme développement de l'expression $r^{1-\frac{2}{q}}\frac{d}{dr}\left(r^{1-\frac{2}{p}}\frac{d\varphi}{dr}\right)$, qui, vu la formule symbolique $\frac{d}{dt}=\frac{p}{2}r^{1-\frac{2}{p}}\frac{d}{dr}$, revient identiquement à $\frac{4}{p^2}r^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, c'est-à-dire à $\frac{4}{p^2}r^{2\left(\frac{2}{p}-1\right)}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{4}{p^2}t^{2-p}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Multiplions donc l'équation (14) par $\frac{p^2}{4}t^{p-2}$, et, observant que φ désigne toute intégrale de la forme $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi\left(\frac{t^p}{2\alpha^p}\right)d\alpha$, nous aurons la formule cherchée

$$(15)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi\left(\frac{t^p}{2\alpha^p}\right)d\alpha=\frac{p^2}{4}t^{p-2}\int_0^\infty f'\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi'\left(\frac{t^p}{2\alpha^p}\right)d\alpha.$$

L'intégrale du second membre sera identique à celle du premier si l'on prend pour f et ψ deux exponentielles à exposant négatif. Il viendra donc alors l'équation différentielle remarquable, que nous considérerons plus loin,

$$(15\ bis)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{p^2}{4}t^{p-2}\varphi,\qquad \text{si}\qquad \varphi=\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\alpha^p+\frac{t^p}{\alpha^p}\right)}d\alpha.$$

349*. — Emploi de ce type pour former des fonctions de point dont le paramètre différentiel Δ_2 soit d'un calcul facile.

Supposons que la quantité φ, définie par (10), désigne, dans un espace à m dimensions (m ayant les valeurs 1, 2 ou 3), une fonction dont la valeur, au moment où on la considère, soit la même en tous les points situés à une égale distance quelconque r d'une origine donnée. Son paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2\varphi$ aura (t. I, p. 95*) l'expression $\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{m-1}{r}\frac{d\varphi}{dr}$. Or celle-ci sera identique au premier

membre de (14), si le choix de l'exposant p, dans (10), s'est fait d'après la condition

$$(16)\qquad 1-\frac{2}{p}=m-1;\qquad \text{d'où}\qquad p=\frac{2}{2-m},\qquad q=\frac{p}{p-1}=\frac{2}{m}.$$

Alors les formules (13) et (14) deviendront

$$(17)\qquad r^{m-1}\frac{d\varphi}{dr}=\sqrt{\frac{q^2}{p^2}}\int_0^\infty f\left(\frac{r^2}{2\alpha^q}\right)\psi'\left(\frac{\alpha^q}{2}\right)d\alpha,\qquad \Delta_2\varphi=\int_0^\infty f'\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi'\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha;$$

et il est clair, par suite de l'analogie des expressions de $\Delta_2\varphi$ et de φ, que les quantités $r^{m-1}\frac{d\Delta_2\varphi}{dr}$, $\Delta_2\Delta_2\varphi$, $r^{m-1}\frac{d\Delta_2\Delta_2\varphi}{dr}$, $\Delta_2\Delta_2\Delta_2\varphi$, ..., comporteront des formules analogues où, seulement, les lettres f, ψ seront affectées d'autant d'accents de plus que le signe Δ_2 se trouvera plus de fois répété.

Dans le cas d'un espace à une seule dimension où $m=1$ et où, par suite, p, q ont la valeur commune 2, toutes ces formules sont identiques à celles que l'on avait déjà obtenues (pp. 179*, 180*) quand le paramètre s'appelait t et non r.

Dans le cas d'un espace à trois dimensions, où $m=3$, les équations (16) donnent $p=-2$, $q=\frac{2}{3}$, et l'application des formules (17) ne présente pas de difficultés. Il peut être bon d'observer alors que l'expression (10) de φ, multipliée par r, donne $\int_0^\infty f\left(\frac{r^2}{2r^2\alpha^2}\right)\psi\left(\frac{r^2\alpha^2}{2}\right)r\,d\alpha$; de sorte qu'en y adoptant $r\alpha$ pour variable d'intégration, ou remplaçant $r\alpha$ par α et $r\,d\alpha=d(r\alpha)$ par $d\alpha$, elle devient $\int_0^\infty f\left(\frac{r^2}{2\alpha^2}\right)\psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$, intégrale de la forme (1) et dont la dérivée seconde en r est, par suite, $\int_0^\infty f'\left(\frac{r^2}{2\alpha^2}\right)\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$. La substitution de $r\alpha$ à α, dans cette expression de $\frac{d^2 r\varphi}{dr^2}$, la change en $r\int_0^\infty f'\left(\frac{1}{2\alpha^2}\right)\psi'\left(\frac{r^2\alpha^2}{2}\right)d\alpha$, valeur de $r\Delta_2\varphi$ d'après la seconde (17). Ainsi l'on a

$$(18)\qquad (\text{pour } m=3)\qquad \frac{d^2 r\varphi}{dr^2}=r\Delta_2\varphi,\quad \text{ou}\quad \Delta_2\varphi=\frac{1}{r}\frac{d^2 r\varphi}{dr^2}.$$

Et, en effet, quelle que soit une fonction φ de r, son produit par r, différentié deux fois, puis divisé par r, donne $\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}$; ce qui est bien, quand $m=3$, l'expression de $\Delta_2\varphi$.

Reste le cas $m=2$. Alors, d'après les équations (16), q vaut l'unité, mais p est infini, et l'intégrale φ, définie par (10), reçoit une expression asymptotique qu'il importe de dégager. A cet effet, supposant, par exemple, m de la forme $2-2\varepsilon$, ou p infini positif, observons que α^p devient soit infiniment petit, soit infiniment grand, dès que α diffère sensiblement de l'unité; en sorte que toutes les valeurs finies de la puissance α^p, par le seul intermédiaire de laquelle la fonction sous le signe $\int$ dépend de α, se produisent quand α diffère infiniment peu de l'unité. Si donc, β étant une nouvelle variable d'intégration, on pose $\alpha=1+\frac{\beta}{p}$ et, par suite, $d\alpha=\frac{1}{p}\,d\beta$, la puissance α^p recevra toutes ses valeurs utiles à considérer alors que β, négatif ou positif, sera incomparablement plus faible que p, de manière à rendre $\left(1+\frac{\beta}{p}\right)^p$, c'est-à-dire α^p, identique finalement à e^β, d'après la définition même de la fonction exponentielle (t. I, p. 42). D'ailleurs, lorsque p devient infini, β peut recevoir des valeurs quelconques sans que α^p cesse d'égaler e^β, et, α^p variant de 0 à ∞ entre les limites de l'intégration, β y croîtra de $-\infty$ à ∞. L'expression (10) de φ deviendra donc $\frac{1}{p}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{1}{2}\,e^\beta\right)\psi\left(\frac{r^2}{2}\,e^{-\beta}\right)d\beta$. Multiplions-la, ainsi que les formules (17), par p, et appelons Φ le produit $p\varphi$. Nous aurons, grâce à une transformation de l'expression de $\Delta_2\varphi$ analogue à celle de l'expression même de φ :

$$(19)\qquad (\text{pour } m=2)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{e^\beta}{2}\right)\psi\left(\frac{r^2}{2}\,e^{-\beta}\right)d\beta,\\ r\,\frac{d\Phi}{dr} &= \int_0^{\infty} f\left(\frac{r^2}{2\alpha}\right)\psi'\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha,\\ \Delta_2\Phi &= \int_{-\infty}^{\infty} f'\left(\frac{e^\beta}{2}\right)\psi'\left(\frac{r^2}{2}\,e^{-\beta}\right)d\beta.\end{aligned}\right.$$

De la première de ces formules, qui définit l'intégrale Φ, il est aisé de déduire directement la seconde et la troisième. En effet, la première, différentiée par rapport à r, donne, en multipliant le résultat par r,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{e^\beta}{2}\right)\psi'\left(\frac{r^2}{2}\,e^{-\beta}\right)(r^2e^{-\beta})\,d\beta,$$

ou bien

$$\int_{\beta=-\infty}^{\beta=\infty} f\left(\frac{e^\beta}{2}\right)\psi'\left(\frac{r^2e^{-\beta}}{2}\right)d(r^2e^{-\beta}).$$

c'est-à-dire précisément le second membre de la deuxième relation (19), si l'on pose $r^2 e^{-\beta} = \alpha$ $\left(\text{ou } e^{\beta} = \frac{r^2}{\alpha}\right)$. Différentions maintenant en r la deuxième (19) et divisons ensuite par r; nous aurons, vu que $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{2\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right) = \int_0^\infty f'\left(\frac{r^2}{2\alpha}\right)\psi'\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{d\alpha}{\alpha};$$

et, en remplaçant de nouveau α par $r^2 e^{-\beta}$ (d'où $d\alpha = - r^2 e^{-\beta} d\beta$), le second membre deviendra bien celui de la troisième (19), tandis que le premier membre, effectué, n'est autre que $\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr}$ ou $\Delta_2\Phi$.

Par conséquent, les équations (19), tout comme les précédentes (10), (13), (14) et (17), dont elles expriment un cas limite ou asymptotique, seront applicables pourvu que les intégrales qui y paraissent aient leurs valeurs finies et déterminées.

Nous verrons plus loin, dans la XLVIIe Leçon, comment les unes et les autres conduisent à la solution de problèmes intéressants de la Physique mathématique. On obtient ces solutions, comme dans le cas où l'expression de φ à employer était l'intégrale plus simple $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$ [p. 181*], en choisissant pour f ou ψ, ψ par exemple, une fonction (qui est encore ordinairement une exponentielle à exposant négatif, un cosinus ou un sinus) propre à faire vérifier identiquement par φ l'équation générale du problème, après introduction du temps t dans l'autre fonction f, d'une certaine manière corrélative à celle dont y entre $\frac{1}{2}\alpha^p$, et en achevant finalement de déterminer cette seconde fonction arbitraire, f, d'après des conditions accessoires, relatives surtout à la valeur $r = 0$ pour laquelle les expressions de φ, de $r^{m-1}\frac{d\varphi}{dr}$, de $\Delta_2\varphi$, de $r^{m-1}\frac{d\Delta_2\varphi}{dr}, \ldots,$ deviennent presque aussi simples que le faisaient, à l'instant $t = 0$, φ et ses dérivées successives en t dans le cas de la valeur (1) de φ.

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

SUITE DE L'EMPLOI DES INTÉGRALES DÉFINIES, POUR EXPRIMER CERTAINES FONCTIONS : THÉORIE GÉNÉRALE DES POTENTIELS; POTENTIELS SPHÉRIQUES.

350*. — Second type : des potentiels; leur définition générale.

Le deuxième type, qu'il nous reste à étudier, concerne des intégrales dont les paramètres ne sont autre chose que les coordonnées x, y, z d'un point mobile, et dont les divers éléments se rattachent à tout autant d'éléments désignés, dm, d'une masse réelle ou fictive m, censée répartie d'une manière donnée quelconque dans l'espace. Nous affecterons à ces intégrales le nom générique de *potentiels,* employé par les géomètres pour désigner quelques-unes d'entre elles, mais surtout la plus anciennement connue, découverte par Laplace, et qui exprime en effet, proportionnellement, le *pouvoir* moteur de la pesanteur (newtonienne) due à la masse fixe m, sur un corps de masse 1 venu de l'infini jusqu'à la position (x, y, z), savoir, le travail total produit par cette pesanteur dans tout le mouvement antérieur du corps. Ces intégrales se formeront comme il suit.

Et, d'abord, si ξ, η, ζ sont les coordonnées (rectangulaires) de l'endroit occupé par l'élément quelconque dm de la masse considérée ou *masse potentiante* m, r sa droite de jonction au point mobile ou *point potentié* (x, y, z), droite dont $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ exprimeront les trois projections sur les axes, enfin $\psi(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$ une certaine fonction de ces trois projections, on aura comme élément du potentiel le produit $\psi(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)dm$. Quant aux limites de l'intégration, on les obtiendra en décrivant autour du point potentié (x, y, z) deux certaines surfaces fermées, l'une, que nous appellerons σ_1, extérieure, l'autre, que nous appellerons σ, intérieure, c'est-à-dire entourée par la première, et, toutes les deux, non seulement invariables pour la forme, la grandeur et l'orientation, mais, de plus, liées au point (x, y, z), qui les entraînera avec lui dans l'espace : cela posé, la somme $\int \psi(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)dm$ devra, à un instant quelconque, se prendre pour tous les éléments dm de masse occupant

le volume, que j'appellerai ϖ, intercepté entre les deux surfaces σ, σ_1.

Le champ de l'intégrale pourra donc être regardé comme se composant de tous les éléments $d\varpi$ en lesquels le volume *constant* ϖ sera divisé par une triple famille de surfaces liées à ses limites σ, σ_1, éléments qui auront ainsi les projections, $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, de leur distance r à (x, y, z) indépendantes de la situation (x, y, z) du point mobile. En conséquence, si le potentiel varie lorsque x, y, z changeront, ce sera uniquement parce que chaque élément de volume $d\varpi$, ayant des coordonnées ξ, η, ζ variables comme x, y, z, viendra se faire occuper par des éléments sans cesse nouveaux dm de la masse potentiante.

La fonction ψ et les deux surfaces σ, σ_1 dépendront de l'espèce de potentiel qu'il sera question d'étudier.

Par exemple, quand il s'agit du *potentiel de pesanteur*, c'est-à-dire de celui qui a donné son nom à toute la classe considérée de fonctions, on a

$$\psi = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}},$$

et σ_1, σ sont deux sphères, décrites, autour de (x, y, z) comme centre, l'une, σ_1, avec un rayon infini, l'autre, σ, avec un rayon imperceptible. Ce dernier, assimilable à zéro eu égard aux dimensions ordinaires des corps, et dont l'annulation, au point de vue analytique, ne modifiera pas d'une manière sensible, comme on verra, le potentiel $\int \frac{dm}{r}$ (évalué dans l'hypothèse de la continuité de la matière), devra cependant, au point de vue physique, rester très grand par rapport à la distance de deux molécules contiguës, de manière à faire exclure de la somme $\int \frac{dm}{r}$ le travail des actions dites *moléculaires*, actions dont la loi est autre que celle de la pesanteur et dont l'influence, presque toujours considérable, doit être évaluée à part.

Avant de voir quelles sont, de même, les fonctions ψ et les surfaces σ, σ_1 caractérisant les principales espèces de potentiels utilisées jusqu'ici, achevons de former l'expression analytique générale de ces intégrales, et cherchons comment s'obtiendront leurs dérivées par rapport aux coordonnées x, y, z du point mobile.

Désignons par ρ ou, plus explicitement, par $\rho(\xi, \eta, \zeta)$, fonction arbitraire des coordonnées ξ, η, ζ, la densité de la masse m au point quelconque (ξ, η, ζ), et nous aurons évidemment $dm = \rho\, d\varpi$; d'où résultera pour le potentiel considéré $\int \psi(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)\, dm$,

que j'appellerai φ, l'expression

$$(1) \qquad \varphi = \int_{\varpi} \psi(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)\rho(\xi, \eta, \zeta)\,d\varpi.$$

Cette intégrale est généralement triple, à cause des trois dimensions du volume ϖ, dont on peut prendre l'élément $d\varpi$ rectangulaire et égal à $d\xi\,d\eta\,d\zeta$; mais elle devient double ou simple dans les cas singuliers où la masse $\int dm$ à laquelle on étend l'intégration se réduit à une mince *couche*, étalée sur une surface, ou même à une *traînée* dessinant une simple ligne. Il paraît bien d'ailleurs sous le signe $\int$, comme il avait été annoncé à la fin du n° 345 (p. 178*), deux fonctions arbitraires ψ et ρ, multipliées l'une par l'autre. Pour simplifier, je les supposerai toutes les deux partout finies et continues, dans le champ de l'intégrale, ainsi que leurs dérivées partielles, jusqu'aux plus élevées dont j'aurai à m'occuper. On passera de ce cas d'une continuité parfaite à celui où, par exemple, la densité ρ aurait deux valeurs sensiblement différentes de part et d'autre d'une surface donnée, en faisant varier cette fonction $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ de plus en plus vite à la traversée de la surface, et en cherchant ce que tendront alors à devenir les formules obtenues.

351*. — Calcul de leurs dérivées par rapport aux coordonnées du point potentié.

Arrivons maintenant au calcul des dérivées de φ en x, y, z, et supposons, à cet effet, que le point (x, y, z) se soit déplacé parallèlement à l'axe des x, de la quantité dx, dont s'accroîtra par suite l'abscisse ξ de chaque élément de volume, $d\varpi$, entraîné dans son mouvement. Dès lors, la masse dm qui occupe l'élément $d\varpi$ ne sera plus $\rho(\xi, \eta, \zeta)\,d\varpi$, mais $\rho(\xi + dx, \eta, \zeta)\,d\varpi$, et elle aura grandi de $\left(\frac{d\rho}{d\xi}\,d\varpi\right)dx$. La dérivée en x de chaque élément de φ sera donc $\psi\frac{d\rho}{d\xi}\,d\varpi$; et l'on aura, pour la dérivée totale de φ,

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \int_{\varpi} \psi(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)\,\frac{d\rho(\xi, \eta, \zeta)}{d\xi}\,d\varpi.$$

Ainsi, *les dérivées d'un potentiel par rapport aux coordonnées x, y, z du point mobile sont des potentiels pareils au proposé, dans lesquels la densité ρ de la matière se trouve remplacée par ses dérivées analogues relatives aux coordonnées ξ, η, ζ dont elle dépend.*

Le même raisonnement s'appliquera, de proche en proche, aux dérivées d'ordre supérieur, et donnera, par exemple,

$$(3) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \int_{\varpi} \psi(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)\, \frac{d^2\rho(\xi, \eta, \zeta)}{d\xi^2}\, d\varpi.$$

Mais ces expressions, si simples, des dérivées d'un potentiel où ρ est généralement une fonction arbitraire donnée, ont l'inconvénient de contenir d'autres fonctions arbitraires que celle-là ; ce qui rend leurs relations mutuelles plus difficiles à saisir. Il y a donc lieu de les transformer, de manière à y conserver, sous le signe $\int_{\varpi}$, la fonction $\rho(\xi, \eta, \zeta)$.

Or on y parvient en appliquant le procédé de l'intégration par parties ou, chose équivalente, en ajoutant sous le signe $\int_{\varpi}$, pour les retrancher ensuite, des termes affectés des dérivées de plus en plus élevées de ψ mais des dérivées de moins en moins élevées de ρ, et propres à rendre la fonction sous le signe $\int$ (sauf un dernier terme où ρ ne soit pas différentié) dérivée exacte en ξ, η ou ζ; ce qui permet de transformer, d'après les formules (22) du n° **313*** (p. 93*), l'intégrale correspondante prise dans tout le champ ϖ en une autre se rapportant uniquement aux limites σ, σ_1 de ϖ.

A cet effet, observons que, sous les signes $\int$ de (2) et (3), $\psi \dfrac{d\rho}{d\xi}$ et $\psi \dfrac{d^2\rho}{d\xi^2}$ reviennent identiquement à

$$\frac{d.\psi\rho}{d\xi} - \frac{d\psi}{d\xi}\rho \quad \text{et à} \quad \frac{d}{d\xi}\left(\psi \frac{d\rho}{d\xi}\right) - \frac{d\psi}{d\xi}\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(\psi \frac{d\rho}{d\xi} - \rho \frac{d\psi}{d\xi}\right) + \frac{d^2\psi}{d\xi^2}\rho.$$

Par conséquent, les seconds membres de (2) et (3) se dédoubleront, chacun, en deux intégrales, dont l'une, $\int_{\varpi} \dfrac{d.\psi\rho}{d\xi}\, d\varpi$ et $\int_{\varpi} \dfrac{d}{d\xi}\left(\psi \dfrac{d\rho}{d\xi} - \rho \dfrac{d\psi}{d\xi}\right) d\varpi$ respectivement, se réduira, par l'emploi de la première des formules citées (22) [p. 93*], à

$$\int_{\sigma} \psi\rho \cos(n, \xi)\, d\sigma + \int_{\sigma_1} \psi\rho \cos(n, \xi)\, d\sigma_1$$

et à

$$\int_{\sigma} \left(\psi \frac{d\rho}{d\xi} - \rho \frac{d\psi}{d\xi}\right) \cos(n, \xi)\, d\sigma + \int_{\sigma_1} \left(\psi \frac{d\rho}{d\xi} - \rho \frac{d\psi}{d\xi}\right) \cos(n, \xi)\, d\sigma_1,$$

si l'on y sépare, comme on voit, ce qui se rapporte aux deux parties σ,

σ_1 de la surface limite (appelée tout entière σ au n° **313***), et si l'on désigne par $d\sigma$, $d\sigma_1$ un élément quelconque de chacune, enfin, par $\cos(n, \xi)$, $\cos(n, \eta)$, $\cos(n, \zeta)$ les trois cosinus directeurs d'*une normale infiniment petite dn menée à cet élément* en allant vers le dehors du volume ϖ, ou mieux, *en arrivant à l'élément à partir d'un point intérieur voisin.* Remplaçons $\psi \frac{d\rho}{d\xi} - \rho \frac{d\psi}{d\xi}$ par $\psi^2 \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\rho}{\psi}\right)$ et, d'ailleurs, observons que, dans l'autre intégrale, restée triple, de chaque résultat, $\frac{d\psi}{d\xi}$, $\frac{d^2\psi}{d\xi^2}$ peuvent s'écrire aussi $-\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d^2\psi}{dx^2}$, vu les formes, $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$, des variables dont dépend ψ. Il viendra, pour les dérivées première et seconde de φ en x, les expressions cherchées, contenant sous le signe $\int_\varpi$ la densité ρ non différentiée, et où, pour plus de précision, toutes les quantités relatives à la limite σ_1 sont affectées de l'indice 1 :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \int_\varpi \frac{d\psi}{dx}\rho\, d\varpi + \int_\sigma \psi\rho\cos(n,\xi)\, d\sigma + \int_{\sigma_1} \psi_1\rho_1\cos(n_1,\xi)\, d\sigma_1,\\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= \int_\varpi \frac{d^2\psi}{dx^2}\rho\, d\varpi + \int_\sigma \psi^2 \frac{d\frac{\rho}{\psi}}{d\xi}\cos(n,\xi)\, d\sigma + \int_{\sigma_1} \psi_1^2 \left(\frac{d\frac{\rho}{\psi}}{d\xi}\right)_1 \cos(n_1,\xi)\, d\sigma_1. \end{aligned}\right.$$

On aura évidemment, pour les dérivées premières et secondes de φ en y et en z, des expressions analogues, où les dérivées de ψ en y et en z remplaceront ses dérivées en x, et où η, ζ remplaceront ξ. Enfin, les dérivées troisièmes, quatrièmes, etc., de φ se transformeront de même.

Formons, d'après cela, le paramètre différentiel du second ordre, $\Delta_2\varphi$, du potentiel. L'addition des trois dérivées secondes directes de φ en x, y et z donnera de suite, en observant que, sous les signes $\int_\sigma$ et $\int_{\sigma_1}$, les trinômes

$$\frac{d\frac{\rho}{\psi}}{d\xi}\cos(n,\xi) + \frac{d\frac{\rho}{\psi}}{d\eta}\cos(n,\eta) + \frac{d\frac{\rho}{\psi}}{d\zeta}\cos(n,\zeta),\qquad \left(\frac{d\frac{\rho}{\psi}}{d\xi}\right)_1\cos(n_1,\xi) + \ldots$$

représenteront la dérivée de la fonction de point $\frac{\rho}{\psi}$ suivant la normale dn ou dn_1 à l'élément $d\sigma$ ou $d\sigma_1$ (sans que x, y, z changent), et en

affectant σ, ψ de l'indice 1 quand ces fonctions seront différentiées le long de dn_1 :

$$(5)\qquad \Delta_2\varphi = \int_{\varpi}(\Delta_2\psi)\rho\,d\varpi + \int_{\sigma}\psi^2\frac{d\frac{\rho}{\psi}}{dn}\,d\sigma + \int_{\sigma_1}\psi_1^2\,\frac{d\frac{\rho_1}{\psi_1}}{dn_1}\,d\sigma_1.$$

On voit que, si l'on a soin de choisir pour $\psi(\xi-x, \eta-y, \zeta-z)$ une fonction dont le paramètre différentiel $\Delta_2\psi$ soit identiquement nul, le paramètre analogue $\Delta_2\varphi$ du potentiel se réduira aux deux derniers termes de (5) et dépendra des valeurs de la fonction arbitraire ρ infiniment près des limites σ, σ_1 du champ ϖ de l'intégrale, mais non de ses valeurs dans l'intérieur du même champ. C'est donc, d'après la fin du n° 202* (t. I, p. 284*), ce qui aura lieu, lorsqu'on prendra pour ψ, comme il arrive dans le cas du potentiel de pesanteur, l'inverse de la distance r des deux points (x, y, z) et (ξ, η, ζ), à la condition, toutefois, de tracer la limite intérieure σ autour du point (x, y, z), de manière à exclure celui-ci (où la fonction ψ deviendrait infinie) du champ de l'intégrale. Un calcul direct donne bien alors $\Delta_2\psi = 0$, et la formule (5) se réduit à

$$(6)\qquad \left(\text{pour } \psi = \frac{1}{r}\right)\qquad \Delta_2\varphi = \int_{\sigma}\frac{d.r\rho}{dn}\,\frac{d\sigma}{r^2} + \int_{\sigma_1}\frac{d.r_1\rho_1}{dn_1}\,\frac{d\sigma_1}{r_1^2}.$$

352*. — Du potentiel sphérique ou potentiel à quatre variables.

Choisissons, non seulement, pour ψ, la fonction $\frac{1}{r}$, comme il vient d'être indiqué, mais aussi, pour limites σ, σ_1 du champ ϖ, deux sphères concentriques, décrites, du point (x, y, z) comme centre, avec deux rayons r, $r_1 = r + \varepsilon$ infiniment peu différents; et, rapportant l'intégrale correspondante φ à l'unité de l'épaisseur ε de la couche sphérique infiniment mince à laquelle elle s'étend, divisons-la par ε, ou considérons le rapport $\frac{\varphi}{\varepsilon}$, que nous appellerons, pour abréger, Φ. Nous pourrons évidemment prendre les éléments de volume $d\varpi$ en forme de tronçons sensiblement prismatiques ayant leurs bases respectives sur les deux sphères σ, σ_1; d'où résultera pour leur hauteur la distance ε de ces deux surfaces. On aura donc $d\varpi = \varepsilon\,d\sigma$, et, si ρ désigne la densité de la matière potentiante en un point de l'élément quelconque $d\sigma$ de la sphère intérieure $4\pi r^2$, la partie correspondante du potentiel sera $\varepsilon\frac{\rho\,d\sigma}{r}$. Par suite, le potentiel φ ou $\Phi\varepsilon$ considéré égalera $\varepsilon\int_{\sigma}\frac{\rho\,d\sigma}{r}$; et, en supprimant ε de part et d'autre, puis observant

que r est constant sur toute la sphère σ, d'étendue $4\pi r^2$, il viendra

$$(7) \qquad \Phi = \int_\sigma \frac{\rho\, d\sigma}{r} = 4\pi r \int_\sigma \rho \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Nous appellerons *potentiel sphérique* cette fonction Φ, qui est un potentiel rapporté à l'unité d'épaisseur de la couche sphérique mince pour laquelle on le prend. Il égale, comme on voit, le produit de $4\pi r$ par la *moyenne,* $\int_\sigma \rho \frac{d\sigma}{\sigma}$, des valeurs que reçoit la densité ρ de la matière potentiante sur toute la surface σ située à la distance constante r du point potentié (x, y, z). Donnant une infinité de potentiels φ différents quand, sans rien changer à l'épaisseur ε de la couche, on fait varier son rayon r, il constituera une fonction des quatre variables indépendantes x, y, z, r, dont les trois premières détermineront ses changements liés aux déplacements du centre (x, y, z), ou étudiés implicitement ci-dessus, et, la quatrième, ses changements produits malgré l'immobilité de ce centre, mais par le simple fait de la variation du rayon r. Ainsi, *le potentiel sphérique est un potentiel à quatre variables.*

Sa propriété la plus importante résulte de l'équation (6), où il faudra remplacer φ par $\varepsilon\Phi = (r_1 - r)\Phi$, avec $r_1 - r$ constant, et observer que les normales dn, dn_1 se trouveront menées vers le centre (x, y, z), ou à l'opposé, suivant qu'il s'agira des éléments $d\sigma$ de la sphère intérieure $4\pi r^2$, ou des éléments $d\sigma_1$ de la sphère extérieure $4\pi r_1^2$. Donc l'expression $\frac{d.r\rho}{dn}$ sera la dérivée de $r\rho$ prise en allant d'un point de la sphère de rayon r, au point le plus proche de la sphère concentrique de rayon $r - dr$, et pourra s'écrire $-\frac{d.r\rho}{dr}$. Au contraire, $\frac{d.r_1\rho_1}{dn_1}$ s'écrira $\frac{d.r_1\rho_1}{dr_1}$. Et comme, d'ailleurs, rien n'empêche de délimiter les éléments $d\sigma$, sur toutes ces sphères décrites autour du centre (x, y, z), au moyen de surfaces coniques infiniment aiguës ayant ce centre pour sommet, de manière que les rapports $\frac{d\sigma}{r^2}$, $\frac{d\sigma_1}{r_1^2}$ soient constants dans le passage d'une sphère à l'autre suivant un rayon quelconque, c'est-à-dire dans ce que nous appelons une *différentiation par rapport à r ou à r_1*, les deux expressions $-\frac{d.r\rho}{dr}\frac{d\sigma}{r^2}$, $\frac{d.r_1\rho_1}{dr_1}\frac{d\sigma_1}{r_1^2}$ reviendront à $-\frac{d}{dr}\left(r\rho\frac{d\sigma}{r^2}\right)$, $\frac{d}{dr_1}\left(r_1\rho_1\frac{d\sigma_1}{r_1^2}\right)$. Par suite, leurs sommes $\int_\sigma$ ou $\int_{\sigma_1}$, relatives à toutes les orientations du rayon r ou r_1 autour du centre

(x, y, z), seront la dérivée en r ou en r_1, changée ou non de signe, de la somme correspondante des éléments $r\rho\frac{d\sigma}{r^2}$, $r_1\rho_1\frac{d\sigma_1}{r_1^2}$, somme identique à $\int_\sigma \frac{\rho\, d\sigma}{r}$ ou à $\int_{\sigma_1} \frac{\rho_1\, d\sigma_1}{r_1}$, et qui n'est autre chose que la valeur, Φ ou Φ_1, du potentiel sphérique, relative à la sphère σ ou à la sphère σ_1.

Donc le second membre de (6) se réduit à $-\frac{d\Phi}{dr}+\frac{d\Phi_1}{dr_1}$, tandis que le premier est $(r_1 - r)\Delta_2\Phi$. Divisons par la différence infiniment petite $r_1 - r$ et, en nous rappelant que le rapport d'un accroissement élémentaire de la fonction $\frac{d\Phi}{dr}$ à l'accroissement simultané $r_1 - r$ de sa variable r est la dérivée en r de cette fonction, il viendra $\Delta_2\Phi = \frac{d^2\Phi}{dr^2}$, c'est-à-dire

$$(8) \qquad \frac{d^2\Phi}{dr^2} = \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}.$$

Ainsi, *quelle que soit la fonction continue* $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ *exprimant le mode de répartition, dans l'espace, de la masse potentiante, le potentiel sphérique a sa dérivée seconde, par rapport au rayon* r, *égale à la somme de ses trois dérivées secondes directes par rapport aux coordonnées rectangulaires du point potentié.*

Observons encore que le potentiel sphérique et ses deux premières dérivées en r prennent des valeurs simples quand cette variable r s'annule. Pour le reconnaître, supposons très petite la sphère σ, et menons-y en tous sens des diamètres $2r$. La densité ρ, fonction de point graduelle par hypothèse, variera, d'une extrémité de l'un quelconque de ces diamètres au centre (x, y, z), autant que du centre à l'autre extrémité, sauf erreur de l'ordre de r^2. Par conséquent, la valeur de ρ au centre, c'est-à-dire $\rho(x, y, z)$, égalera, avec une erreur de cet ordre seulement, la moyenne arithmétique des deux valeurs de ρ en deux points opposés quelconques de la sphère et aussi, par suite, la valeur moyenne générale de ρ sur toute la sphère σ. Le potentiel sphérique, produit de cette dernière moyenne par $4\pi r$, sera donc $4\pi r\rho(x, y, z)$, abstraction faite d'une partie comparable à r^3 ou qui, pour $r = 0$, a en quelque sorte un contact du *second* ordre avec zéro. Ainsi, la valeur et les deux premières dérivées en r de cette partie ne pouvant différer de zéro quand r s'annule, le terme principal $4\pi r\rho(x, y, z)$ donne

$$(9) \quad (\text{pour } r = 0) \qquad \Phi = 0, \qquad \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi\rho(x, y, z), \qquad \frac{d^2\Phi}{dr^2} = 0.$$

Les valeurs de Φ et de ses dérivées en r sont encore plus simples pour les valeurs de r supérieures à certaines limites, du moins quand la matière potentiante est bornée dans tous les sens. Alors, en effet, l'on pourra, où que soit le centre (x, y, z), prendre r assez grand pour que la sphère σ la contienne toute à son intérieur, et l'on aura, dans (7), $\rho = 0$, $\Phi = 0$. Le potentiel Φ s'annulera donc, avec toutes ses dérivées en r, si r est assez grand.

Enfin, l'équation (8), se trouvant vérifiée identiquement par la fonction Φ, peut être différentiée à volonté en x, y, z, r. Or différentions-la, par exemple, en r; et elle donnera une équation de même forme que (8), sauf la substitution, à la fonction Φ, de la fonction $\frac{d\Phi}{dr}$. Celle-ci, d'après (9), reçoit, pour $r = 0$, la valeur $4\pi\rho(x, y, z)$, mais a sa dérivée en r alors nulle, tandis que la fonction Φ a, au contraire, pour $r = 0$, sa valeur nulle, mais sa dérivée en r égale à $4\pi\rho(x, y, z)$. Donc *le potentiel sphérique d'une masse distribuée arbitrairement dans l'espace fournit pour l'équation* (8) *deux sortes de solutions, permettant de se donner à volonté, quand* $r = 0$, *dans l'une, les valeurs de la fonction et, dans l'autre, celles de sa dérivée première par rapport à* r, *en tous les points* (x, y, z) *de l'espace*. On verra dans la XLVI[e] Leçon l'importance de cette remarque, pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles appelée *équation du son*.

353*. — Autre potentiel, analogue au potentiel sphérique, mais applicable dans des espaces ayant, à volonté, une, deux ou trois dimensions.

Comme le potentiel sphérique Φ est simplement proportionnel au produit de la variable r par la valeur moyenne de la densité ρ en tous les endroits situés à une même distance r du point potentié, il serait facile d'introduire au lieu de Φ, dans l'équation (8), cette valeur moyenne de ρ, que nous appellerons simplement ρ', et qui se trouve ainsi jouir de propriétés simples, méritant d'être connues. Seulement, les déductions précédentes, basées sur l'hypothèse $\psi = \frac{1}{r}$ qui ne donne $\Delta_2\psi = 0$ que dans un espace à trois dimensions, ne conduiraient pas, du moins directement, aux propriétés dont il s'agit, pour le cas tout aussi important d'un espace plan ou à deux coordonnées x, y, sur lequel serait disséminée une matière ayant par unité de superficie une masse donnée $\rho(\xi, \eta)$. Or il est facile d'embrasser à la fois les trois cas de m dimensions, m étant 1, 2 ou 3.

Nous remonterons, pour cela, aux formules (1) à (5), évidemment applicables sur un espace plan en y supprimant les variables z ou ζ, et en y regardant d'ailleurs ϖ non comme un volume, mais comme une partie du plan des xy, ou, par suite, σ, σ_1 non comme des surfaces, mais comme les limites respectivement intérieure et extérieure de ce champ superficiel d'intégration ϖ. Devant comprendre encore, dans la sommation $\int_\varpi$, tous les endroits $d\varpi$ dont les distances au point potentié (x, y) tombent entre r et r_1 ou $r+\varepsilon$, nous aurons alors pour σ et σ_1 des circonférences $2\pi r$, $2\pi r_1$, au lieu des sphères $4\pi r^2$, $4\pi r_1^2$. Même le cas, où r se réduit à $\sqrt{(x-\xi)^2}$, d'un simple axe des x, ou mieux d'un filet matériel prismatique infiniment mince étendu suivant cet axe et d'une certaine masse $\rho(\xi)$ par unité de longueur, se trouve représenté par les formules en question (1) à (5), si l'on y regarde alors les surfaces σ, σ_1, lieux des points situés aux distances r et r_1 du point potentié d'abscisse x, comme composées, chacune, de deux éléments $d\sigma$ ou $d\sigma_1$, égaux à la section constante du filet, et définies en situation par les abscisses $x \pm r$ ou $x \pm r_1$.

Il suffit, dans tous ces cas, y compris celui où $m=3$, de prendre simplement $\psi(\xi - x, \ldots) = 1$; ce qui donne $\Delta_2 \psi = 0$, quel que soit le nombre des dimensions. Alors l'intégrale φ se réduit à $\int_\varpi \rho\, d\varpi$, ou à $\varepsilon \int_\sigma \rho\, d\sigma$, vu la division possible de l'espace ϖ, quel que soit m, en éléments exprimés par $\varepsilon\, d\sigma$; et, rapportée à l'unité d'épaisseur ε du champ d'intégration choisi, elle devient $\int_\sigma \rho\, d\sigma$ ou $\sigma \int_\sigma \rho \frac{d\sigma}{\sigma} = \sigma\rho'$, c'est-à-dire le produit de la figure σ, partout équidistante du point potentié, par la valeur moyenne ρ' de la densité sur toute son étendue. Or le second membre de (5) [p. 195*], réduit à $\int_\sigma \frac{d\rho}{dn} d\sigma + \int_{\sigma_1} \frac{d\rho_1}{dn_1} d\sigma_1$, devient, en raisonnant comme ci-dessus (p. 196*),

$$-\int_\sigma \frac{d\rho}{dr} d\sigma + \int_{\sigma_1} \frac{d\rho_1}{dr_1} d\sigma_1,$$

ou

$$-\sigma \int_\sigma \frac{d\rho}{dr} \frac{d\sigma}{\sigma} + \sigma_1 \int_{\sigma_1} \frac{d\rho_1}{dr_1} \frac{d\sigma_1}{\sigma_1},$$

ou enfin

$$-\sigma \frac{d}{dr} \int_\sigma \frac{\rho\, d\sigma}{\sigma} + \sigma_1 \frac{d}{dr_1} \int_{\sigma_1} \rho_1 \frac{d\sigma_1}{\sigma_1},$$

à cause de l'invariabilité des rapports $\frac{d\sigma}{\sigma}$, $\frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$ dans une différentiation en r ou r_1, c'est-à-dire faite le long de rayons issus du centre potentié. En définitive, le premier membre de (5) sera $(r_1 - r)\Delta_2(\sigma\rho')$, ou $(r_1 - r)\sigma\Delta_2\rho'$, et, le second membre, $-\sigma\frac{d\rho'}{dr} + \sigma_1\frac{d\rho'_1}{dr_1}$, c'est-à-dire $(r_1 - r)\left(\frac{d}{dr}\sigma\frac{d\rho'}{dr}\right)$, à raison de la valeur infiniment petite qu'a, par hypothèse, l'accroissement $r_1 - r$ du rayon. On aura donc, en divisant par $\sigma(r_1 - r)$, puis développant la dérivée d'un produit,

$$(10)\quad \Delta_2\rho' \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\rho'}{dx^2} + \frac{d^2\rho'}{dy^2} + \ldots = \frac{1}{\sigma}\frac{d}{dr}\left(\sigma\frac{d\rho'}{dr}\right) = \frac{d^2\rho'}{dr^2} + \frac{d\log\sigma}{dr}\frac{d\rho'}{dr}.$$

Et comme, d'ailleurs, la figure σ équidistante du point potentié (sphère, circonférence ou couple de sections droites) est, quant à l'étendue, variable avec r proportionnellement à r^{m-1}, le logarithme de σ a même dérivée en r que celui de r^{m-1}; de sorte qu'on peut, dans (10), remplacer $d\log\sigma$ par $(m-1)\,d\log r = \frac{m-1}{r}dr$. Il vient donc

$$(11)\qquad \Delta_2\rho' \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\rho'}{dx^2} + \frac{d^2\rho'}{dy^2} + \ldots = \frac{d^2\rho'}{dr^2} + \frac{m-1}{r}\frac{d\rho'}{dr},$$

relation que vérifiera ainsi identiquement la fonction ρ', ou $\int_\sigma \rho\frac{d\sigma}{\sigma}$, des variables $x, y, \ldots, r$, quelle que soit la fonction arbitraire de point, $\rho(\xi, \eta, \ldots)$, servant à la former.

On aurait pu prévoir cette relation dans le cas d'une répartition pareille de la masse potentiante tout autour du point potentié $(x, y, \ldots)$. En effet, ρ' étant la moyenne des valeurs de ρ sur les divers éléments $d\sigma$ de la figure σ, et, de plus, ses dérivées d'un ordre quelconque en $x, y, \ldots$ s'obtenant au moyen de déplacements égaux imprimés à tous ces éléments $d\sigma$ suivant les mêmes directions mutuellement rectangulaires (ce qui revient à prendre les dérivées analogues de chaque valeur de ρ), il est clair que le paramètre Δ_2 de la moyenne ρ' est la moyenne, sur toute l'étendue σ, des paramètres $\Delta_2\rho$, qui constituent, comme ρ, une fonction de point indépendante des axes choisis et ayant (t. I, p. 95*) la valeur $\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{m-1}{r}\frac{d\rho}{dr}$ quand ρ dépend seulement de la distance r. Or ρ est alors égal à ρ' pour le centre (x, y, z) choisi, et cette valeur de la moyenne $\Delta_2\rho'$ revient bien au second membre de la formule (11). Mais celle-ci montre de plus que la même relation simple entre les moyennes $\Delta_2\rho'$ et ρ' de $\Delta_2\rho$ et de ρ,

ou, du moins, entre $\Delta_2\rho'$ et les deux premières dérivées de ρ' en r, continue à subsister quelque irrégulière que devienne la distribution effective des valeurs de ρ dans l'espace.

Il est d'ailleurs évident, par les raisons données avant les formules (9) [p. 197*], que, pour r très petit, la moyenne ρ' se confond avec $\rho(x, y, z)$, à des quantités près du second ordre ; ce qui donne

$$(12) \qquad (\text{pour } r = 0) \qquad \rho' = \rho(x, y, \ldots), \qquad \frac{d\rho'}{dr} = 0.$$

La fonction ρ' ou $\int_\sigma \rho \frac{d\sigma}{\sigma}$ constitue donc, pour l'équation (11), une solution ayant en tous les points $(x, y, \ldots)$ de l'espace, quand r s'annule, sa valeur égale à la fonction arbitraire $\rho(x, y, \ldots)$ et sa dérivée première en r égale à zéro. Mais la dérivée $\frac{d\rho'}{dr}$ n'est généralement pas une autre solution de la même équation (11) ; et, cela, à cause du dernier terme $\frac{m-1}{r}\frac{d\rho'}{dr}$, qui, affecté (sauf dans le cas $m = 1$) d'un coefficient $\frac{m-1}{r}$ variable, se dédouble par la différentiation en r, au lieu d'éprouver alors la simple substitution de $\frac{d^2\rho'}{dr^2}$ à $\frac{d\rho'}{dr}$.

On retrouve, au moyen de (11), l'équation (8) relative au cas $m = 3$, en appelant Φ le produit $r^{\frac{m-1}{2}}\rho'$ qui, pour $m = 3$, se confond bien (au facteur constant près 4π) avec le potentiel sphérique Φ. Cela revient à poser, dans (11), $\rho' = r^{\frac{1-m}{2}}\Phi$; d'où il résulte, tous calculs faits,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\rho'}{dr} &= r^{\frac{1-m}{2}}\left(\frac{d\Phi}{dr} - \frac{m-1}{2r}\Phi\right), \\ \frac{d^2\rho'}{dr^2} &= r^{\frac{1-m}{2}}\left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{m-1}{r}\frac{d\Phi}{dr} + \frac{m-1}{2r}\frac{m+1}{2r}\Phi\right), \end{aligned}\right.$$

et aussi $\Delta_2\rho' = r^{\frac{1-m}{2}}\Delta_2\Phi$. L'équation (11), en y supprimant partout le facteur $r^{\frac{1-m}{2}}$ et changeant les membres de place, devient alors

$$(13) \qquad \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{(m-1)(3-m)}{4r^2}\Phi = \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \ldots$$

Elle se réduit donc à (8) quand $m = 3$, hypothèse qui y annule le second terme.

Ce second terme est nul aussi pour $m = 1$, cas où $\Phi = \rho'$ et où

(ainsi qu'il vient d'être remarqué) la dérivée $\frac{d\Phi}{dr}$ constitue, pour l'équation (11) ou (13), comme quand $m=3$, une deuxième solution, mais une solution ayant, d'après (12), sa valeur nulle à la limite $r=0$. Et, en effet, ρ' n'est alors la moyenne que des deux valeurs $\rho(x+r)$, $\rho(x-r)$; ce qui donne

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{c} (\text{pour } m=1) \\ \Phi = \frac{\rho(x+r)+\rho(x-r)}{2}; \quad \text{d'où} \quad \frac{d\Phi}{dr} = \frac{\rho'(x+r)-\rho'(x-r)}{2}. \end{array} \right.$$

Or on vérifie aisément que ces expressions de Φ et de sa dérivée en r, mises à la place de Φ dans l'équation (13) réduite à $\frac{d^2\Phi}{dr^2}=\frac{d^2\Phi}{dx^2}$, y satisfont bien.

354*. — Paramètre différentiel, d'un ordre pair quelconque, d'une fonction de point, et puissances paires quelconques de son paramètre différentiel du premier ordre.

Quand, dans l'expression $\int_\sigma \rho \frac{d\sigma}{\sigma}$ de la fonction ρ', on fait varier r en laissant $x, y, \ldots$ constants, les valeurs de ρ dont ρ' exprime la moyenne sont prises le long de chemins rectilignes, r, qui croissent à la fois des mêmes quantités dr sans qu'aucun change de direction; et une dérivée d'ordre quelconque de ρ' en r est, par suite, la moyenne des dérivées de même ordre de ρ le long de ces chemins, à une même distance r de leur point commun de départ $(x, y, \ldots)$. En d'autres termes, on a, quel que soit l'ordre p des dérivées considérées, $\frac{d^p\rho'}{dr^p}=\int_\sigma \frac{d^p\rho}{dr^p}\frac{d\sigma}{\sigma}$. Or, la fonction ρ étant supposée graduellement variable, ainsi que ses dérivées partielles, celles-ci, prises le long de droites d'orientation quelconque, ont, aux divers points d'une figure σ, très sensiblement les mêmes valeurs qu'en son centre $(x, y, \ldots)$, lorsque son rayon r devient extrêmement petit; et, prendre la moyenne des dérivées d'ordre p de ρ suivant tous les rayons divergents r, sur une telle figure σ, c'est la même chose, à la limite, ou quand r s'annule, que de former la moyenne des valeurs reçues, au point $(x, y, \ldots)$, par la dérivée $\frac{d^p\rho}{ds^p}$, le long de droites infiniment petites ds issues de ce point et distribuées indifféremment dans toutes les directions. Ainsi, l'on aura

$$(15) \qquad \text{Moy. de } \frac{d^p\rho}{ds^p} \text{ au point } (x, y, \ldots) = \frac{d^p\rho'}{dr^p} \qquad (\text{pour } r=0).$$

Les moyennes des dérivées d'ordre pair, ou pour lesquelles p sera de la forme $2n$, offriront seules de l'intérêt; car les autres, d'ordre impair, seront identiquement nulles. En effet, si l'on considère, à l'endroit $(x, y, \ldots)$, deux chemins infiniment petits de sens contraires, ou mieux le même chemin parcouru successivement dans les deux sens opposés, les deux dérivées premières de ρ obtenues y seront évidemment, en chaque point, deux fonctions égales et contraires. Par suite, ces deux dérivées, si on les prenait avec signe pareil, donneraient elles-mêmes, en les différentiant dans les deux sens, deux dérivées de signes contraires. Donc, prises avec leurs signes effectifs qui sont contraires, elles auront leurs propres dérivées, ou dérivées secondes de ρ, identiques. On voit, en continuant à raisonner de même, que les dérivées d'ordre impair, en $(x, y, \ldots)$, suivant deux directions opposées, se neutraliseront ou auront leur moyenne nulle, tandis que celles d'ordre pair y seront égales et donneront, en général, quand on les combinera avec celles d'autres directions, des moyennes $\frac{d^{2n}\rho'}{dr^{2n}}$ différentes de zéro.

La considération de la fonction ρ' permet d'arriver à l'expression générale de ces moyennes par les dérivées $2n^{\text{ièmes}}$ de ρ en $x, y, \ldots$, beaucoup plus simplement que si l'on employait la méthode suivie vers le commencement du Cours (t. I, p. 70*) dans le cas de la dérivée seconde. Il suffit, pour cela, de développer la fonction ρ' suivant les puissances ascendantes de sa variable r supposée très petite, en utilisant l'équation (11) [p. 200*]. Un tel développement est légitime; car les dérivées successives de ρ suivant une direction quelconque, au point $(x, y, \ldots)$, se trouvent, par hypothèse, finies, de sorte que leurs moyennes ne peuvent manquer de l'être, et la formule de Mac Laurin est applicable tant à ρ' qu'à ses dérivées en r. Or cette formule, appliquée à $\frac{d^2\rho'}{dr^2}$ en observant que l'annulation des dérivées impaires de ρ' pour $r = 0$ y fait disparaître les termes correspondants, donnera, si l'on désigne par A_2, A_4, A_6, ... les dérivées inconnues seconde, quatrième, sixième, ... de ρ' en r quand $r = 0$,

$$(16) \qquad \frac{d^2\rho'}{dr^2} = A_2 + A_4\frac{r^2}{1.2} + A_6\frac{r^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Multiplions cette relation par dr et intégrons chaque terme à partir de $r = 0$, en nous souvenant que $\frac{d\rho'}{dr}$ s'annule, à cette limite, d'après la dernière (12); puis effectuons sur le résultat une intégration ana-

logue, sans oublier que $\rho' = \rho$ pour $r = 0$, en vertu de la première (12).

Il viendra

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{d\rho'}{dr} = A_2 \dfrac{r}{1} + A_4 \dfrac{r^3}{1.2.3} + A_6 \dfrac{r^5}{1.2.3.4.5} + \ldots, \\ \rho' = \rho + A_2 \dfrac{r^2}{1.2} + A_4 \dfrac{r^4}{1.2.3.4} + A_6 \dfrac{r^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots. \end{cases}$$

Et, d'ailleurs, $x, y, \ldots$ n'entrant dans cette expression de ρ' que par les coefficients ρ, A_2, A_4, A_6, ..., on aura aussi

$$(18)\quad \Delta_2 \rho' = \Delta_2 \rho + (\Delta_2 A_2) \frac{r^2}{1.2} + (\Delta_2 A_4) \frac{r^4}{1.2.3.4} + (\Delta_2 A_6) \frac{r^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots :$$

en effet, la graduelle variation supposée de ρ' implique, pour le très petit terme complémentaire (insensible quels que soient $x, y, \ldots$) de l'expression de ρ' en série, la petitesse constante de ses dérivées en $x, y, \ldots$ et, par suite, de son paramètre différentiel Δ_2; ce qui permet de calculer $\Delta_2 \rho'$ comme si cette expression de ρ' était un polynôme. Or portons les valeurs (17), (16), (18), des deux premières dérivées de ρ' en r, et de $\Delta_2 \rho'$, dans l'équation (11), qui est vérifiée pour toutes les très petites valeurs de r. Les deux membres, ordonnés suivant les puissances de r^2, devront être identiques (t. I, p. 68); et, en y égalant successivement les coefficients totaux de r^0, de r^2, de r^4, ..., nous trouverons

$$(19)\quad \Delta_2 \rho = \frac{m}{1} A_2, \qquad \Delta_2 A_2 = \frac{m+2}{3} A_4, \qquad \Delta_2 A_4 = \frac{m+4}{5} A_6, \qquad \ldots.$$

La première de ces relations donne donc la dérivée A_2; puis la deuxième fait connaître la dérivée A_4, la troisième A_6, et ainsi de suite. Comme ces dérivées ne sont autres que les valeurs moyennes cherchées de $\frac{d^2\rho}{ds^2}, \frac{d^4\rho}{ds^4}, \ldots$ en $(x, y, \ldots)$, on aura

$$(20)\quad \begin{cases} \text{Moy.}\, \dfrac{d^2\rho}{ds^2} = \dfrac{1}{m} \Delta_2 \rho, \\ \text{Moy.}\, \dfrac{d^4\rho}{ds^4} = \dfrac{1}{m} \dfrac{3}{m+2} \Delta_2 \Delta_2 \rho, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \text{Moy.}\, \dfrac{d^{2n}\rho}{ds^{2n}} = \dfrac{1}{m} \dfrac{3}{m+2} \cdots \dfrac{2n-1}{m+2n-2} (\Delta_2)^n \rho, \end{cases}$$

$(\Delta_2)^n$ désignant, pour abréger, la répétition, n fois, de l'opération

qu'indique Δ_2, ou qui consiste à prendre le paramètre différentiel $\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\ldots$ de la fonction écrite à la suite.

Quant au développement (17) de ρ', il devient

$$(21)\quad \rho'=\rho+\frac{\Delta_2\rho}{m}\frac{r^2}{2}+\frac{\Delta_2\Delta_2\rho}{m(m+2)}\frac{r^4}{2.4}+\frac{\Delta_2\Delta_2\Delta_2\rho}{m(m+2)(m+4)}\frac{r^6}{2.4.6}+\ldots,$$

où l'on voit que les dénominateurs sont respectivement : 1.2, 1.2.3.4, 1.2.3.4.5.6,... dans le cas $m=1$; 2^2, $2^2.4^2$, $2^2.4^2.6^2$,... dans le cas $m=2$; et 2.3, 2.3.4.5, 2.3.4.5.6.7,... dans le cas $m=3$.

La première formule (20) est bien celle qui nous a servi (t. I, p. 71*) à définir le paramètre différentiel du second ordre d'une fonction de point. Or *on peut*, de même, *appeler*, en général, *paramètre différentiel d'un ordre pair quelconque, pour une fonction de point, l'expression la plus simple représentant, à un facteur numérique près, la moyenne des valeurs que prend en un point donné la dérivée de même ordre de la fonction suivant toutes les droites qui s'y croisent.* Les paramètres différentiels du quatrième, du sixième, ..., du $2n^{\text{ième}}$ ordre, seront alors, d'après les formules (20), $\Delta_2\Delta_2\rho$, $\Delta_2\Delta_2\Delta_2\rho$, ..., $(\Delta_2)^n\rho$: *ils s'obtiendront tous par de simples répétitions de l'opération consistant à prendre le paramètre différentiel du second ordre* Δ_2.

On observera que la dernière formule (20) devient respectivement, dans les trois cas $m=1$, $m=2$ et $m=3$:

$$(22)\quad \begin{cases} \text{Moy.}\ \dfrac{d^{2n}\rho}{ds^{2n}}=(\Delta_2)^n\rho,\\[2mm] \text{Moy.}\ \dfrac{d^{2n}\rho}{ds^{2n}}=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}(\Delta_2)^n\rho,\\[2mm] \text{Moy.}\ \dfrac{d^{2n}\rho}{ds^{2n}}=\dfrac{(\Delta_2)^n\rho}{2n+1}.\end{cases}$$

Le calcul de la valeur moyenne de $\frac{d^{2n}\rho}{ds^{2n}}$ conduit ainsi à une généralisation de la *dérivée naturelle* ou paramètrique $\Delta_2\rho$. Or celui de la valeur moyenne de $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^{2n}$ suggère, de même, une généralisation de cet autre paramètre différentiel, dit *du premier ordre,* dont le carré est proportionnel à moy. $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2$. En général, p étant un exposant entier et positif quelconque, l'expression de la valeur moyenne de

$\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^p$ se déduit aisément de celle qui représente la valeur moyenne de $\frac{d^p\rho}{ds^p}$. En effet, d'abord, si $a, b, \ldots$ désignent les cosinus directeurs de la petite droite ds suivant laquelle se font les différentiations, les calculs tant de la dérivée $p^{\text{ième}}$ de ρ que de la puissance $p^{\text{ième}}$ de $\frac{d\rho}{ds}$ s'opèrent (t. I, p. 70*) au moyen de la formule symbolique

$$\left(\frac{d}{ds}\right)^p = \left(a\frac{d}{dx} + b\frac{d}{dy} + \ldots\right)^p,$$

dans le développement de laquelle les expressions $\frac{d^p}{dx^p}, \frac{d^p}{dx^{p-1}\,dy}, \ldots$ désignent des dérivées $p^{\text{ièmes}}$ de ρ quand il s'agit d'évaluer $\frac{d^p\rho}{ds^p}$, mais désignent des puissances ou des produits des dérivées premières de ρ, relatives aux variables figurant en dénominateur, s'il est question de $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^p$. Et lorsque, ensuite, faisant varier la direction de l'élément ds, on prend la valeur moyenne des coefficients $a^p, pa^{p-1}b, \ldots$, cette valeur est la même dans les deux cas; d'où il suit que les deux valeurs moyennes, soit de $\frac{d^p\rho}{ds^p}$, soit de $\frac{d\rho^p}{ds^p}$, ont encore leurs développements symboliques exactement pareils, et sont transformables l'une en l'autre par des substitutions de dérivées partielles d'ordre p à des puissances ou produits de dérivées premières relatives aux mêmes variables $x, y, \ldots$, ou *vice versa*. C'est dire que, si p est impair, l'expression de moy. $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^p$ sera nulle, comme l'est celle de moy. $\frac{d^p\rho}{ds^p}$, et comme il résulte d'ailleurs du simple changement de signe qu'éprouve la dérivée première de ρ par le fait du renversement de la direction suivie. Mais, si p est un nombre pair $2n$, la dernière formule (20), où il faudra supprimer ρ et remplacer ensuite $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \cdots$ par $\frac{d\rho}{dx}, \frac{d\rho}{dy}, \cdots$, c'est-à-dire mettre $\frac{d\rho^2}{dx^2} + \frac{d\rho^2}{dy^2} + \ldots = \Delta_1^2\rho$ à la place de Δ_2, donnera

$$(23)\qquad \text{moy. de } \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^{2n} = \frac{1}{m}\,\frac{3}{m+2}\,\frac{5}{m+4}\cdots\frac{2n-1}{m+2n-2}\,(\Delta_1^2\rho)^n.$$

Dans le cas $n=1$, cette formule se réduit bien à celles que nous avons obtenues au n° 44* (t. I, p. 53* et 57*) pour définir le paramètre

différentiel du premier ordre. Dans les autres cas, elle montre que les puissances paires successives de la dérivée première $\frac{d\rho}{ds}$ sont, *en moyenne,* et à des coefficients numériques près, simplement proportionnelles aux puissances successives du carré de ce même paramètre Δ_1.

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

SUITE DE LA THÉORIE DES POTENTIELS : ÉTUDE SPÉCIALE DE CEUX DANS LESQUELS L'INTÉGRATION S'ÉTEND A TOUTE LA MASSE POTENTIANTE.

355*. — **Des potentiels où l'intégration s'étend à toute la masse potentiante; cas où l'on peut les différentier sous les signes $\int$, soit exactement, soit avec addition d'un terme simplement proportionnel à la densité de cette masse au point potentié.**

Quand, dans l'expression générale,

$$\varphi = \int_{\varpi} \psi(\xi - x, \eta - y, \ldots)\rho(\xi, \eta, \ldots)\,d\varpi,$$

d'un potentiel considéré à l'intérieur d'un espace ϖ à m dimensions, on adopte pour $\psi(\xi - x, \eta - y, \ldots)$ une fonction homogène de $\xi - x, \eta - y, \ldots$ dont le degré n dépasse $-m$, et quand, de plus, la masse potentiante a ses dimensions finies, avec une densité $\rho(\xi, \eta, \ldots)$ finie aussi partout, rien ne s'oppose à ce que l'on fasse porter l'intégration $\int_{\varpi}$ sur toute l'étendue de la masse potentiante. En effet, d'une part, on peut, sans rendre infini le potentiel, prendre pour limite extérieure σ_1 de l'espace ϖ une figure décrite d'un rayon r assez grand, autour du point potentié $(x, y, \ldots)$ comme centre, pour que, au dehors, ρ s'annule partout. Et si, d'autre part, l'on a provisoirement choisi comme limite intérieure σ une autre figure de même forme, ou équidistante aussi, en tous ses points, de $(x, y, \ldots)$, mais dont le rayon r constant soit extrêmement petit, la fonction ψ, qui, divisée par $r^n = [(\xi - x)^2 + \ldots]^{\frac{n}{2}}$, devient homogène de degré zéro ou invariable pour chaque direction du rayon r, sera une quantité de l'ordre de r^n, à cette limite σ. Donc un décroissement élémentaire $-dr$ subi par r, en ajoutant σdr au champ de l'intégrale, fera croître le potentiel, *au plus* (c'est-à-dire quand il n'y aura pas destruction mutuelle d'éléments de signes contraires pour les diverses directions), d'une quantité de l'ordre de $r^n\,\sigma dr$, ou de l'ordre de $r^{n+m-1}dr$, vu la

proportionnalité de σ à r^{m-1}. Et il suffira bien, pour que tous les accroissements pareils, jusqu'à annulation de r, donnent une somme finie, que l'exposant $(n+m-1)$ dépasse -1, ou que n soit supérieur à $-m$, c'est-à-dire que le facteur r^{n+m-1} ne devienne pas, à la limite $r=0$, d'un ordre d'infinitude atteignant le premier.

On pourra néanmoins, même dans ce cas d'un potentiel fini quoique étendu à toute la masse, mais pour éviter d'avoir à considérer des éléments d'intégrale ayant en facteur une fonction ψ infinie, garder la limite intérieure σ, à laquelle, seulement, on attribuera un rayon ε infiniment petit et, par conséquent, incapable d'altérer sensiblement l'intégrale φ dans aucune position du point $(x, y, \ldots)$.

La dérivée de φ en x est alors, d'après la première formule (4) [p. 194*], $\int_\varpi \frac{d\psi}{dx}\rho\, d\varpi + \int_\sigma \psi\rho\cos(n,\xi)\,d\sigma$. Le second terme, relatif à la petite figure σ de rayon ε, terme au plus de l'ordre de $\psi\sigma$ ou de l'ordre de $r^n r^{m-1} = \varepsilon^{n+m-1}$, s'évanouit quand le degré d'homogénéité n de la fonction ψ dépasse $-(m-1)$, ou quand $n+m$ excède 1; et, dans ce cas, il ne reste pour exprimer la dérivée de φ en x, que le terme $\int_\varpi \frac{d\psi}{dx}\rho\, d\varpi$, qu'aurait donné la simple différentiation en x, sous les signes $\int$, du potentiel proposé $\int\psi\rho\, d\varpi$. Or $\frac{d\psi}{dx}$, dérivée de la fonction homogène $-\psi$ par rapport à sa variable $\xi - x$, est elle-même une fonction homogène, mais du degré d'homogénéité $n-1$; et, par conséquent, l'expression obtenue de $\frac{d\varphi}{dx}$ constitue un nouveau potentiel, que l'on pourra différentier encore comme le proposé, c'est-à-dire sous les signes $\int$, si n est supérieur à $-(m-2)$ ou si la somme $n+m$ excède 2.

Donc, en continuant à raisonner de même, nous reconnaîtrons qu'*un potentiel* $\int\psi\rho\, d\varpi$, *étendu à toute une masse de dimensions et de densité finies, peut se différentier sous les signes* $\int$, *par rapport aux coordonnées du point potentié* $(x, y, \ldots)$, *autant de fois que l'indique le nombre entier immédiatement inférieur à la somme* $n+m$, *où* n *désigne le degré d'homogénéité de la fonction* ψ *par rapport à ses variables* $\xi - x, \eta - y, \ldots$, *et* m *le nombre de celles-ci ou des dimensions de l'espace considéré.*

Par exemple, un potentiel de pesanteur $\int \frac{\rho\, d\varpi}{r}$, où la fonction ψ, égale à l'inverse de r, est du degré d'homogénéité -1, peut, m étant 3 (d'où $n+m=2$), se différentier une seule fois sous le signe $\int$. Mais, quand il s'agit, dans le même cas $m=3$, du potentiel $\int r\rho\, d\varpi$,

où ψ, égal à r, est du degré 1, la somme $n+m$, égale à 4, excède trois unités, et l'on peut différentier l'intégrale trois fois sous les signes $\int$.

Dans un espace à *deux* dimensions, les potentiels $\int (\log r)\rho\, d\varpi$ et $\int (r^2 \log r)\rho\, d\varpi$ se différentieront encore, respectivement, une fois et trois fois sous les signes $\int$: car $\log r$, ayant ses dérivées en x et y, savoir $\frac{1}{r}\frac{dr}{d(x,y)}$ ou $\frac{(x-\xi,\ y-\eta)}{r^2}$, homogènes du degré -1, est ici assimilable à une fonction homogène du degré zéro; et elle devient, en effet, pour r nul, d'un ordre d'infinitude infiniment petit (t. I, n° 88, p. 140). Au reste, si $\log r$ et $r^2 \log r$ sont transcendantes, leurs dérivées, premières pour $\log r$, troisièmes pour $r^2\log r$, sont algébriques et du degré d'homogénéité -1, comme on vient de le voir dans le cas de $\log r$ et comme le montrent, dans celui de $r^2 \log r$, des différentiations successives, où l'on observera que, par exemple, la dérivée en x de $r^2 = (x-\xi)^2 + \ldots$ est $2(x-\xi)$; d'où résulte simplement $2(x-\xi)\log r$ pour la partie transcendante de la dérivée première de $r^2\log r$ par rapport à x.

Quand le degré n d'homogénéité de ψ est entier, on peut même utiliser la différentiation en x, y, ..., de l'intégrale $\int \psi\rho\, d\varpi$, sous le signe $\int$, pour obtenir les dérivées partielles de l'ordre $n+m$, à la condition d'y compléter les résultats par l'addition de termes très simples, proportionnels à la densité $\rho(x, y, \ldots)$ au point potentié. En effet, toute dérivée de l'ordre $n+m-1$, étant un certain potentiel aussi de la forme $\int \psi\rho\, d\varpi$, étendu à la totalité de la masse potentiante, pourra s'écrire $\int \psi_1 \rho\, d\varpi$, si ψ_1 y désigne une fonction d'un degré d'homogénéité, en $\xi - x$, $\eta - y$, ..., égal à $n-(n+m-1)$ ou à $1-m$. Sa dérivée en x, par exemple, c'est-à-dire l'une des dérivées $n+m^{\text{ièmes}}$ considérées, vaudra donc l'intégrale résultant de sa différentiation sous le signe $\int$, plus le terme $\int_\sigma \psi_1\rho\cos(n,\xi)\, d\sigma$, que l'on peut écrire encore $\sigma\int_\sigma \psi_1\rho\cos(n,\xi)\frac{d\sigma}{\sigma}$. Or ψ_1, fonction homogène, du degré $1-m$, des projections $\xi - x$, $\eta - y$, ... du rayon r, est le produit du facteur r^{1-m}, constant sur toute la figure σ, par une fonction homogène du degré zéro, qui pourra bien varier avec la direction du rayon r, mais non avec sa grandeur. Comme, d'ailleurs, le rapport $\frac{d\sigma}{\sigma}$ ne dépend pas non plus de r quand les figures concentriques σ sont décomposées homothétiquement en éléments $d\sigma$, et comme enfin $\rho(\xi, \eta, \ldots)$ est réductible à $\rho(x, y, \ldots)$ sur toute l'étendue infiniment petite de σ, le terme complémentaire dont il s'agit revient bien au produit de

$\rho(x, y, \ldots)$ par une expression, $\frac{\sigma}{r^{m-1}} \int \frac{\psi_1}{r^{1-m}}' \cos(n, \xi) \frac{d\sigma}{\sigma}$, où rien ne dépend plus ni de la masse potentiante, ni de la valeur infiniment petite ε du rayon r de la figure σ, mais de la nature de la fonction ψ_1.

Cette expression s'évalue très aisément quand, ψ se trouvant de la forme simple $f(r)$, sa dérivée $f'(r)$ est algébrique du degré $1 - m$; en sorte que les dérivées de $\int \psi \rho \, d\varpi$, de l'ordre $n + m$, ou dont il s'agit, soient les $[(2 - m) + m]^{\text{ièmes}}$, c'est-à-dire les secondes. Alors, en effet, si l'on cherche, par exemple, la dérivée $\frac{d^2}{dx^2} \int \psi \rho \, d\varpi$, il viendra d'abord, sans difficulté, pour la dérivée première en x, $\int \frac{d\psi}{dx} \rho \, d\varpi$; et il faudra poser, en conséquence,

$$\psi_1 = \frac{d\psi}{dx} = f'(r) \frac{x - \xi}{r},$$

expression qui, en tout point de la figure σ, devient

$$\psi_1 = f'(r) \cos(n, \xi),$$

vu la coïncidence de la normale à $d\sigma$, menée hors du champ d'intégration ϖ, avec le rayon r censé tiré de ce point vers le centre $(x, y, \ldots)$. Le terme complémentaire $\int_\sigma \psi_1 \rho \cos(n, \xi) \, d\sigma$ sera donc

$$\left[\int_\sigma f'(r) \cos^2(n, \xi) \, d\sigma\right] \rho(x, y, \ldots) \quad \text{ou} \quad \left[\int_\sigma \cos^2(n, \xi) \frac{d\sigma}{\sigma}\right] \sigma f'(r) \rho(x, y, \ldots).$$

Il ne reste plus qu'à y calculer la valeur moyenne,

$$\int_\sigma \cos^2(n, \xi) \frac{d\sigma}{\sigma},$$

de $\cos^2(n, \xi)$, pour toutes les directions autour de $(x, y, \ldots)$ dans l'espace à m dimensions considéré. Comme cette moyenne est évidemment la même quel que soit l'axe des x ou des ξ adopté, et comme elle s'appliquerait par conséquent à $\cos^2(n, \eta)$, $\ldots$, elle sera la $m^{\text{ième}}$ partie de la somme $\cos^2(n, \xi) + \cos^2(n, \eta) + \ldots$, constamment égale à l'unité. Donc sa valeur est $\frac{1}{m}$; et l'on aura, en définitive, vu les expressions analogues que donneraient les autres dérivées secondes directes du potentiel,

$$(24) \quad \frac{d^2 \int f(r) \rho \, d\varpi}{(dx^2, dy^2, \ldots)} = \int_\varpi \frac{d^2 f(r)}{(dx^2, dy^2, \ldots)} \rho \, d\varpi + \frac{\sigma f'(r)}{m} \rho(x, y, \ldots),$$

formule multiple dans laquelle $f'(r)$ et σ, respectivement proportionnels à r^{1-m} et à r^{m-1}, ont pour produit une simple constante.

Par exemple, dans le cas d'un potentiel de pesanteur où, m égalant 3 et $f(r)$ ayant l'expression r^{-1}, σ est une surface sphérique $4\pi r^2$ et $f'(r)$ la fonction $-r^{-2}$, le dernier terme de (24) devient

$$-\frac{4\pi}{3}\rho(x, y, \ldots).$$

De même, si l'on a pris $f(r) = \log r$ et qu'il s'agisse d'un espace plan, on aura $f'(r) = r^{-1}, m = 2$, et les figures σ seront des circonférences $2\pi r$: le dernier terme de (24) prendra donc la valeur simple

$$\pi\rho(x, y).$$

Il est bon de remarquer que, dans tous ces cas, la dérivée de ψ placée sous le signe $\int_\varpi$, au second membre de la formule (24) ou de toute autre analogue, atteint seulement le degré d'homogénéité $n-(n+m)$ ou $-m$, et que, par suite, si l'on prenait en valeur absolue tous les éléments acquis par l'intégrale quand le rayon r décroît de $-dr$ ou quand le champ s'accroît de $\sigma\, dr$, l'augmentation de l'intégrale se trouverait comparable à $r^{-m}\sigma\, dr$, ou à

$$r^{-m} r^{m-1}\, dr = \frac{dr}{r}.$$

L'intégrale, en y faisant partir r de zéro, ou étendue à toute la masse potentiante, serait, par suite, infinie. C'est donc à la destruction mutuelle d'éléments positifs et d'éléments négatifs correspondant aux diverses directions des rayons r, que cette intégrale doit d'être finie, comme il le faut bien pour que, jointe à un terme assignable proportionnel à $\rho(x, y, \ldots)$, elle puisse exprimer une dérivée $n+m^{\text{ième}}$ d'un potentiel $\int \psi\rho\, d\varpi$ dont la graduelle variation, en général, est évidente.

L'addition des m formules (24) donnera immédiatement, pour le paramètre différentiel Δ_2 de l'intégrale $\int \psi\rho\, d\varpi$, l'expression

$$\int [\Delta_2 f(r)]\rho\, d\varpi + \sigma f'(r)\rho(x, y, \ldots),$$

où $\Delta_2 f(r)$, fonction de point indépendante, comme $f(r)$, des axes choisis, aura la même valeur que lorsqu'on adopte pour origine le point *fixe* $(\xi, \eta, \ldots)$ d'où se compte la distance r au point *mobile* $(x, y, \ldots)$, valeur qui est $f''(r) + \frac{m-1}{r} f'(r)$, d'après une formule

(28) du t. I (p. 95*). Il viendra donc

$$(25)\quad \Delta_2 \int f(r)\rho\, d\varpi = \int_\varpi \left[f''(r) + \frac{m-1}{r} f'(r)\right]\rho\, d\varpi + \sigma f'(r)\rho(x, y, \ldots),$$

formule qui donne respectivement :

1° Quand il s'agit d'un potentiel de pesanteur, ou que $f(r) = r^{-1}$, $f'(r) = -r^{-2}$, $f''(r) = 2r^{-3}$, avec $m = 3$ et $\sigma = 4\pi r^2$,

$$(26)\qquad (\text{pour } m = 3)\quad \Delta_2 \int \frac{\rho\, d\varpi}{r} = -4\pi\rho(x, y, z);$$

2° Quand $m = 2$, ou $\sigma = 2\pi r$, et que $f(r) = \log r$, $f'(r) = r^{-1}$, $f''(r) = -r^{-2}$,

$$(27)\qquad (\text{pour } m = 2)\quad \Delta_2 \int (\log r)\rho\, d\varpi = 2\pi\rho(x, y).$$

Revenant encore au cas beaucoup plus général où ψ est une fonction homogène, de degré n, des projections $\xi - x$, $\eta - y$, ... du rayon r, supposons la densité ρ nulle au point potentié $(x, y, \ldots)$. Les dérivées $n + m^{\text{ièmes}}$ du potentiel se réduiront alors, comme celles des ordres moins élevés, à l'intégrale fournie par la différentiation sous le signe $\int$, puisque le terme complémentaire, proportionnel à $\rho(x, y \ldots)$, aura la valeur zéro. Et il est évident que les dérivées suivantes, jusqu'à l'infini, s'obtiendront elles-mêmes par ce procédé de différentiation, si la densité ρ ne s'annule pas seulement au point potentié $(x, y, \ldots)$, mais aussi tout autour dans une étendue assignable ; car la figure σ, d'un rayon infiniment petit ε, décrite autour de $(x, y, \ldots)$ comme centre, n'y rencontrera pas la matière potentiante, et, dans toutes les dérivées successives que l'on formera, les termes complémentaires ou affectés du signe $\int_\sigma$ seront identiquement nuls.

356* — Potentiels inverse et direct à trois variables; des fonctions qu'ils sont propres à exprimer.

Le potentiel de pesanteur, somme des produits des divers éléments $\rho\, d\varpi$ d'une masse donnée, par l'inverse de leurs distances r à un point mobile (x, y, z), a reçu de Lamé le nom de *potentiel inverse,* afin d'en distinguer l'intégrale analogue, qu'il appelle *potentiel direct,* obtenue en multipliant, au contraire, chaque élément $\rho\, d\varpi$ de la masse par sa distance r elle-même au point potentié (x, y, z).

Les propriétés générales de ces deux potentiels résultent déjà de ce

qui précède. Nous venons de voir notamment que, les coordonnées à considérer, x, y, z, étant au nombre de trois, le potentiel inverse $\int \frac{\rho\, d\varpi}{r}$ peut se différentier une fois, et, le potentiel direct $\int r\rho\, d\varpi$, trois fois successivement, sous les signes $\int$, par rapport à x, y ou z ; qu'on peut encore les différentier une fois de plus de la même manière, mais en y complétant les résultats par l'addition de termes simplement proportionnels à $\rho(x, y, z)$, et qui sont, par exemple, $-\frac{4}{3}\pi\rho(x, y, z)$ pour chacune des trois dérivées secondes directes du potentiel inverse ; que ces différentiations sous les signes $\int$ y deviennent même légitimes pour tous les ordres de dérivées quand le point (x, y, z) appartient à un espace vide de matière potentiante; enfin, que le paramètre différentiel Δ_2 du potentiel inverse a la valeur $-4\pi\rho(x, y, z)$. Quant au paramètre analogue, $\Delta_2\int r\rho\, d\varpi$, du potentiel direct, il sera évidemment $\int(\Delta_2 r)\rho\, d\varpi$, c'est-à-dire $2\int\frac{\rho\, d\varpi}{r}$, d'après la formule générale de $\Delta_2 f(r)$, savoir $f''(r) + \frac{m-1}{r}f'(r)$, réduite ici à $\frac{2}{r}$ par les hypothèses $f(r) = r$ et $m = 3$. Ainsi, *le paramètre différentiel du second ordre du potentiel direct égale le double du potentiel inverse;* et l'on a, tout à la fois :

$$(28)\quad \begin{cases} \Delta_2\int\frac{\rho\, d\varpi}{r} = -4\pi\rho(x, y, z); \qquad \Delta_2\int r\rho\, d\varpi = 2\int\frac{\rho\, d\varpi}{r}; \\ \text{d'où} \\ \qquad \Delta_2\,\Delta_2\int r\rho\, d\varpi = -8\pi\rho(x, y, z). \end{cases}$$

La première de ces trois formules, découverte par Laplace dans le cas simple d'une densité $\rho(x, y, z)$ nulle au point potentié et tout autour, est due, sous sa forme générale, à Poisson, dont elle porte le nom.

Comme $\rho(x, y, z)$ y exprime une fonction arbitraire dans des régions limitées de l'espace et nulle hors de ces régions, c'est-à-dire hors du champ qu'occupe ou qu'est censée occuper la matière potentiante, comme, de plus, $\int\frac{\rho\, d\varpi}{r}$ devient de l'ordre de petitesse de $\frac{1}{r}$ aux points (x, y, z) très éloignés des régions dont il s'agit, cette première formule (28), divisée par -4π, montre que *le quotient, par -4π, d'un potentiel inverse, constitue une fonction, d'une composition parfaitement explicite et connue sous sa forme d'intégrale triple, dont le paramètre différentiel Δ_2 est apte à prendre, dans*

telles régions limitées qu'on veut de l'espace, telles valeurs données, $\rho(x, y, z)$, *que l'on veut, en s'annulant partout ailleurs, et dont la grandeur s'évanouit quand ses variables* x, y, z, *ou seulement l'une d'elles, deviennent infinies.* De même, d'après la dernière formule (28), et vu que les dérivées partielles secondes de r, étant du degré d'homogénéité -1 en $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$, tendent également vers zéro pour x, y, z infinis, *le quotient, par* -8π, *d'un potentiel direct* $\int r\rho\, d\varpi$, *est une fonction, de forme bien définie malgré son triple signe* $\int$, *jouissant des deux propriétés, d'avoir ses dérivées partielles secondes évanouissantes, à l'infini, et son paramètre différentiel du quatrième ordre* $\Delta_2\Delta_2$ *égal à une fonction arbitraire* $\rho(x, y, z)$ *en tous les points de régions limitées quelconques, mais identiquement nul hors de ces régions.*

On conçoit donc que les potentiels soit inverse, soit direct, puissent exprimer, du moins sous certaines conditions, des fonctions de point *arbitrairement* définies par leurs paramètres différentiels du second ou du quatrième ordre. De là le pouvoir de représentation de ces deux potentiels, et leur importance dans plusieurs questions de Physique mathématique, même étrangères à la théorie de la pesanteur pour laquelle a été imaginé le potentiel inverse.

La première relation (28), que nous écrirons simplement $\Delta_2\varphi = -4\pi\rho$, en appelant φ et ρ le potentiel inverse et la densité ρ au point quelconque (x, y, z), conduit à une formule remarquable, quand on la multiplie par un élément $d\varpi$ de volume et qu'on intègre séparément chacun de ses quatre termes, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}, \frac{d^2\varphi}{dy^2}, \frac{d^2\varphi}{dz^2}, -4\pi\rho$, dans tout un espace ϖ quelconque. Nous appellerons σ la surface limite de cet espace, $d\sigma$ l'un quelconque de ses éléments, et $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les trois cosinus directeurs de la normale infiniment petite dn menée à $d\sigma$ hors de l'espace ϖ. Une intégration s'effectue immédiatement sur chaque terme du premier membre, par le procédé usuel employé déjà ici plusieurs fois; et il vient

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} \int_\sigma \left(\frac{d\varphi}{dx}\cos\alpha + \frac{d\varphi}{dy}\cos\beta + \frac{d\varphi}{dz}\cos\gamma\right) d\sigma = -4\pi \int_\varpi \rho\, d\varpi, \\ \text{ou} \qquad \int_\sigma \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = -4\pi \int_\varpi \rho\, d\varpi, \end{array}\right.$$

formule établissant, comme on voit, une relation de simple proportionnalité entre la masse $\int_\varpi \rho\, d\varpi$, contenue dans l'espace ϖ, et la

moyenne des vitesses de variation $\frac{d\varphi}{dn}$ du potentiel inverse total φ à la sortie de cet espace.

Elle comporte une intéressante application au cas d'une masse qui, privée peu à peu de son épaisseur, se condense en une couche mince, de densité infinie par unité de volume, mais finie par unité d'aire. Alors le potentiel φ ne cesse pas d'être, même sur la couche, une fonction finie et continue de x, y, z. En effet, les éléments de cette intégrale qui, seuls, affectés d'un dénominateur r infiniment petit, pourraient avoir une somme très grande ou très variable pour de légers changements de x, y, z, sont ceux qu'acquiert l'intégrale quand, le point (x, y, z) étant sur la couche, on fait décroître jusqu'à zéro le rayon $r = \varepsilon$ de la sphère décrite autour de ce point, éléments dont chaque groupe se trouve comparable au quotient, par r, de la zone circulaire $2\pi r dr$ comprise dans la couche entre deux positions successives (caractérisées par les rayons r et $r - dr$) de cette sphère évanouissante; or leur somme, de l'ordre de $2\pi \int_0^\varepsilon dr$, est bien négligeable. Le potentiel, étant ainsi fini sur la couche, ou infiniment peu dépendant de la matière contiguë au point (x, y, z), ne pourra que varier graduellement avec x, y, z d'un endroit à l'autre de la couche, si celle-ci a sa forme et sa *densité superficielle* continues; de sorte que la dérivée de φ suivant des éléments rectilignes dn tangents à la couche sera finie.

Cela posé, prenons pour l'espace ϖ, dans la seconde formule (29), celui qu'occupe un fragment dm de la couche très peu étendu en longueur et en largeur, dont nous pourrons appeler $d\sigma$ la superficie, c'est-à-dire la base supérieure ou inférieure, de l'ordre de sa masse dm, et dont la surface latérale ou la tranche, supposée normale aux bases, s'évanouira comparativement à $d\sigma$ ou à dm. La dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ restant finie sur les éléments de la tranche, la partie du premier membre de (29) qui s'y rapporte sera donc négligeable à côté du dernier terme $-4\pi \int_\varpi \rho\, d\varpi$ ou $-4\pi\, dm$ de l'équation; et il ne restera d'influents, au premier membre, que les éléments relatifs aux deux bases $d\sigma$ du fragment. Si nous appelons respectivement dn, dn' les deux normales menées à ces bases hors de la couche, le premier membre de (29) deviendra ainsi $\left(\frac{d\varphi}{dn} + \frac{d\varphi}{dn'}\right) d\sigma$; et la relation (29) sera simplement

$$(30) \quad \left(\frac{d\varphi}{dn} + \frac{d\varphi}{dn'}\right) d\sigma = -4\pi\, dm \quad \text{ou} \quad \frac{dm}{d\sigma} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\varphi}{dn} + \frac{d\varphi}{dn'}\right).$$

Elle exprime la *densité superficielle* $\frac{dm}{d\sigma}$, ou masse de la couche par unité d'aire en chaque endroit, au moyen des deux dérivées du potentiel inverse suivant les normales dn, dn' aux deux faces de la couche. Comme la deuxième de ces normales est de sens opposé à la première, la somme $\frac{d\varphi}{dn}+\frac{d\varphi}{dn'}$ représente l'accroissement algébrique total qu'éprouve, à la traversée de la couche, la dérivée du potentiel relative à une coordonnée ayant le sens de dn. Donc le potentiel φ ne cesse pas d'être fini et continu sur la couche, mais sa dérivée première dans le sens normal, quoique restant finie, y devient discontinue, et, par suite, sa dérivée seconde devient infinie *à l'intérieur de la couche*. C'est bien ce qu'indique l'expression infinie, $-4\pi\rho$, du paramètre $\Delta_2\varphi$, mais pour l'intérieur seulement, ou dans l'épaisseur même, infiniment petite, de la masse.

Le cas particulier le plus remarquable est celui d'une couche *plane*, de part et d'autre de laquelle le potentiel prend alors symétriquement les mêmes valeurs et offre par suite les mêmes dérivées $\frac{d\varphi}{dn}$, $\frac{d\varphi}{dn'}$: il en résulte, pour la densité superficielle $\frac{dm}{d\sigma}$, la valeur $\frac{1}{2\pi}\left(\frac{d\varphi}{-dn}\right)$, simplement proportionnelle, en chaque endroit, à la dernière vitesse d'accroissement $\frac{d\varphi}{-dn}$ du potentiel inverse, le long d'un chemin qui y aboutit normalement à la couche. Mais ce cas particulier mérite, à cause de ses applications en Mécanique et en Physique, une étude spéciale directe, par laquelle nous terminerons cette Leçon.

357*. — **Rapports des potentiels tant inverse que direct, et d'autres analogues, avec le potentiel sphérique; potentiels logarithmiques à deux variables et leur usage.**

Il importe de signaler auparavant les liens étroits qui rattachent les potentiels inverse et direct au potentiel sphérique, et qui font, des formules (28), de simples conséquences de la relation analogue (8) [p. 197*], exprimant la propriété principale de celui-ci. Et d'abord, en ce qui concerne le premier, $\varphi=\int\frac{\rho\,d\varpi}{r}$, observons que le potentiel sphérique Φ est, par sa définition même, le potentiel inverse φ d'une couche sphérique mince, relatif au centre de celle-ci et rapporté à l'unité de son épaisseur. Si dr désigne cette épaisseur et r le rayon intérieur de la couche, le potentiel inverse correspondant est donc $\Phi\,dr$:

par suite, celui de toute la masse potentiante sera $\varphi = \int_\varepsilon^\infty \Phi\, dr$, ε exprimant le rayon constant de la sphère, infiniment petite, que l'on décrit autour du centre (x, y, z) pour éviter d'avoir à considérer des éléments d'intégrale où la fonction sous les signes $\int$ devienne infinie.

Or la quantité Φ seule, dans cette expression de φ, varie quand le point potentié se déplace; seule, elle dépend des coordonnées x, y, z. Il est donc clair que l'on aura $\Delta_2 \varphi = \int_\varepsilon^\infty (\Delta_2 \Phi)\, dr$, c'est-à-dire, en vertu de (8), $\Delta_2 \varphi = \int_\varepsilon^\infty \frac{d^2 \Phi}{dr^2}\, dr = \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)_{r=\varepsilon}^{r=\infty}$. D'ailleurs, la dérivée $\frac{d\Phi}{dr}$, identiquement nulle, comme Φ, sur la sphère $r = \infty$ que n'atteint pas la matière potentiante, se réduit à $4\pi\rho(x, y, z)$ pour $r = \varepsilon$ ou $r = 0$, d'après la deuxième relation (9) [p. 197*]. Ainsi, il vient bien $\Delta_2 \varphi = -4\pi\rho$.

Quant au potentiel direct $\int r \rho\, d\varpi$ ou $\int r^2 \frac{\rho\, d\varpi}{r}$, qui, pour une simple couche sphérique, serait évidemment, au centre de cette couche, $r^2 \Phi\, dr$, il prendra, pour toute la masse potentiante proposée, la valeur $\int_\varepsilon^\infty r^2 \Phi\, dr$. On aura, par suite,

$$\Delta_2 \int r \rho\, d\varpi = \int_\varepsilon^\infty r^2 (\Delta_2 \Phi)\, dr = \int_\varepsilon^\infty r^2 \frac{d^2 \Phi}{dr^2}\, dr.$$

Or deux intégrations successives par parties, où l'on observera que les termes intégrés s'annulent, comme Φ, à la limite supérieure $r = \infty$, et, en vertu des deux premières (9), à la limite inférieure $r = \varepsilon$, donnent

$$\int_\varepsilon^\infty r^2 \frac{d^2 \Phi}{dr^2}\, dr = \int_{r=\varepsilon}^{r=\infty} r^2 d\frac{d\Phi}{dr} = -2 \int_\varepsilon^\infty r \frac{d\Phi}{dr}\, dr = -2 \int_{r=\varepsilon}^{r=\infty} r\, d\Phi = 2 \int_\varepsilon^\infty \Phi\, dr;$$

de telle sorte qu'il vient $\Delta_2 \int r \rho\, d\varpi = 2 \int_\varepsilon^\infty \Phi\, dr = 2 \int \frac{\rho\, d\varpi}{r}$, conformément à la seconde relation (28).

Le même procédé, pour former le paramètre différentiel Δ_2 d'un potentiel $\int \psi \rho\, d\varpi$ étendu à toute une masse proposée $\int \rho\, d\varpi$, s'applique dès que la fonction ψ est de la forme $f(r)$ ou dépend uniquement de la distance r de l'élément $\rho\, d\varpi$ de masse au point potentié. Mais, afin de pouvoir embrasser les cas de moins de trois dimensions, il vaut

mieux introduire, à la place du potentiel sphérique Φ, une quantité qui lui est, comme nous avons vu, reliée très simplement, savoir, la valeur moyenne $\rho' = \int_\sigma \rho \frac{d\sigma}{\sigma}$ de la densité $\rho(\xi, \eta, \ldots)$, sur toute la figure σ, de rayon uniforme r, décrite autour de $(x, y, \ldots)$ comme centre. Alors le potentiel considéré est évidemment $f(r)\sigma\rho' dr$ pour la matière comprise entre les distances $r, r + dr$ au point potentié ; et, pour toute la masse, il devient $\int_\varepsilon^\infty f(r)\sigma\rho' dr$, avec une limite inférieure ε susceptible, par hypothèse, de décroître jusqu'à zéro sans rendre l'intégrale infinie : ce qui exige évidemment que le produit $f(r)\sigma$ n'atteigne pas l'ordre 1 d'infinitude, ou que l'on ait

$$\lim f(r)\sigma r = 0 \quad (\text{pour } r = 0).$$

Cela posé, le paramètre différentiel du second ordre $\Delta_2 \int f(r)\rho\, d\varpi$ est $\int_\varepsilon^\infty f(r)\sigma(\Delta_2\rho')\, dr$; et il vient, en remplaçant $\sigma\Delta_2\rho'$ par sa valeur $\frac{d}{dr}\left(\sigma\frac{d\rho'}{dr}\right)$ tirée de (10) [p. 200*], puis intégrant par parties,

$$(31) \qquad \Delta_2 \int f(r)\rho\, d\varpi = \int_{r=\varepsilon}^{r=\infty} f(r)\, d\left(\sigma\frac{d\rho'}{dr}\right) = \left[f(r)\sigma\frac{d\rho'}{dr}\right]_{r=\varepsilon}^{r=\infty} - \int_\varepsilon^\infty f'(r)\sigma\frac{d\rho'}{dr}\, dr.$$

Or, dans le dernier membre, le terme intégré disparaît à la limite supérieure $r = \infty$, où ρ' s'annule identiquement, et aussi à la limite inférieure $r = \varepsilon$, où, d'après l'expression (21) de ρ' [p. 205*], il est de l'ordre de $f(r)\sigma r$, quantité évanouissante, comme on vient de voir, par le fait même que le potentiel proposé est supposé fini. On aura donc simplement, en effectuant, sur le dernier terme de (31), une nouvelle intégration par parties, qui ne donnera encore rien à la limite supérieure, mais où l'on remarquera, à la limite inférieure, que ρ' s'y réduit à $\rho(x, y)$ et que σ est proportionnel à r^{m-1} :

$$\Delta_2 \int f(r)\rho\, d\varpi = -\int_{r=\varepsilon}^{r=\infty} f'(r)\sigma\, d\rho' = \frac{\sigma}{r^{m-1}} . f'(\varepsilon)\varepsilon^{m-1}\rho(x, y, \ldots) + \int_\varepsilon^\infty \frac{d.f'(r)\sigma}{dr}\rho'\, dr.$$

Enfin, par la substitution à σ, dans le dernier terme, du facteur proportionnel r^{m-1} précédé, devant le signe de différentiation, du rapport constant $\frac{\sigma}{r^{m-1}}$, il vient, en remarquant que ce dernier terme est alors

un nouveau potentiel étendu à toute la masse $\int \rho\, d\varpi$,

$$(32)\quad \Delta_2 \int f(r)\rho\, d\varpi = \frac{\sigma}{r^{m-1}} \cdot f'(\varepsilon)\varepsilon^{m-1} \cdot \rho(x,y,\ldots) + \int \frac{d.f'(r)r^{m-1}}{dr} \frac{\rho\, d\varpi}{r^{m-1}},$$

formule d'accord avec celle, (25) [p. 213*], qu'on avait déjà trouvée.

On voit que, si $m = 3$ (d'où $\sigma = 4\pi r^2$), les deux suppositions $f(r) = r^{-1}$, $f(r) = r$ donnent bien, au second membre, l'une, $-4\pi\rho(x, y, z)$, par l'annulation de la dérivée de $f'(r)r^{m-1}$ en r, et l'autre [grâce à l'évanouissement de $f'(\varepsilon)\varepsilon^{m-1}$], $\int \frac{d.r^2}{dr} \frac{\rho\, d\varpi}{r^2} = 2\int \frac{\rho\, d\varpi}{r}$, conformément aux formules que nous venons d'obtenir par la considération du potentiel sphérique.

Arrêtons-nous un instant au cas $m = 2$, $\sigma = 2\pi r$, où l'on suppose tant le point potentié (x, y) que les éléments $\rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ de la masse potentiante contenus dans le plan des xy; et faisons les deux hypothèses $f(r) = \log r$, $f(r) = r^2 \log r$, qui conduisent, comme nous avons vu (p. 210*), à deux potentiels parfaitement finis, susceptibles même d'être différentiés en x ou y, le premier, une fois, le second, trois fois, sous les signes $\int$. Ils sont connus sous le nom de *potentiels logarithmiques;* mais nous les appellerons *potentiels logarithmiques à deux variables,* pour les distinguer d'autres potentiels logarithmiques que nous étudierons tout à l'heure, et qui sont à trois variables x, y, z au lieu des deux x, y.

Si nous leur appliquons la formule (32), où il faudra prendre $m = 2$, $\sigma = 2\pi r$, le second membre sera bien $2\pi\rho(x, y)$ quand on posera $f(r) = \log r$, comme on a déjà vu par la formule (27) [p. 213*]; et, pour $f(r) = r^2 \log r$ [d'où $f'(r) = r + 2r \log r$], il deviendra, par l'évanouissement du terme proportionnel à $\rho(x, y)$,

$$\int \frac{d(r^2 + 2r^2 \log r)}{dr} \frac{\rho\, d\varpi}{r} = 4\int (1 + \log r)\rho\, d\varpi = 4\int \rho\, d\varpi + 4\int (\log r)\rho\, d\varpi.$$

Le paramètre différentiel Δ_2 des potentiels logarithmiques à deux variables a donc, en résumé, les expressions

$$(33)\qquad (\text{pour } m = 2)\ \begin{cases} \Delta_2 \int (\log r)\rho\, d\varpi = 2\pi\rho(x, y), \\ \Delta_2 \int (r^2 \log r)\rho\, d\varpi = 4\int (1 + \log r)\rho\, d\varpi; \\ \text{d'où il résulte} \\ \Delta_2 \Delta_2 \int (r^2 \log r)\rho\, d\varpi = 8\pi\rho(x, y). \end{cases}$$

Ces formules, rapprochées des précédentes (28) [p. 214*], montrent que les deux potentiels logarithmiques à deux variables jouissent,

dans un plan, des mêmes propriétés que les potentiels inverse et direct dans l'étendue solide, pour représenter des fonctions ayant leur paramètre différentiel du second ou du quatrième ordre donné arbitrairement à l'intérieur de régions limitées et nul partout ailleurs. L'analogie est complétée, dans toute la mesure possible, par ces deux circonstances, que, d'une part, les dérivées ou premières, ou troisièmes, des deux potentiels logarithmiques, deviennent évanouissantes de l'ordre de $\frac{1}{r}$ aux grandes distances, comme l'étaient le potentiel inverse ou les dérivées secondes du potentiel direct dans un espace à trois dimensions, et que, d'autre part, ces deux sortes de potentiels peuvent se différentier respectivement, les uns, une fois, les autres, trois fois, sous les signes $\int$.

Cette analogie du premier potentiel logarithmique $\varphi = \int (\log r)\rho\, d\varpi$, en particulier, avec le potentiel inverse, se poursuit quand, au moyen de l'équation $\Delta_2\varphi = 2\pi\rho$, on évalue, pour toute une aire plane ϖ, l'intégrale $\int_\varpi (\Delta_2\varphi)\, d\varpi$, en procédant comme on l'a fait précédemment à partir de l'équation $\Delta_2\varphi = -4\pi\rho$ pour obtenir la formule (29) [p. 215*]. Au lieu de (29), il vient de la sorte, si l'on appelle ici σ le contour de l'aire ϖ, et dn la normale menée hors de ϖ à l'élément quelconque $d\sigma$ du contour,

$$\int_\sigma \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = 2\pi \int_\varpi \rho\, d\varpi.$$

Et si l'on suppose que la couche potentiante se condense peu à peu en une simple traînée finalement sans largeur, mais de masse finie par unité de longueur, ou telle, qu'un élément ds de sa longueur s ait une masse dm de l'ordre de ds, d'une part, cette fonction $\varphi = \int (\log r)\rho\, d\varpi$, ou $\varphi = \int (\log r)\, dm$, restera finie et continue même sur la traînée, vu que les éléments correspondant à r très petit, et où dm sera de l'ordre de $ds = dr$, s'y trouveront négligeables comme dans $\int (\log r)\, dr = -r + r\log r$; d'autre part, en appelant dn et dn' les normales menées des deux côtés à l'élément ds, dans le plan de la traînée, l'expression précédente de $\int_\sigma \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma$, appliquée à la masse dm occupant cette longueur ds, donnera, au lieu de la formule (30) [p. 216*],

$$\frac{dm}{ds} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d\varphi}{dn} + \frac{d\varphi}{dn'}\right).$$

Par suite, dans le cas d'une traînée rectiligne, où $\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{dn'}$, il résul-

tera de cette relation, pour la *densité linéaire* $\frac{dm}{ds}$ de la traînée, le quotient, $\frac{1}{\pi}\frac{d\varphi}{dn}$, par π, de la vitesse $\frac{d\varphi}{dn}$ d'accroissement du potentiel logarithmique au sortir de la traînée.

Le potentiel logarithmique $\int(\log r)dm$ d'une masse, $\int dm$, occupant sur un plan des parties limitées d'une ligne droite, sera donc propre à représenter, pour toute la moitié du plan située d'un côté de cette droite, une fonction dont le paramètre Δ_2 s'y annulera identiquement, dont les dérivées premières devront, en outre, s'y évanouir aux distances infinies de l'origine, et dont enfin, sur la droite donnée, la dérivée, suivant la normale menée à partir de cette droite vers le côté du plan dont il s'agit, s'annulera partout, sauf en des régions restreintes où elle se trouvera arbitraire, mais connue. Il suffira, en effet, d'attribuer à la traînée $\int dm$ la *densité linéaire,* ou masse par unité de longueur, qu'exprimera pour chaque point le quotient par π de cette dérivée connue $\frac{d\varphi}{dn}$.

358*. — Potentiel inverse, et potentiels logarithmiques à trois variables, d'une couche plane infiniment mince.

Bornons-nous enfin, mais pour en étudier certains potentiels dans tout l'espace situé du côté des z positifs, au cas, indiqué un peu plus haut (pp. 216* et 217*), d'une matière potentiante étalée en couche mince sur le plan des xy, et dont $\rho(\xi,\eta)$ continuera à désigner la *densité superficielle,* que représentait, à la fin de l'avant-dernier numéro, la fraction $\frac{dm}{d\sigma}$. Puisque nous supposerons $z > 0$, une sphère de rayon infiniment petit entourant le point potentié (x, y, z) ne rencontrera pas la masse potentiante $\int dm$ ou $\int\int \rho(\xi,\eta)d\xi d\eta$; et l'on pourra différentier autant de fois que l'on voudra en x, y, z les divers potentiels $\int\psi(\xi - x, \eta - y, -z)dm$ de la couche, étendus à toute sa masse.

Pour le potentiel inverse $\varphi = \int\frac{dm}{r}$, où $r = \sqrt{z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, on aura donc, en considérant spécialement φ, sa dérivée première en z et son paramètre différentiel Δ_2 :

$$(34)\qquad \varphi = \int\frac{dm}{r}, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = -z\int\frac{dm}{r^3}, \qquad \Delta_2\varphi = \int\left(\Delta_2\frac{1}{r}\right)dm = 0.$$

Voyons ce que deviennent, à l'approche de la couche, ces valeurs de φ et de sa dérivée première en z. A cet effet, prenons, sur le plan

des xy, le pied (x, y) de la perpendiculaire z abaissée du point potentié, comme origine d'un système de coordonnées polaires, se composant de rayons vecteurs R et d'azimuts θ reliés à ξ et à η par les formules $\xi = x + \mathrm{R}\cos\theta$, $\eta = y + \mathrm{R}\sin\theta$. Il sera dès lors naturel d'adopter pour élément de la couche, en surface, un petit rectangle mixtiligne exprimé, comme on sait, par $\mathrm{R}\,d\theta\,d\mathrm{R}$, et, la distance r du point potentié à cet élément étant d'ailleurs devenue $\sqrt{z^2 + \mathrm{R}^2}$, la première relation (34) prendra la forme

$$(35)\qquad \varphi = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \rho(x + \mathrm{R}\cos\theta, y + \mathrm{R}\sin\theta)\,\frac{\mathrm{R}}{\sqrt{z^2 + \mathrm{R}^2}}\,d\mathrm{R}.$$

A la limite $z = 0$, la fonction placée sous les signes $\int$, finie même pour $\mathrm{R} = 0$, se réduit, dès que R est sensible, à $\rho(x + \mathrm{R}\cos\theta, y + \mathrm{R}\sin\theta)$, quantité s'annulant, par hypothèse, en dehors de régions limitées. Donc l'intégrale double φ reste bien finie et déterminée sur le plan de la couche, comme il résultait de l'examen synthétique fait précédemment (p. 216*) pour le potentiel inverse d'une couche mince de forme quelconque.

Quant à la seconde formule (34), elle est de même, lorsqu'on introduit les coordonnées polaires R, θ :

$$(36)\qquad \frac{d\varphi}{dz} = -z \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \rho(x + \mathrm{R}\cos\theta, y + \mathrm{R}\sin\theta)\,\frac{\mathrm{R}}{(\sqrt{z^2 + \mathrm{R}^2})^3}\,d\mathrm{R}.$$

L'intégrale double qui figure au second membre, devenant infinie pour $z = 0$ à cause du dénominateur R^2 placé alors sous ses signes $\int\int$, a évidemment, dès que z est très petit, tous ses éléments de beaucoup les plus influents dans le voisinage de la valeur $\mathrm{R} = 0$. On peut donc, avec une erreur relative évanouissante si z tend vers zéro, n'y faire varier R que de zéro à une quantité R_1 incomparablement supérieure à z, mais assez faible pour que le facteur $\rho(x + \mathrm{R}\cos\theta, y + \mathrm{R}\sin\theta)$, supposé continu quand l'azimut θ y est constant et le rayon positif R très voisin de zéro, soit réductible à $\rho(x + \varepsilon\cos\theta, y + \varepsilon\sin\theta)$, ε désignant un infiniment petit positif. Ce facteur peut dès lors sortir du signe d'intégration par rapport à R; et il ne reste, sous celui-ci, que l'expression $(z^2 + \mathrm{R}^2)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{R}\,d\mathrm{R}$, dont l'intégrale indéfinie $-(z^2 + \mathrm{R}^2)^{-\frac{1}{2}}$ devient, avec une erreur relative négligeable, z^{-1} entre les deux limites $\mathrm{R} = 0$, $\mathrm{R} = \mathrm{R}_1$, vu que la seconde rend l'expression $(z^2 + \mathrm{R}^2)^{-\frac{1}{2}}$ incomparablement moins forte que ne fait la première. Donc la for-

mule (36) se réduit à celle-ci,

$$(37)\quad (\text{pour } z \text{ très petit})\quad \frac{d\varphi}{dz} = -\int_0^{2\pi} \rho(x+\varepsilon\cos\theta, y+\varepsilon\sin\theta)\,d\theta.$$

Et comme enfin *nous supposons continue, autour du point* (x, y), *la densité* $\rho(\xi, \eta)$ *de la couche,* en sorte que le facteur

$$\rho(x+\varepsilon\cos\theta, y+\varepsilon\sin\theta)$$

se réduise, pour $\varepsilon = 0$, à une valeur unique $\rho(x, y)$ quel que soit l'azimut θ, il vient

$$(38)\qquad (\text{pour } z=0)\quad \frac{d\varphi}{dz} = -2\pi\rho(x, y).$$

Ce résultat est bien celui qu'on pouvait prévoir d'après les considérations terminant l'avant-dernier numéro (p. 217*); car ici une normale élémentaire dn à la couche est identique au chemin infiniment petit dz le long duquel se prend la dérivée de φ que nous venons d'évaluer [1].

---

[1] Un calcul semblable conduit à la propriété analogue, démontrée synthétiquement ci-dessus (p. 221*), du potentiel logarithmique $\varphi = \int(\log r)\,dm$ relatif, dans le plan des xy, à une traînée de matière $\int dm = \int \rho(\xi)\,d\xi$ alignée, par exemple, suivant l'axe des x, et y présentant, au point quelconque d'abscisse ξ, une densité linéaire donnée $\rho(\xi)$, nulle en dehors de certaines limites. Un tel potentiel a évidemment pour dérivée, suivant le sens normal des y,

$$\frac{d\varphi}{dy} = \int \frac{d\log r}{dy}\,dm = y\int\frac{dm}{r^2} = y\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\xi)\,d\xi}{y^2+(\xi-x)^2},$$

ou encore, en introduisant au lieu de ξ, comme variable d'intégration, la distance $R = \xi - x$ de chaque élément $dm = \rho(\xi)\,d\xi$ de la traînée au pied $(x, 0)$ de la perpendiculaire y menée sur celle-ci à partir du point potentié (x, y),

$$\frac{d\varphi}{dy} = \quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(x+R)\,dR}{y^2+R^2}.$$

Or, quand le point (x, y), supposé pris, par exemple, sur la partie du plan où les ordonnées y sont positives, s'approche indéfiniment de l'axe des x, l'intégrale qui figure dans cette expression croît sans limite, en valeur absolue, à raison de son dénominateur y^2+R^2, évanouissant pour $R=0$; et elle se réduit, par suite, sensiblement aux éléments dans lesquels la variable R est très voisine de zéro. Le facteur $\rho(x+R)$ s'y trouve donc lui-même réductible, suivant le signe négatif ou positif de R, à l'une ou à l'autre des deux formes $\rho(x-\varepsilon)$, $\rho(x+\varepsilon)$, ε désignant un infiniment petit positif; et il vient, avec une erreur relative nulle à

Ce n'est pas seulement la fonction φ et sa dérivée première en z, mais aussi ses dérivées de tous les ordres en x, y, z, qui restent finies à la limite $z=0$, pourvu que la densité $\rho(\xi, \eta)$ varie avec une continuité suffisante d'un point à l'autre de la couche. La chose est évidente pour les dérivées de φ et de $\frac{d\varphi}{dz}=-2\pi\rho$ relatives à x et y, ou obtenues en se déplaçant sur le plan même de la couche; et, quant à leurs dérivées en z, elle résulte de ce que l'équation $\Delta_2\varphi=0$, différentiée un nombre quelconque de fois en x, y ou z, donne identiquement, pour φ et pour toutes ses dérivées, la relation symbolique $\frac{d^2}{dz^2}=-\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)$, ramenant ainsi deux différentiations en z à des différentiations en x et y, de manière à ne laisser subsister que des dérivées plus ou moins élevées de φ et de $\frac{d\varphi}{dz}$ en x ou en y.

En résumé, *le potentiel inverse,* φ, *d'une couche étalée avec une continuité suffisante sur des parties limitées, mais quelconques, du plan des* xy, *est parfaitement continu dans tout l'espace compris d'un même côté de ce plan,* celui, par exemple, où les z sont positifs; et *son quotient par* -2π *fournit une expression analytique simple d'une fonction ayant, dans cet espace, son paramètre différentiel* Δ_2 *identiquement nul, ses valeurs évanouissantes aux distances infinies, et sa vitesse d'accroissement* $\frac{-1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dz}$, *à l'approche du plan limite* $z=0$, *égale à* $\rho(x,y)$, *ou entièrement disponible, sur des régions finies quelconques de ce plan, mais nulle sur tout le reste de son étendue.* Ces conditions, auxquelles satisfait le potentiel φ,

---

la limite,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dy}&=y\rho(x-\varepsilon)\int_{-\infty}^{0}\frac{dR}{y^2+R^2}+y\rho(x+\varepsilon)\int_{0}^{\infty}\frac{dR}{y^2+R^2}\\&=\rho(x-\varepsilon)\left(\text{arc tang}\,\frac{R}{y}\right)_{R=-\infty}^{R=0}+\rho(x+\varepsilon)\left(\text{arc tang}\,\frac{R}{y}\right)_{R=0}^{R=\infty}\\&=\pi\,\frac{\rho(x-\varepsilon)+\rho(x+\varepsilon)}{2}.\end{aligned}\right.$$

Par conséquent, si la fonction ρ est continue pour la valeur de x considérée, on aura bien

$$(\text{à la limite } z=0)\quad \frac{d\varphi}{dy}\quad\text{ou}\quad\frac{d\varphi}{dn}=\pi\rho(x),$$

comme il résultait déjà de la démonstration plus générale donnée à la fin du n° 357* (p. 222*).

montrent à quel emploi il sera propre, ou quelles quantités il pourra exprimer : remarquons surtout qu'*il conviendra à des problèmes comportant une fonction arbitraire* $\rho(x, y)$, *relative seulement à la limite* $z = 0$ *d'un espace triplement étendu, et non plus une fonction* $\rho(x, y, z)$ *arbitraire à l'intérieur d'un tel espace, comme il arrivait pour des potentiels inverses ou directs quelconques.*

Mais il est des cas où, la fonction cherchée devant toujours, pour $z > 0$, avoir son paramètre Δ_2 nul, ce seront seulement ses dérivées premières qui s'y évanouiront à l'infini, et sa dérivée seconde en z qui, nulle, pour $z = 0$, hors de régions limitées du plan des xy, devra, dans ces régions, devenir une fonction arbitraire de x et de y. Alors, pour utiliser à la vérification de cette dernière condition, qui est la plus difficile à remplir, la propriété qu'exprime la relation (38), il sera naturel de former un nouveau potentiel $\int \psi\, dm$, que j'appellerai φ_1, dont la dérivée seconde en z soit la première du précédent φ; ce qu'on fera en prenant, pour ψ, non plus $\frac{1}{r}$, mais $\int \frac{dz}{r}$ ou $\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + R^2}}$, c'est-à-dire, d'après la formule (26) de la page 50, et à une quantité près indépendante de z, $\log\left(z + \sqrt{z^2 + R^2}\right)$ ou $\log(z + r)$. Il vient ainsi l'intégale double

$$(39)\quad \varphi_1 = \int \log(z + r)\, dm = \int\int \log\left[z + \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}\right] \rho(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

que nous appellerons le *premier potentiel logarithmique à trois variables*. Il se forme, comme on voit, en multipliant par l'élément dm de la couche plane potentiante, non pas le logarithme naturel de la simple distance r du point potentié à cet élément, mais celui de la somme des deux distances r et z du point potentié tant à l'élément de la couche qu'au plan de celle-ci.

Cette intégrale reste bien finie pour $z = 0$, c'est-à-dire sur le plan de la couche; car elle s'y réduit à $\int (\log r)\, dm$, ou au premier potentiel logarithmique à deux variables (p. 220*). D'ailleurs ses dérivées premières en x, y, z, savoir $\int \left(\frac{x - \xi}{z + r}, \frac{y - \eta}{z + r}, 1\right) \frac{dm}{r}$, ayant leur élément homogène du degré -1 en $x - \xi$, $y - \eta$, z, s'évanouissent aux distances infinies, comme on le désire ici pour les fonctions à exprimer; et la troisième $\frac{d\varphi_1}{dz}$, n'étant autre que φ, donne $\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} = \frac{d\varphi}{dz}$; ce qui change bien la formule (38) en

$$(40)\qquad (\text{pour } z = 0)\quad \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} = -2\pi\rho(x, y).$$

Il ne reste donc qu'à voir si ce nouveau potentiel φ_1 a son paramètre Δ_2 nul. Or la troisième équation (34), devenue $\Delta_2 \frac{d\varphi_1}{dz} = 0$ ou $\frac{d\Delta_2\varphi_1}{dz} = 0$, montre que la fonction $\Delta_2\varphi_1$ ne dépend pas de z et reçoit, tout le long d'une droite quelconque parallèle aux z, même valeur qu'aux points de cette droite situés à l'infini, là où toutes les dérivées de φ_1 s'annulent. Ainsi, l'on a bien identiquement

$$(41) \qquad \Delta_2\varphi_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_2 \int \log(z+r).dm = 0,$$

ce que prouve, du reste, le calcul, par différentiation sous les signes $\int$, des trois dérivées secondes directes de φ_1 en x, y, z, suivi de leur addition. A la limite $z = 0$ où φ_1 devient le potentiel à deux variables $\int(\log r)\,dm$ et où la dérivée seconde de φ_1 en z tend, d'après (40), vers $-2\pi\rho(x, y)$, on aura

$$(\text{pour } z = 0) \quad \Delta_2\varphi_1 = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)\int(\log r)\,dm - 2\pi\rho(x, y) = 0,$$

résultat d'accord avec la première relation (33) [p. 220*] obtenue tout autrement.

En résumé, *le premier potentiel logarithmique* φ_1, *divisé par* -2π, *constituera bien, dans tout l'espace situé du côté du plan des xy où les z sont positifs, une fonction continue ayant son paramètre différentiel* Δ_2 *nul, ses dérivées premières évanouissantes aux distances infinies, et sa dérivée seconde en z, disponible, c'est-à-dire égale à la fonction arbitraire* $\rho(x, y)$, *sur des parties limitées quelconques du plan des xy, mais nulle sur tout le reste de ce plan.*

Enfin, dans certains problèmes de Physique mathématique, la fonction de point demandée, à paramètre différentiel Δ_2 encore nul, devra, pour $z > 0$, avoir seulement ses dérivées secondes évanouissantes à l'infini et sa dérivée troisième en z ou nulle, ou arbitraire sur le plan des xy. On est donc conduit à former, pour ces cas, un nouveau potentiel $\varphi_2 = \int \psi\, dm$, en opérant sur l'expression de φ_1 comme on l'a fait sur celle de φ pour obtenir φ_1 lui-même. Autrement dit, l'on prendra $\psi = \int \log(z+r)\,dz$, ou, grâce à une intégration en z, par parties, dans laquelle on aura finalement $z\,dz = r\,dr$, et abstraction faite d'une quantité indépendante de z,

$$\psi = z\log(z+r) - \int z\,d\log(z+r) = z\log(z+r) - \int \frac{dz}{r} = z\log(z+r) - r.$$

Le *second potentiel logarithmique à trois variables* ainsi composé

sera par conséquent

$$(42) \qquad \varphi_2 = \int [-r + z\log(z+r)]\, dm.$$

La fonction sous les signes $\int$ y tend vers zéro avec r (que z ne dépasse jamais); de sorte qu'il reste, comme φ et φ_1, fini et continu à la limite $z = 0$. Quant aux dérivées partielles de φ_2, on voit que celles du premier ordre en x et y ont leurs fonctions sous les signes $\int$ [débarrassées, par la différentiation, de la transcendante $\log(z+r)$] homogènes du degré zéro en $x - \xi$, $y - \eta$, z; d'où se déduiront bien des dérivées secondes évanouissantes aux distances infinies : et la dérivée de φ_2 en z ne sera évidemment autre que φ_1, dont les propres dérivées s'évanouissent de même à l'infini. D'ailleurs, la relation (40), devenue

$$(43) \qquad (\text{pour } z = 0) \quad \frac{d^3\varphi_2}{dz^3} = -2\pi\rho(x,y),$$

montre que la dérivée troisième de φ_2 en z sera bien, comme on le désire, d'une part, arbitraire sur toutes les parties du plan des xy occupées par la couche potentiante, d'autre part, nulle sur le reste de ce plan, où s'annulera la densité superficielle $\rho(x,y)$. Et pour ce qui est du paramètre différentiel $\Delta_2\varphi_2$, un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire à propos de $\Delta_2\varphi_1$, mais basé sur la relation (41), devenue $\Delta_2 \dfrac{d\varphi_2}{dz} = 0$ ou mieux $\dfrac{d\Delta_2\varphi_2}{dz} = 0$, prouve que ce paramètre $\Delta_2\varphi_2$ a, tout le long d'une parallèle quelconque aux z, même valeur qu'aux points de celle-ci situés à l'infini, là où s'annulent les trois dérivées secondes de φ_2 composant $\Delta_2\varphi_2$. On aura donc $\Delta_2\varphi_2 = 0$; et le potentiel φ_2 jouira bien des propriétés nécessaires pour représenter les fonctions que l'on a en vue.

Il peut être bon de remarquer que ce deuxième potentiel logarithmique φ_2 se ramène au précédent φ_1 et au potentiel direct $\int r\,dm$, avec introduction de la distance z de la couche au point potentié. L'on a, en effet, identiquement, d'après (42),

$$(44) \qquad \varphi_2 = z\varphi_1 - \int r\,dm = z\frac{d\varphi_2}{dz} - \int r\,dm.$$

Aussi le second potentiel logarithmique et le potentiel direct se suppléent-ils dans certaines questions où figure en même temps, tout au moins par quelqu'une de ses dérivées, le premier potentiel logarithmique.

COMPLÉMENT A LA TRENTE-SIXIÈME LEÇON,

CONSACRÉE A L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE.

SOLUTIONS SINGULIÈRES, SOLUTIONS ASYMPTOTES, LIEUX DE RÉUNION OU DE SÉPARATION D'INTÉGRALES; ÉQUATIONS DE RICCATI ET DE CLAIRAUT, ETC.

361*. — Unité de l'intégrale générale.

Il importe de bien se rendre compte d'une circonstance ([1]) concernant l'expression $f(x, y)$ de y', qui seule rend possibles les réunions ou séparations d'intégrales dont il vient d'être parlé, et qui, montrant le caractère exceptionnel des systèmes de valeurs de x et y pour lesquels ces réunions ou bifurcations se produisent, permet de prouver qu'il n'existe qu'une seule intégrale générale $y = F(x, y_0)$.

Soient x et y un des systèmes de valeurs dont il s'agit, ou (x, y) un point tel qu'il soit possible d'y faire passer deux courbes différentes représentant des intégrales. Si j'appelle y et Y les ordonnées courantes de ces courbes, on aura, par hypothèse, en tous leurs points, $y' = f(x, y)$, $Y' = f(x, Y)$; et, d'ailleurs, la différence $Y - y$ des ordonnées sera nulle pour la valeur de x correspondant au point spécial considéré. Il viendra, par suite, évidemment, en partant de cette valeur spéciale x et s'arrêtant à une valeur infiniment voisine $x + \varepsilon$,

$$(2) \qquad Y - y = \int_x^{x+\varepsilon} (Y' - y')\,dx = \int_x^{x+\varepsilon} [f(x, Y) - f(x, y)]\,dx.$$

Mais la fonction continue $f(x, Y) - f(x, y)$, où y, Y dépendent de x, et qui est nulle à la limite inférieure de l'intégrale, ne peut que varier dans un même sens, ou, autrement dit, s'écarter sans cesse de zéro, pendant que x varie dans l'étendue *infiniment petite* ε. Donc, la plus forte valeur de cette fonction, entre les limites, est celle,

---

([1]) *Voir* la *Partie élémentaire*, p. 180.

$f(x+\varepsilon, Y)-f(x+\varepsilon, y)$, qu'elle prend à la limite supérieure, et le dernier membre de (2) se trouve moindre, en grandeur absolue, que

$$[f(x+\varepsilon, Y)-f(x+\varepsilon, y)] \int_x^{x+\varepsilon} dx = [f(x+\varepsilon, Y)-f(x+\varepsilon, y)]\varepsilon.$$

La relation (2) donne, par conséquent,

$$(3) \qquad \text{(en val. absolue)} \left\{ \begin{array}{l} Y-y<[f(x+\varepsilon, Y)-f(x+\varepsilon, y)]\varepsilon, \\ \text{ou} \qquad \dfrac{f(x+\varepsilon, Y)-f(x+\varepsilon, y)}{Y-y}>\dfrac{1}{\varepsilon}. \end{array} \right.$$

Faisons tendre maintenant ε vers zéro. Le second membre de la dernière inégalité deviendra infini, ainsi que le premier, à plus forte raison; et, d'ailleurs, ce premier membre, qu'on peut écrire $\dfrac{\Delta f(x+\varepsilon, y)}{\Delta y}$ (en posant $\Delta y = Y - y$), tendra vers $\dfrac{df(x, y)}{dy}$. On aura

$$(4) \qquad \frac{df(x,y)}{dy}=\pm\infty \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{f'_y(x,y)}=0.$$

C'est donc *tout au plus pour les systèmes de valeurs de x et y qui rendent infinie la dérivée partielle* $\dfrac{df(x,y)}{dy}=\dfrac{dy'}{dy}$, *ou nul son inverse, que* deux intégrales différentes peuvent *se réunir ou se séparer*. Or égaler à zéro l'inverse de $f'_y(x, y)$, c'est poser entre x et y une certaine relation, qui représente bien une courbe quand on peut en tirer pour y des valeurs finies en fonction de x; mais qui, dépourvue de constante arbitraire, n'exprime jamais une famille de courbes couvrant une partie finie du plan ou permettant de se donner arbitrairement dans un certain intervalle, pour toute valeur x_0 de x choisie comme valeur initiale, la valeur correspondante y_0 de la fonction. Donc, *il n'existe qu'une seule intégrale générale* $y = F(x, y_0)$; *et, quand l'équation* $y' = f(x, y)$ *admet en outre quelque autre intégrale, c'est-à-dire une solution singulière, on l'obtient en cherchant, parmi les valeurs de y, fonctions de x, qui vérifient l'équation* $f'_y(x, y) = \pm\infty$, *s'il en est dont la dérivée égale constamment* $f(x, y)$.

362*. — Calcul direct des solutions singulières et des systèmes de valeurs des variables pour lesquels des réunions ou des séparations d'intégrales sont possibles.

Ainsi les solutions singulières, quand elles existent, se trouvent en résolvant par rapport à y l'équation $f'_y(x, y) = \pm\infty$, sans qu'on ait

besoin d'effectuer aucune intégration. Et lorsque les valeurs en fonction de x ainsi obtenues n'ont pas leur dérivée y' constamment égale à $f(x, y)$, ou qu'elles n'expriment pas des solutions de l'équation proposée $y' = f(x, y)$, elles continuent, du moins, à représenter les seuls systèmes de valeurs de x et y, les seules lignes (*à abscisse x variable*), où puissent venir se raccorder mutuellement diverses intégrales particulières, c'est-à-dire diverses courbes ou branches de courbe de la famille représentée par l'intégrale générale $y = \mathrm{F}(x, y_0)$.

Dans la plupart de ces cas, il est vrai, la fonction $f(x, y)$, qui exprime y', et que nous supposons bien déterminée, comportera cependant, partout ailleurs que sur la ligne $f'_y(x, y) = \pm\infty$, plus d'une valeur; car deux arcs distincts ne peuvent avoir leur terme ou leur origine en chaque point de la ligne $f'_y(x, y) = \pm\infty$ et (comme il arrive généralement) d'un même côté de celle-ci, sans que des croisements s'y produisent dans le voisinage, vu qu'un seul système de pareils arcs suffit pour y couvrir l'espace. Mais les valeurs de y, à adopter pour la formation d'une intégrale ou le tracé d'une courbe, n'en seront pas moins, comme nous l'avons admis, déterminées de proche en proche, sinon par l'équation différentielle toute seule, du moins avec le concours de la loi de continuité.

Celle-ci, en effet, obligera de choisir à chaque instant une valeur de y' *faisant suite* à la précédente, c'est-à-dire n'en différant qu'infiniment peu; de sorte que l'indétermination se produira seulement aux points où deviendront égales deux valeurs de y'. Or ce n'est que sur la ligne même $f'_y(x, y) = \pm\infty$, ou $\dfrac{dy'}{dy} = \pm\infty$, que survient une telle circonstance, quand il s'agit, comme nous l'admettons implicitement, de ces associations de valeurs de y' opérées, en chaque point (x, y), par une équation de la forme $\mathfrak{f}(x, y, y') = 0$, avec premier membre, $\mathfrak{f}(x, y, y')$, fonction continue, et à dérivées partielles premières continues, de x, y, y'. Car, alors, pour une valeur fixée quelconque de x, mais des valeurs variables de y, deux racines y' de l'équation $\mathfrak{f}(x, y, y') = 0$, racines que j'appellerai respectivement y' et $y' + \varepsilon$, ne pourront devenir égales, sans que, ε s'évanouissant, le rapport identiquement nul $\dfrac{\mathfrak{f}(x, y, y' + \varepsilon) - \mathfrak{f}(x, y, y')}{\varepsilon}$ devienne finalement la dérivée partielle $\mathfrak{f}'_{y'}(x, y, y')$. Ainsi, tout point (x, y) où deux racines y' seront égales donnera $\mathfrak{f}'_{y'} = 0$; et comme, de l'équation $\mathfrak{f}(x, y, y') = 0$, où l'on fait varier y et y', il résulte

$$(5)\qquad \frac{d\mathfrak{f}}{dy} + \frac{d\mathfrak{f}}{dy'}\frac{dy'}{dy} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{dy'}{dy} = -\frac{\mathfrak{f}'_y(x, y, y')}{\mathfrak{f}'_{y'}(x, y, y')},$$

on y aura bien, généralement, $\frac{dy'}{dy} = \pm\infty$, ou $f'_y(x, y) = \pm\infty$.

Toute courbe de la famille, dès qu'on l'astreindra à présenter en un de ses points (x_0, y_0), non situé sur la ligne $f'_y(x, y) = \pm\infty$, une pente y'_0 égale à une certaine racine de l'équation proposée $\mathfrak{f}(x_0, y_0, y'_0) = 0$, se trouvera donc parfaitement définie de proche en proche par cette équation différentielle $\mathfrak{f}(x, y, y') = 0$, ou $y' = f(x, y)$, jusqu'au point où elle atteindra la ligne $f'_y(x, y) = \pm\infty$. Mais, à partir de ce point, la suite du tracé ne sera généralement plus déterminée par l'équation différentielle seule; car, d'ordinaire, il y aboutira ou il en partira plusieurs arcs la vérifiant également, soit que certains de ces arcs fassent suite au précédent, sans aucun brusque changement de direction de la tangente, comme il arrive surtout dans le cas d'une enveloppée aboutissant tangentiellement à son enveloppe et qui se continue au delà, où elle est aussi continuée par l'enveloppe même, soit que, au contraire, les arcs dont il s'agit ne soient pas les prolongements les uns des autres, mais, par exemple, émanent du point considéré, ou y aboutissent, suivant la même direction, de manière à ne se faire suite mutuellement, et à ne pouvoir être associés, qu'à la faveur d'un *rebroussement*. La détermination de la courbe devra donc, généralement, aux points où $f'_y(x, y) = \pm\infty$, être complétée par des conditions accessoires, telles que serait la supposition d'une équation *finie* unique $y = F(x, y_0)$ sur toute la longueur, sorte d'extension de la loi de continuité, qui empêcherait de passer d'une enveloppée à l'enveloppe, ou *vice versa*, etc.

363*. — Propriété qu'ont ordinairement ces systèmes de valeurs, de représenter des enveloppes, tangentes ou non à leurs enveloppées exprimées par l'intégrale générale.

La propriété dont jouit la ligne $f'_y(x, y) = \pm\infty$, de fournir tous les points (x, y) de réunion ou de bifurcation des intégrales de l'équation proposée $y' = f(x, y)$, fait, en général, de cette ligne, quand elle existe, ou de certaines de ses branches, une limite séparant la partie du plan couverte par les courbes $y = F(x, y_0)$, de celle qu'elles n'occupent pas, ou, autrement dit, l'*enveloppe* de la famille de courbes, en comprenant, sous ce nom d'*enveloppes*, même des lignes limites non tangentes aux enveloppées.

En effet, observons d'abord que, dans le cas le plus simple, quand une famille de courbes ne couvre pas tout le plan (t. I, p. 195*), ou en partage l'étendue avec d'autres familles, chaque bord du champ

qu'elle occupe constitue une ligne asymptote de la famille, comme le montre (t. I, p. 242*) l'exemple du *faîte* et du *thalweg* des lignes de pente sillonnant un même versant du sol, vues en projection horizontale. Ce cas est bien le plus simple, le plus conforme à l'hypothèse d'une continuité parfaite et d'une complète détermination analytique des courbes, puisqu'il ne s'y produit nulle part de croisements de celles-ci, ni même de réunion ou de séparation de rameaux leur appartenant. Il n'y a donc pas alors d'intégrales singulières, ni de racines égales y' de l'équation $f(x, y, y') = 0$, et, par suite, la courbe $f'_y(x, y) = \pm\infty$ n'existe généralement pas, du moins dans l'étendue considérée.

Mais exceptons ce cas et admettons, par conséquent, que les courbes de la famille $y = \text{F}(x, y_0)$ puissent *atteindre* le bord de l'espace où elles sont contenues. Alors il faudra : 1° ou bien, que ces courbes, en y arrivant, ne cessent pas d'être continues et se prolongent sans déviation sensible, rasant ainsi le bord qui constituera dès lors une *enveloppe* au sens ordinaire et représentera en général une solution singulière de l'équation $y' = f(x, y)$; 2° ou bien, au contraire, que ces courbes y soient discontinues, circonstance impliquant presque toujours (vu la rareté des points d'arrêt et des points anguleux) un renversement brusque de la direction de leur tangente, et qui fera, par suite, du bord, alors ligne de rupture pour les courbes de la famille, le lieu de leurs rebroussements ou des points de soudure de leurs branches interrompues, mais mutuellement tangentes. Or, dans les deux cas, la limite, l'*enveloppe*, se trouve constituée par des points de réunion ou de séparation d'intégrales; d'où il suit qu'elle a bien son équation comprise dans la formule $f'_y(x, y) = \pm\infty$ (¹).

365*. — Des solutions qui rendent infini le facteur intégrant et, notamment, des intégrales soit singulières, soit asymptotes.

La connaissance du facteur d'intégrabilité v (²) ne conduit pas seulement à l'intégrale générale $\varphi(x, y) = c$, dont elle ramène la recherche à l'effectuation de certaines quadratures : elle permet aussi d'obtenir,

---

(¹) Le géomètre philosophe Cournot, Inspecteur général des Études, avait déjà, en 1841, reconnu, sur des équations différentielles du premier ordre et du second degré, ce fait, que la ligne limitant le champ des courbes définies par une telle équation ne leur est généralement pas tangente, mais constitue le plus souvent pour elles un lieu de points de rebroussement (*Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du Calcul infinitésimal,* par M. COURNOT, 1841; t. II, p. 343.)

(²) *Voir* la *Partie élémentaire,* p. 183.

sans sommation d'aucune sorte, certaines solutions de l'équation différentielle proposée $y' - f(x, y) = 0$, mais surtout celles qui ne sont pas comprises dans l'intégrale générale, c'est-à-dire les solutions singulières.

En effet, la première formule (6) [p. 182], en y supposant d'abord y fonction quelconque de x, donne identiquement

$$(7) \qquad y' - f = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dy}} \left(\frac{d\varphi}{dy} y' + \frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{1}{v} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} y' \right) = \frac{1}{v} \frac{d_c \varphi}{dx};$$

et elle montre que l'annulation continue de $y' - f$, c'est-à-dire la vérification, par y, de l'équation différentielle $y' - f(x, y) = 0$, revient à rendre sans cesse nul l'un des deux facteurs du dernier membre, savoir, la dérivée complète de φ, ou l'inverse de la fonction v de x et de y. Or, dans le premier cas, y varie avec x de manière que $d_c \varphi = 0$, ou de manière que le mouvement du point (x, y) se fasse le long d'une des courbes représentées par l'intégrale générale $\varphi(x, y) = c$. Donc il ne reste qu'à poser $\frac{1}{v} = 0$, c'est-à-dire $v = \pm \infty$, si l'on veut pouvoir satisfaire à $y' - f = 0$ autrement que par une des intégrales particulières $y = F(x, y_0)$ de la famille $\varphi(x, y) = c$. Ainsi, *toute solution de l'équation différentielle, qui échappe à l'intégrale générale, rend nécessairement infini, d'une manière continue, le facteur d'intégrabilité;* d'où il suit que les solutions singulières, lorsqu'il y en aura de telles, se trouveront comprises parmi les fonctions y de x obtenues en posant $v = \pm \infty$.

Mais il importe d'observer que cette équation $v = \pm \infty$ pourra donner, en outre, certaines intégrales particulières remarquables.

Supposons, par exemple, le paramètre c *assez bien choisi, pour que son changement* Δc, *entre deux courbes voisines* $\varphi(x, y) = c$ *et* $\varphi(x, y) = c + \Delta c$, donne une idée de leur plus grand écart mesuré parallèlement à l'axe des y, ou *soit de l'ordre de la plus grande différence existant entre les deux fonctions y exprimées par ces courbes ;* et bornons-nous, en conséquence, au cas, le mieux défini dans cette question, où la différence $F(x, y_0 + \Delta y_0) - F(x, y_0)$ de deux intégrales voisines ne dépasse pas, quel que soit x, une certaine limite. Alors le facteur d'intégrabilité v, qui n'est autre que la dérivée $\frac{d\varphi}{dy}$, et qui mesure, en chaque point (x, y) du plan, la rapidité de variation du paramètre $c = \varphi(x, y)$ le long d'un chemin dy parallèle aux y, ne pourra devenir infini qu'aux endroits où les deux courbes séparées

par un pareil élément linéaire dy auront entre leurs deux paramètres c une différence dc infiniment supérieure à dy et, par suite, présenteront quelque part, entre leurs ordonnées, un écart incomparablement plus grand que dy. Ainsi, l'équation $v = \pm\infty$ caractérisera les points du plan où des courbes voisines, de la famille $\varphi(x, y) = c$, éprouveront un *rapprochement relatif* infini. Or si cette circonstance se produit, en une suite de points (x, y), pour des courbes de la famille ayant leur paramètre c bien déterminé, ou, autrement dit, si les valeurs de c y sont finies, la ligne qu'ils jalonneront sera tangente à toutes ces courbes (t. I, p. 182*), qu'elle enveloppera le plus souvent (t. I, p. 185*) : elle représentera donc, en général, une solution singulière, conformément au résultat de la démonstration précédente. Mais si, au contraire, la dérivée v de φ en y n'est infinie, aux points (x, y) considérés, que parce que la fonction $c = \varphi(x, y)$ s'y trouve infinie elle-même, cas où des courbes $c = \varphi(x, y)$ *déterminées,* c'est-à-dire à paramètre c fini, ne peuvent pas atteindre ces points (x, y), mais seulement en approcher autant qu'on veut, la branche correspondante de la ligne $v = \pm\infty$ sera évidemment une *courbe asymptote* de la famille (t. I, p. 191*), qu'il lui arrivera souvent d'envelopper, comme on a vu ci-dessus (pp. 232* et 233*). Réciproquement, toute courbe asymptote de la famille s'obtiendra (t. I, p. 192*) en posant $c = \varphi(x, y) = \pm\infty$, et aussi, par suite, sur toute sa longueur, $\frac{dc}{dy} = \frac{d\varphi}{dy} = v = \pm\infty$.

On voit donc que l'équation $v = \pm\infty$ fournira, outre les solutions singulières, les intégrales particulières *extrêmes* ou limites données par l'hypothèse $c = \pm\infty$, et qui comprennent les systèmes de valeurs de x et y auprès desquels, sans qu'ils appartiennent à des solutions singulières, les intégrales éprouvent des rapprochements relatifs aussi grands que l'on veut. Les lignes représentées par ces solutions étant des courbes asymptotes de la famille, du moins dans la supposition faite de différences $F(x, y_0 + \Delta y_0) - F(x, y_0)$ partout limitées entre ordonnées y de courbes voisines, il est naturel d'appeler *intégrales asymptotes* (1), ces solutions $c = \pm\infty$ elles-mêmes.

366*. — Analogies des intégrales singulières et des intégrales asymptotes ; plus grande fréquence de celles-ci.

Ce n'est pas seulement par la propriété de rendre le facteur d'intégrabilité infini (sous les réserves indiquées) et par celle d'envelopper le

(1) Comme je l'ai fait dès 1878.

plus souvent le champ d'une même famille d'intégrales partout contiguës chacune à la suivante, que les solutions asymptotes se montrent analogues aux solutions singulières. Leur asymptotisme même, c'est-à-dire le rapprochement *indéfini* qu'elles présentent, *sur tout leur cours*, avec les autres intégrales d'une même famille, savoir, avec chacune à tour de rôle, et successivement avec toutes, en fait le lieu de réunion ou de bifurcation de celles-ci, non pas, il est vrai, d'une manière absolument rigoureuse, ce qui n'appartient qu'aux solutions singulières ou plus généralement à la courbe $\frac{dy'}{dy} = f'_y(x, y) = \pm\infty$, mais avec une approximation indéfinie, équivalant à l'exactitude au point de vue pratique. Et on le voit, en effet, par l'exemple des *faîtes* et des *thalwegs* du sol, expressions d'intégrales bien plus souvent asymptotes que singulières de l'équation différentielle des lignes de plus grande pente, qui s'en détachent ou s'y réunissent *sensiblement*. Grâce à cet important caractère, les intégrales asymptotes tiennent, en quelque sorte, le milieu entre les intégrales particulières ordinaires et les solutions singulières, qu'elles suppléent ainsi dans une certaine mesure, comme voies de communication continues entre les intégrales particulières, quand l'absence de valeurs infinies de la dérivée $f'_y(x, y)$ pour des valeurs finies de x et y met obstacle à l'existence mathématique ou parfaite de pareilles voies.

C'est précisément la vérification inévitable par les solutions singulières, de la condition $f'_y(x, y) = \pm\infty$, qui rend ces solutions beaucoup plus rares, dans l'Analyse, que les intégrales asymptotes. Car une telle condition, bien que compatible avec la graduelle variation de la fonction même $y' = f(x, y)$, ne l'est pas avec celle de ses dérivées en y; d'où une restriction suffisante pour l'empêcher de se produire dans les cas de continuité parfaite, qui sont les plus simples.

S'il s'agit, par exemple, de l'équation différentielle $y' = \frac{q}{p}$ des lignes de pente, sur une surface dont l'ordonnée verticale $z = \mathrm{f}(x, y)$ a pour dérivées partielles p et q, l'expression $f'_y(x, y)$, ou $\frac{d}{dy}\left(\frac{q}{p}\right)$, ne sera infinie en un point (x, y) [dans l'hypothèse $p \gtrless 0$, permise, sauf en un sommet, moyennant un choix convenable de l'axe des x], que si l'une des dérivées secondes t, s de z devient infinie, ce qui rendra évidemment infinies l'une au moins des deux courbures principales de la surface en (x, y, z) et, par suite, la courbure de presque toutes les lignes de la surface qui s'y croisent. Il faudra donc, pour qu'un faîte ou un thalweg exprime une intégrale singulière, ou soit atteint tan-

gentiellement, et non *asymptotiquement*, par les lignes de pente voisines, que, sur toute sa longueur, des sections transversales faites dans la surface aient leur rayon de courbure nul : circonstance évidemment exceptionnelle, quoique n'impliquant aucune discontinuité du plan tangent, ou l'existence d'aucune *arête*.

On le voit aisément dans le cas d'une surface cylindrique (*montagne* ou *vallée* aussi simple que possible) ayant ses génératrices, de pente a, parallèles au plan des zx, ou représentées par l'équation $z = ax +$ const., avec une directrice, dans le plan des zy, exprimée par une relation de la forme $z = by^n$ et symétrique de part et d'autre de l'axe vertical des z; en sorte que son faîte ou thalweg soit évidemment, en projection horizontale, la droite $y = 0$, c'est-à-dire l'axe même des x. Comme, dans l'équation $z = ax +$ const. d'une génératrice, la constante, valeur de z pour $x = 0$, devra être by^n, la relation représentant la surface sera $z = ax + by^n$, et il viendra, pour l'équation différentielle $y' = \frac{q}{p}$ des lignes de pente,

$$(8) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{bn}{a} y^{n-1} \qquad \text{ou} \qquad dx = \frac{a}{bn} y^{1-n} dy.$$

En intégrant à partir du point, dont j'appellerai x_0 l'abscisse, où une ligne de pente considérée se détache du faîte ou aboutit au thalweg, jusqu'au point (x, y) où son écart d'avec cette ligne, en projection horizontale, prend la valeur quelconque y, il vient

$$(9) \qquad x - x_0 = \frac{a}{bn} \int_0^y y^{1-n} dy = \frac{a}{bn} \left(\frac{y^{2-n}}{2-n} \right)_0^y.$$

L'intégrale qui exprime la distance $x - x_0$, suivant les x, employée à produire l'écart y, est donc *finie*, à la condition nécessaire et suffisante que l'exposant n, dans l'équation $z = by^n$ d'une section transversale, n'atteigne pas la valeur 2 ; ce qui exige bien que, pour $y = 0$, la courbure de cette section soit *infinie*, mais sans rebroussement ni discontinuité de la tangente tant que n surpasse l'unité. Si, par exemple, l'équation de cette section est $z^3 = b^3 y^4$, ou, celle de la surface,

$$(10) \qquad (z - ax)^3 = b^3 y^4, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad z = ax + by^{\frac{4}{3}},$$

il vient $n = \frac{4}{3}$ et, la relation (9) devenant

$$(11) \qquad x - x_0 = \frac{9a}{8b} y^{\frac{2}{3}} \qquad \text{ou} \qquad y^2 = \left(\frac{8b}{9a}\right)^3 (x - x_0)^3,$$

les lignes de plus grande pente sont, en projection horizontale, des secondes paraboles cubiques, qui se raccordent bien à distance assignable, savoir, en leur point de rebroussement, avec le faîte ou thalweg $y=0$, leur axe de symétrie.

Dans le cas, que l'on doit regarder comme ordinaire, d'une courbure finie de la section transversale en son sommet $y=0$, la parabole $z=ay^n$ est du second degré. On a donc $n=2$, et la seconde équation (8) intégrée donne, en appelant $-\frac{a}{2b}\log\frac{aC}{2b}$ une constante arbitraire,

$$(12)\qquad x=\frac{a}{2b}\log y-\frac{a}{2b}\log\frac{aC}{2b}=\frac{a}{2b}\log\frac{2by}{aC},\quad \text{ou}\quad \frac{2by}{a}=Ce^{\frac{2bx}{a}}.$$

Comme un choix convenable de l'unité de longueur permettra évidemment de remplacer $\frac{2bx}{a}$ et $\frac{2by}{a}$ par les quantités proportionnelles x et y, l'équation (12) des lignes de plus grande pente, simplifiée autant que possible, sera $y=Ce^x$. Ces lignes ne diffèrent donc pas, toujours en projection horizontale, de la famille de logarithmiques étudiée à la fin de la XIVème Leçon (t. I, p. 196*) et qui a bien l'axe des x pour ligne asymptote, comme nous l'avons reconnu au même endroit.

369*. — Absence d'intégrales singulières et d'intégrales asymptotes distinctes, dans l'équation linéaire.

Le facteur intégrant de l'équation linéaire $y'+Py=Q$ étant la quantité $e^{\int P dx}$, qui dépend de x seul, la relation qu'on obtient en l'égalant à l'infini revient à poser $\int P dx=\infty$, équation vérifiée tout au plus pour les valeurs de x qui rendent infinie la fonction P, mais non par aucune fonction y de x. L'équation linéaire n'admet donc pas de solution singulière; ce que l'on déduirait aussi de l'expression, $-P$, de la dérivée $\frac{dy'}{dy}$, où y' est ici $-Py+Q$, dérivée nécessairement infinie pour tous les systèmes de valeurs x et y correspondant à une solution singulière.

Observons d'ailleurs que l'expression générale (21) de y [p. 186], étant linéaire par rapport à la constante arbitraire c, donne, lorsqu'on y augmente cette constante de Δc pour obtenir l'écart ou la différence de deux intégrales particulières voisines, $\Delta y=e^{-\int P dx}\Delta c$, expression absolument indépendante de c ou faisant varier en fonction de x, dans le même rapport $e^{-\int P dx}$, les écarts mutuels des diverses intégrales particulières, qui, par suite, se rapprochent ou s'éloignent toutes à la fois.

Si donc chaque écart Δy a un maximum que l'on puisse prendre comme terme de comparaison pour Δy, ce maximum se produira pour une même valeur de la variable, quelle que soit l'intégrale particulière d'où l'on part, et l'écart relatif obtenu ne sera infiniment petit *sur tout le cours* d'aucune intégrale : il n'y aura donc pas de solution asymptote. Ce cas se présente, par exemple, quand $P = 2x$; d'où il résulte $\Delta y = e^{-x^2}\Delta c$, expression qui atteint sa plus grande valeur absolue, Δc, pour $x = 0$. L'écart *relatif* de deux intégrales quelconques est donc alors le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta c}$, ou e^{-x^2}, fonction de x seul, évanouissante quand $x = \pm\infty$, mais non pour un système spécial de valeurs de y propre à définir une solution asymptote, c'est-à-dire correspondant à une suite continue de valeurs finies de x.

Si, au contraire, la fonction $e^{-\int P dx}$ peut grandir au delà de toute limite, deux intégrales ne présentant, pour Δc assez faible et pour une valeur assignée quelconque de x, qu'un écart $e^{-\int P dx}\Delta c$ insensible, c'est-à-dire inférieur à telle petite quantité donnée qu'on voudra, offriront entre elles, au contraire, un écart notable, aussi grand même qu'on le voudra, pour d'autres valeurs de x, prises suffisamment voisines de celles qui rendent infinie positive l'expression $-\int P\,dx$. Donc chaque intégrale particulière pourra être dite *asymptote*, c'est-à-dire être considérée jusqu'à un certain point, sur tout son parcours, comme un lieu de réunion ou de séparation d'intégrales. Mais, par le fait même, il n'y aura encore pas d'intégrale asymptote *distincte*, aucune ne l'étant plus que les autres.

Cela arrive, par exemple, quand l'équation est simplement $y' = y$ et que, par suite, $y = ce^x$, ou, aussi, quand $y' = -\frac{y}{x}$ $\left(\text{d'où } y = \frac{c}{x} \text{ ou } xy = c\right)$, cas où ce n'est plus pour $x = \infty$, mais bien pour $x = 0$, que la fonction y devient infinie. On reconnaîtrait d'ailleurs aisément que, dans ce dernier exemple, où les courbes représentées par l'intégrale générale sont des hyperboles équilatères, comme dans le précédent où c'étaient des logarithmiques (t. I, p. 197*), la famille comprend une véritable et unique courbe asymptote, obtenue en faisant $c = 0$, c'est-à-dire $xy = 0$, et composée par conséquent des deux asymptotes rectilignes de la famille. Il suffirait, pour cela, d'observer que, d'après une propriété caractéristique du paramètre différentiel du premier ordre Δ_1 de toute fonction de point, telle que $c = xy$, la plus courte distance dl de deux courbes voisines à paramètres c et $c + dc$ se trouve donnée, en chaque point (x, y) de l'une

d'elles, quand les axes sont rectangles, par la relation $\frac{dc}{dl} = \Delta_1 c$ ou $dl = \frac{dc}{\Delta_1 c}$, qui, vu l'expression actuelle $\Delta_1(xy) = \sqrt{y^2 + x^2}$ de $\Delta_1 c$, devient ici

$$dl = \frac{dc}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{dc}{\sqrt{(x \mp y)^2 \pm 2xy}} = \frac{dc}{\sqrt{(x \mp y)^2 \pm 2c}}.$$

L'écart absolu dl a donc pour maximum, entre deux mêmes hyperboles, sa valeur $\frac{dc}{\sqrt{\pm 2c}}$ correspondant à $y = \pm x$; et l'*écart relatif*, quotient de l'écart absolu par ce maximum, est $\sqrt{\frac{\pm 2c}{x^2+y^2}} = \sqrt{\frac{\pm 2xy}{x^2+y^2}}$, fonction s'annulant bien quand $xy = 0$.

370*. — Simplification d'une équation quadrinôme et sa réduction, dans certains cas, à l'équation trinôme de Bernoulli : équation de Riccati.

Pour aborder des équations plus complexes que celle de Jacques Bernoulli, les successeurs de ce géomètre ont ajouté au second membre de son équation un terme, R, fonction de x seul; ce qui leur a donné le nouveau type, à quatre termes au lieu de trois,

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n + R; \tag{27}$$

mais ils n'ont pu réussir à y séparer les variables que dans des cas très particuliers. Il est bon cependant de connaître quelques simplifications qu'ils y ont opérées.

La principale, également utile dans d'autres questions (¹), et dont le but ici est de faire disparaître le second terme, consiste à poser $y = \alpha Y$, Y étant une nouvelle fonction inconnue destinée à remplacer y, tandis que α désigne une fonction spéciale de x, à choisir en vue de la réduction projetée. Comme le premier membre $y' + Py$ de (27) devient alors $\alpha Y' + (\alpha' + P\alpha)Y$, il suffit, en effet, d'y poser $\alpha' + P\alpha = 0$, c'est-à-dire de prendre $\alpha = e^{-\int P dx}$, pour faire disparaître le second terme, et l'équation (27), divisée par la fonction α ainsi déterminée, se trouve réduite à $Y' = Q\alpha^{n-1}Y^n + \frac{R}{\alpha}$. Elle est donc bien encore de la forme (27), mais sans second terme; et nous pourrons l'écrire désor-

---

(¹) *Voir* plus loin les nos 384* et 385*.

mais, en modifiant les notations,

$$\text{(28)} \qquad \frac{dy}{dx} = Qy^n + R.$$

Une nouvelle réduction consistera à y faire disparaître la fonction Q par un changement de la variable indépendante, savoir, en y supposant y exprimé en fonction non de x, mais, par exemple, de la quantité t que définit la relation $t = -\int Q\,dx$, de manière à avoir $\frac{dt}{dx} = -Q$, et, par suite, de manière que $\frac{dy}{dx}$, égal à $\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$, devienne $-Q\frac{dy}{dt}$. L'équation (28), divisée par $-Q$, est alors $\frac{dy}{dt} = -y^n - \frac{R}{Q}$; et, en y supposant le dernier terme exprimé en fonction de t, puis appelant encore R ce terme ainsi modifié et x la nouvelle variable t, il vient, en définitive,

$$\text{(29)} \qquad \frac{dy}{dx} + y^n = R.$$

Donc, non seulement l'équation (27) a perdu un terme; mais, de plus, une seule fonction de x, désignée par R, y remplace les trois fonctions données P, Q, R de la variable primitive.

Quand on pose, dans (29), $n = 2$, valeur la plus simple possible de cet exposant, et qu'on y prend R de la forme monôme ax^m, cette relation, devenue

$$\text{(30)} \qquad \frac{dy}{dx} + y^2 = ax^m,$$

s'appelle *équation de Riccati*, du nom du géomètre italien qui l'a étudiée le premier, vers 1720. Mais on n'est parvenu à l'intégrer, sauf en série ou par des intégrales définies (comme nous verrons au n° **417***), que pour certaines valeurs négatives de m, telles, que l'on sache alors, ou directement, ou par des transformations successives (qui séparent du reste les variables), former une intégrale particulière de l'équation. Cette intégrale, que j'appellerai $f(x)$, est une expression algébrique (rationnelle sinon toujours en x, du moins par rapport à une racine de x), formée par conséquent de manière que la somme $f'(x) + f(x)^2$ se réduise à un monôme auquel on prend justement égal le second membre ax^m de l'équation. Par exemple, les trois fonctions

$$f(x) = \text{une constante } \sqrt{a}, \quad f(x) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}\right)\frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{a}}{x^2},$$

donnent à la somme $f'(x)+f(x)^2$ les trois valeurs a, ax^{-2}, ax^{-4}, ce qui en fait des intégrales particulières de (30) dans les trois cas respectifs (les plus simples et les seuls d'intégrabilité où l'exposant m soit entier) $m=0$, $m=-2$, $m=-4$. Or, dans tous ces cas où l'on connaît ainsi une intégrale particulière $y=f(x)$ de l'équation de Riccati, il est facile d'en effectuer ou, du moins, d'en ramener à des quadratures, l'intégration générale.

En effet, dès que l'on connaît une solution $y=f(x)$ de l'équation (30), prise même avec un second membre R fonction quelconque de x, au lieu de ax^m, et sous la forme non réduite

$$(31)\qquad \frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=\mathrm{Q}y^2+\mathrm{R},$$

qui résulte de (27) par l'unique supposition $n=2$, l'intégration complète de cette équation (31) se ramène immédiatement à celle d'une équation de Bernoulli et, par conséquent, à deux quadratures. On le voit en remplaçant, dans (31), R par sa valeur

$$f'(x)+\mathrm{P}f(x)-\mathrm{Q}f(x)^2,$$

que donne la substitution de $f(x)$ à y. Il vient alors

$$\frac{d}{dx}[y-f(x)]+\mathrm{P}[y-f(x)]=\mathrm{Q}[y^2-f(x)^2]=\mathrm{Q}[y-f(x)][y+f(x)].$$

Adoptons-y pour nouvelle fonction à déterminer la différence $y-f(x)$, seule inconnue qui figure dans le premier membre. En l'appelant u, ou posant $y=f(x)+u$, le troisième membre égalera $\mathrm{Q}u[u+2f(x)]$; et l'équation obtenue, écrite

$$(32)\qquad \frac{du}{dx}+[\mathrm{P}-2\mathrm{Q}f(x)]u=\mathrm{Q}u^2,$$

rentrera bien dans le type (22) [p. 187] de celle de Bernoulli, réduit même au cas $n=2$.

371*. — Troisième type : équations qui s'intègrent par différentiation, comme celle de Clairaut.

Considérons enfin, comme dernier exemple général, une équation différentielle en x, y et y', non résolue par rapport à y', contrairement à ce que nous admettions jusqu'ici, mais résolue, ou aisée à résoudre, par rapport à l'une des deux variables x et y, dont chacune peut être prise comme variable indépendante (sauf à remplacer, s'il le

faut, y' ou $\frac{dy}{dx}$ par l'inverse de $\frac{dx}{dy} = x'$). Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait choisi comme fonction inconnue y celle des deux variables par rapport à laquelle l'équation a été ou résolue, ou du moins ramenée au premier degré; et prenons, par conséquent, celle-ci sous la forme

$$(33) \qquad ay = f(x,y'),$$

a désignant un coefficient constant, réductible à l'unité, sauf dans le cas exceptionnel (mais digne de remarque) où il s'annule.

Différentions cette équation (33) et observons que y' est, comme y, une certaine fonction de x. Il viendra

$$(34) \quad ay' = \frac{df(x,y')}{dx} + \frac{df(x,y')}{dy'}\frac{dy'}{dx}, \quad \text{ou} \quad \frac{dy'}{dx} = \frac{ay' - f'_x(x,y')}{f'_{y'}(x,y')},$$

équation différentielle, en x et y', *qui se trouve,* comme on voit, *toute résolue par rapport à la dérivée de* y', et qui est, par suite, du moins à ce point de vue, beaucoup plus simple que la proposée (33) en x et en y. Si on sait l'intégrer, et qu'on obtienne ainsi, en fonction de x, l'expression générale de y' affectée d'une constante arbitraire c, cette expression de y', substituée dans (33), où je supposerai a différent de zéro, donnera la formule cherchée de y.

Clairaut a eu le premier, en 1734, cette ingénieuse idée de faciliter ainsi l'intégration de certaines équations différentielles en les différentiant, opération qu'on aurait cru plutôt devoir éloigner du but. Il l'a appliquée à l'équation, qui porte son nom,

$$(35) \qquad y = y'x + \varphi(y'),$$

où φ désigne une fonction quelconque d'une seule variable. Cette équation, différentiée, donne $y' = y' + [x + \varphi'(y')]\frac{dy'}{dx}$, c'est-à-dire, en supprimant le terme commun y' et multipliant par dx,

$$(36) \qquad [x + \varphi'(y')]\,dy' = 0.$$

Un facteur d'intégrabilité est évidemment l'inverse de $x + \varphi'(y')$; et son emploi conduit à l'équation simple $dy' = 0$. L'intégrale générale de celle-ci étant $y' = c$, la valeur c de y', portée dans (35), donne

$$(37) \qquad y = cx + \varphi(c),$$

équation du premier degré en x et y. Donc l'intégrale générale (37) de l'équation proposée (35) représente une famille de lignes droites.

Mais la relation (36) est aussi vérifiée en annulant l'inverse, $x + \varphi'(y')$, du facteur d'intégrabilité, ce qui conduit, comme nous le savons, à la solution singulière. Effectivement, si l'on tire y' de l'équation $x + \varphi'(y') = 0$ pour en porter la valeur dans (35), ou, vu la possibilité d'appeler c la quantité y' qu'on élimine, si l'on tire c de l'équation $x + \varphi'(c) = 0$, pour en substituer la valeur dans (37), on fait précisément les calculs qui arriveraient à déterminer l'enveloppe de la famille des droites (37), puisqu'on élimine c entre l'équation (37) et l'équation $\frac{dy}{dc} = 0$, c'est-à-dire $x + \varphi'(c) = 0$. Ainsi, la courbe lieu des points (x, y) représentés par l'équation résultante n'est autre que l'enveloppe de la famille (37) de droites, conformément à ce que nous avons observé plus haut (p. 233*), que la solution singulière correspond bien à l'enveloppe de la famille de lignes exprimée par l'intégrale générale.

On voit que l'équation de Clairaut était très propre à mettre en vue l'existence des solutions singulières, ainsi que leur importante propriété géométrique (qui en fait le lieu des réunions ou des séparations d'intégrales) et leur rapport intime avec les facteurs d'intégrabilité. Aussi a-t-elle été, au XVIII[e] siècle, un des premiers exemples qui appelèrent l'attention des géomètres sur ces solutions, dont la découverte se trouvait, il est vrai, déjà comprise implicitement dans celle des courbes enveloppes faite par Leibnitz vers la fin du siècle précédent.

COMPLÉMENT A LA TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

SUR LES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES OU D'ORDRE SUPÉRIEUR; CERTAINS CAS D'ABAISSEMENT DE CES DERNIÈRES ÉQUATIONS; ETC.

373*. — Unité du système des intégrales générales; possibilité de quelques intégrales singulières et calcul direct de celles-ci.

L'exemple de l'équation unique du premier ordre et de ses solutions singulières prouve qu'il peut y avoir quelquefois, à partir d'un même système de valeurs x, y, z, u, ..., plusieurs intégrales possibles, c'est-à-dire, outre les fonctions y, z, u, ... dont il vient d'être parlé [1], d'autres fonctions Y, Z, U, ..., de x, satisfaisant également aux équations (1) [p. 189],

$$y' = f_1(x, y, z, u, \ldots), \quad z' = f_2(x, y, z, u, \ldots), \quad u' = f_3(x, y, z, u, \ldots), \quad \ldots$$

Il importe de démontrer que ces valeurs, tout comme dans le cas d'une équation unique, sont exceptionnelles, et qu'il n'existe, par suite, qu'un seul système d'intégrales générales. A cet effet, reprenons la démonstration donnée dans la dernière Leçon (p. 229*). Observons qu'on aura, d'après les mêmes équations (1),

$$Y' = f_1(x, Y, Z, U, \ldots), \quad Z' = f_2(x, Y, Z, U, \ldots), \quad U' = f_3(x, Y, Z, U, \ldots), \quad \ldots$$

depuis la valeur x, pour laquelle Y, Z, U, ... se confondent avec y, z, u, ..., jusqu'à une valeur très voisine $x + \varepsilon$; et il viendra

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} Y - y &= \int_x^{x+\varepsilon} [f_1(x, Y, Z, \ldots) - f_1(x, y, z, \ldots)]\, dx, \\ Z - z &= \int_x^{x+\varepsilon} [f_2(x, Y, Z, \ldots) - f_2(x, y, z, \ldots)]\, dx, \text{ etc.} \end{aligned} \right.$$

Mais il est encore évident que, dans ces équations, les fonctions pla-

---

(1) *Voir* la *Partie élémentaire*, p. 190.

cées sous les signes $\int$ ne peuvent que varier toujours dans un même sens entre les limites x et $x+\varepsilon$, dont l'intervalle est, pour ainsi dire, infiniment petit; en sorte que, s'annulant à la première de ces limites, elles reçoivent leurs plus grandes valeurs absolues à la limite $x+\varepsilon$. On aura donc, par exemple,

$$\text{(en val. abs.)}\quad \left\{\begin{array}{l} Y-y < [f_1(x+\varepsilon, Y, Z, \ldots)-f_1(x+\varepsilon, y, z, \ldots)] \displaystyle\int_x^{x+\varepsilon} dx \\ \quad\text{ou}\quad Y-y < [f_1(x+\varepsilon, Y, Z, \ldots)-f_1(x+\varepsilon, y, z, \ldots)]\varepsilon, \end{array}\right.$$

et cette inégalité, avec les autres analogues, donnera, *à moins que les différences* $Y-y$, $Z-z$, ... *ne soient nulles*,

$$(4)\quad \text{(en val. abs.)}\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{f_1(x+\varepsilon, Y, Z, \ldots)-f_1(x+\varepsilon, y, z, \ldots)}{Y-y} > \dfrac{1}{\varepsilon}, \\ \dfrac{f_2(x+\varepsilon, Y, Z, \ldots)-f_2(x+\varepsilon, y, z, \ldots)}{Z-z} > \dfrac{1}{\varepsilon}, \text{ etc.} \end{array}\right.$$

Si, actuellement, ε et, par suite, $Y-y$, $Z-z$, ... tendent vers zéro, les seconds membres de (4) deviendront infinis et il en sera de même, à plus forte raison, des premiers. C'est dire que les variations éprouvées par les fonctions $f_1, f_2, \ldots$, quand les variables $y, z, u, \ldots$ y reçoivent les accroissements évanouissants $Y-y$, $Z-z$, $U-u$, ... (dont un au moins diffère d'abord de zéro), sont infiniment moins petites que ceux-ci : circonstance qui serait évidemment impossible si toutes les dérivées partielles premières des fonctions $f_1, f_2, \ldots$ en $y, z, u, \ldots$ étaient finies et si, par suite, les différentielles considérées de $f_1, f_2, \ldots$ se trouvaient seulement comparables à la plus grande des différentielles $Y-y$, $Z-z$, ...

Donc, *les seules valeurs de $x, y, z, u, \ldots$ à partir desquelles il puisse exister plusieurs intégrales du système proposé d'équations différentielles* (*résolu par rapport aux dérivées $y', z', u', \ldots$*) *sont celles qui rendent infinie une au moins des dérivées partielles premières des seconds membres $f_1, f_2, \ldots$ de ces équations par rapport aux fonctions inconnues $y, z, \ldots$.* Or ce seront évidemment des valeurs trop spéciales, pour qu'on trouve à choisir arbitrairement, parmi elles, $y_0, z_0, u_0, \ldots$, quand x est la quantité, prise également à volonté, qu'on appelle x_0. En d'autres termes, *il n'existe aucun autre système d'intégrales générales que le système* (2) [p. 190] *et toutes les solutions singulières, ou non comprises dans ces intégrales, que peuvent admettre les équations proposées, s'obtiendront en égalant*

à l'infini les dérivées partielles des seconds membres de ces équations par rapport à y, z, u, ...

375*. — **Propriété qu'ont les solutions singulières et, sous certaines conditions, les solutions asymptotes, de rendre infinis un ou plusieurs des facteurs d'intégrabilité.**

Il est bon de remarquer qu'il n'y a qu'un seul cas où l'on n'ait pas le droit de multiplier, comme on l'a fait au numéro précédent (*Partie élémentaire,* p. 191), les équations proposées $dy - f_1\,dx = 0$, $dz - f_2 dx = 0$, ..., par les facteurs $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, ..., et puis de les ajouter pour en déduire l'équation $d\varphi = 0$: c'est le cas où l'un au moins des facteurs considérés est infini d'une manière continue, c'est-à-dire pour les valeurs successives considérées de x, y, z, u, ... Donc, toutes fonctions y, z, u, ... de x qui satisfont aux équations proposées $dy - f_1 dx = 0$, $dz - f_2 dx = 0$, ..., vérifient également la relation $d\varphi = 0$ et aussi, par suite, l'équation intégrale $\varphi = c$, à moins qu'elles ne rendent sans cesse infini quelqu'un des facteurs d'intégrabilité correspondants $\frac{d\varphi}{d(y, z, u, \ldots)}$. En conséquence, *les solutions singulières que peut admettre le système proposé, et qui échappent à une intégrale générale $\varphi = c$, s'obtiendront en égalant à l'infini les divers facteurs d'intégrabilité employés pour former cette intégrale.*

Les solutions singulières ne sont, d'ailleurs, pas les seules auxquelles on parvienne généralement en égalant ainsi à l'infini les facteurs d'intégrabilité. Les intégrales que j'appelle *asymptotes*, c'est-à-dire dans le voisinage desquelles se trouvent, pour une valeur désignée quelconque de x, certaines intégrales particulières y différant entre elles incomparablement moins qu'elles ne le font pour d'autres valeurs de x, s'obtiendront en même temps, comme dans le cas d'une équation différentielle unique (p. 235*) ou d'une simple famille de courbes planes, *si du moins* les n constantes c ont pu être *choisies* de manière que leurs petits changements Δc soient de l'ordre des écarts Δy, Δz, Δu, ... *les plus grands* entre les deux fonctions correspondantes y, ou z, ou u, etc. Partout, en effet, où, dans ces conditions, des intégrales voisines seront infiniment plus proches qu'ailleurs, leurs écarts mutuels Δy, Δz, Δu, ... se trouveront tous infiniment moindres que la différence Δc éprouvée de l'une à l'autre par leur paramètre c, qu'exprime la fonction $\varphi(x, y, z, u, \ldots)$; ce qui, évidemment, ne pourrait avoir lieu pour des valeurs de x, y, z, u, ... ren-

dant finies toutes les dérivées partielles premières de φ en $y, z, u, \ldots$ et donnant sensiblement une expression de Δc,

$$\Delta c = \frac{d\varphi}{dy}\Delta y + \frac{d\varphi}{dy}\Delta z + \ldots,$$

seulement comparable à la plus grande des quantités Δy, $\Delta z, \ldots$.

On voit, par tout ce qui précède, comment les propriétés générales de l'équation différentielle du premier ordre s'étendent à un système de telles équations simultanées.

378*. — Sur les solutions singulières des équations différentielles d'ordre supérieur.

Observons que l'identité (12) ([1]), où le second membre $d\varphi$ est une différentielle complète $d_c\varphi$, revient, en la divisant par $\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}dx$, à écrire

$$(13) \qquad y^{(n)} - f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}}\,\frac{d_c\varphi}{dx}.$$

On peut donc satisfaire à l'équation proposée $y^{(n)} - f = 0$, soit en annulant $\frac{d_c\varphi}{dx}$ ou posant $\varphi = c$, ce qui donne l'intégrale générale première considérée, soit en égalant à zéro l'inverse du facteur $\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}$ d'intégrabilité, c'est-à-dire en égalant à l'infini ce facteur, pourvu que, du moins, il résulte de l'équation ainsi écrite, $\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}} = \pm\infty$, une expression de y, en fonction de x, capable de donner $y^{(n)} - f = 0$, comme il arrivera si cette expression ne rend pas infinie la dérivée complète $\frac{d_c\varphi}{dx}$. Or, égaler ainsi à zéro l'inverse du facteur $\frac{d\varphi}{dy^{(n-1)}}$, qui est une fonction explicite, censée connue, de $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, cela équivaut évidemment à poser une certaine équation différentielle d'ordre $n-1$ en y, sans constante arbitraire, équation dont l'intégrale générale, annulant $y^{(n)} - f$ autrement que dans l'hypothèse $\varphi = \text{const.}$, sera évidemment, malgré ses $n-1$ constantes arbitraires, la solution singulière de la proposée $y^{(n)} - f = 0$. Par conséquent, *dans une équation différentielle d'ordre supérieur, la solution singulière, quand elle existe, contient généralement des*

([1]) *Voir* la *Partie élémentaire*, p. 194.

constantes arbitraires, mais jamais autant que l'intégrale générale; et on la trouve par l'intégration de l'équation obtenue en égalant à l'infini le facteur d'intégrabilité qui conduit à une intégrale générale première.

382*. — Exemples des cas les plus simples d'abaissement : courbe plane ayant sa courbure fonction soit de la distance à une droite fixe, soit de la normale ; courbe élastique.

Comme exemple du premier cas d'abaissement ([1]), proposons-nous de trouver l'équation finie $y=f(x)$ d'une ligne plane dont la courbure, $\pm(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}y''$, en chacun (x, y) de ses points, égale une fonction donnée $\varphi(x)$ de l'abscisse, distance à une droite également donnée choisie comme axe des y; ce qui, par une rotation arbitraire α des axes rectangles des x et des y autour de l'origine (rotation où l'abscisse actuelle x devient $x\cos\alpha - y\sin\alpha$), comprend le cas d'une courbure ayant pour expression $\varphi(x\cos\alpha - y\sin\alpha)$ et, par suite, fonction arbitraire donnée d'une expression linéaire quelconque $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}$, toujours susceptible en effet, grâce à un choix convenable de deux constantes k et α, de recevoir la forme

$$(k\cos\alpha)x+(-k\sin\alpha)y+\mathrm{C},$$

où l'unique variable est bien $x\cos\alpha - y\sin\alpha$.

L'équation différentielle du problème posé sera donc

$$(16)\qquad \pm(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}y''=\varphi(x)\quad \text{ou}\quad \pm(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}dy'=\varphi(x)dx.$$

Comme elle ne contient pas y, le choix de y' en qualité de fonction inconnue provisoire l'abaisse au premier ordre; et l'on voit même, après sa multiplication par dx, que les variables y sont séparées. La différentielle binôme $(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}dy'$ rentrant d'ailleurs dans le second cas d'intégrabilité (p. 53), l'adoption de $y'^{-2}+1$ comme variable auxiliaire donne aisément

$$\int(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}dy'=(y'^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

ce que montre après coup la différentiation immédiate du résultat : et il vient, pour l'intégrale première de (16), avec une constante arbi-

---

([1]) *Voir* la *Partie élémentaire*, p. 198.

traire supposée implicitement par le signe $\int$ du second membre (c'est-à-dire inutile à écrire),

$$(17)\qquad \pm(y'^{-2}+1)^{-\frac{1}{2}} = \int\varphi(x)\,dx;\quad \text{d'où}\quad y' = \frac{\int\varphi(x)\,dx}{\pm\sqrt{1-[\int\varphi(x)\,dx]^2}}.$$

On tire de cette dernière, pour l'élément, $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$, de l'arc s de la courbe, l'expression (où le radical impliquera le double signe $\pm$),

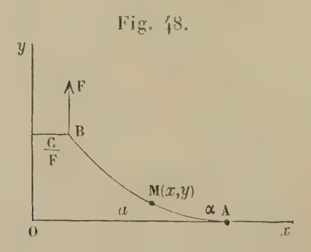
$$(18)\qquad ds = \frac{dx}{\sqrt{1-[\int\varphi(x)\,dx]^2}}.$$

Enfin, une nouvelle intégration, que l'on effectue sur la seconde (17) multipliée par dx, et sur (18), donne, entre l'abscisse x et l'ordonnée y ou l'arc s, les équations finies, caractéristiques de la courbe sauf l'ambiguïté de signe, à discuter dans chaque cas, de leurs radicaux :

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= \int \frac{\int\varphi(x)\,dx}{\sqrt{1-[\int\varphi(x)\,dx]^2}}\,dx + \text{const.},\\ s &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-[\int\varphi(x)\,dx]^2}} + \text{const.} \end{aligned}\right.$$

Contentons-nous de faire l'application de ces formules à la *courbe élastique,* ou courbe suivant laquelle se dispose, à l'état d'équilibre, un mince ressort homogène AB, primitivement rectiligne dans le plan des xy, mais plié ou fléchi, dans ce plan, par une force F et un couple C, qu'on y suppose contenus, et que supporte le ressort à son extrémité B, tandis que son autre bout, A, est maintenu fixe sur une longueur infiniment petite $A\alpha$. Prenons pour axe des x la perpendiculaire Ax à la force F et pour axe des y une droite menée, parallèlement à cette force F, à la distance $\frac{C}{F}$ de sa ligne d'application BF; en sorte que le moment de F par rapport à un point quelconque $M(x,y)$ de l'axe longitudinal AB du ressort soit $\left(x - \frac{C}{F}\right)F$, ou $Fx - C$, et

Fig. 48.



donne, avec le couple C, le moment total Fx, simplement proportion-

nel à l'abscisse x. La courbure, $\pm(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}y''$, prise par l'axe AB du ressort sera partout, d'après une loi fondamentale de la théorie mécanique de la flexion, en raison directe de ce moment, ou de x; et, en appelant m une ligne constante, moyenne proportionnelle entre le rayon de la courbure considérée et $2x$, il viendra, comme équation différentielle de la *courbe élastique* AB,

$$(20) \qquad \pm(1+y'^2)^{-\frac{3}{2}}y'' = \frac{2x}{m^2}.$$

Celle-ci se déduit, comme on voit, de (16), en posant $\varphi(x) = \frac{2x}{m^2}$; d'où $\int\varphi(x)dx = \frac{x^2+c}{m^2}$, si c désigne une constante arbitraire. Pour la déterminer simplement et aussi pour fixer les idées, supposons, d'une part, l'angle OAα nul, ou le bout OA maintenu dans une direction normale à la force F, et, d'autre part, la pente y' de BA (grâce à une valeur assez modérée du couple C) partout de même signe, c'est-à-dire négative, entre A et B; ce qui dispensera de prendre alternativement le radical, dans la seconde (17), avec les deux signes + et —. Alors, si a désigne l'abscisse OA du point A où s'annule ainsi y', la première formule (17) deviendra, en ce point, $0 = \int\varphi(x)dx = \frac{a^2+c}{m^2}$. On aura donc $c = -a^2$, et il viendra, par suite, pour $\int\varphi(x)dx$, quel que soit x, l'expression $-\frac{a^2-x^2}{m^2}$, partout négative entre B et A. En conséquence, le radical de la seconde (17) recevra exclusivement le signe supérieur +. Enfin, si nous convenons de compter l'arc s, à partir de A, positivement en allant vers B, de sorte que ds et dx aient des signes contraires, le radical devra se prendre négativement dans (18) ou dans la seconde (19). Et les deux formules (19), où les constantes arbitraires se détermineront de manière que y et s s'annulent pour $x = a$, deviendront aisément

$$(21) \qquad y = \int_x^a \frac{(a^2-x^2)dx}{\sqrt{m^4-(a^2-x^2)^2}}, \qquad s = \int_x^a \frac{m^2 dx}{\sqrt{m^4-(a^2-x^2)^2}}.$$

Les seconds membres se réduisent aux intégrales elliptiques E, F de Legendre, mais par deux procédés différents, suivant que l'on a $m > a$ ou $m < a$.

Quand m est plus grand que a, il suffit, après avoir décomposé l'expression bicarrée $m^4-(a^2-x^2)^2$ en ses deux facteurs $m^2+a^2-x^2$, $m^2-a^2+x^2$, de mettre le premier sous la forme $(m^2+a^2)\sin^2\varphi$,

en posant $x = \sqrt{m^2 + a^2}\cos\varphi$ et introduisant ainsi, comme variable d'intégration, un angle aigu positif φ qui, entre $x = 0$ et $x = a$, décroîtra de $\frac{\pi}{2}$ à la valeur φ_0 dont le cosinus est $\frac{a}{\sqrt{m^2+a^2}}$ ou, la tangente, $\frac{m}{a}$. Alors de

(22) $x = \sqrt{m^2+a^2}\cos\varphi$, il résulte $dx = -\sqrt{m^2+a^2}\sin\varphi\, d\varphi$;

et les formules (21), en y remplaçant partout $\cos^2\varphi$ par $1 - \sin^2\varphi$, puis faisant $\frac{m^2+a^2}{2m^2} = k^2$, donnent

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} y &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{m^2 - [2m^2 - (m^2+a^2)\sin^2\varphi]}{\sqrt{2m^2 - (m^2+a^2)\sin^2\varphi}}\, d\varphi \\ &= \frac{m}{\sqrt{2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - m\sqrt{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi, \\ s &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{m^2\, d\varphi}{\sqrt{2m^2-(m^2+a^2)\sin^2\varphi}} = \frac{m}{\sqrt{2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}; \end{aligned} \right.$$

ce qui, par l'intermédiaire de l'angle $\varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{m^2+a^2}}$, ramène bien immédiatement les deux fonctions y et s de x aux deux fonctions elliptiques $F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ et $E(k,\varphi) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$.

On remarquera notamment que l'arc s de la courbe élastique s'exprime au moyen de l'intégrale de première espèce $F(k,\varphi)$ toute seule et en constitue, par conséquent, une représentation géométrique.

La longueur AB du ressort étant censée connue, la constante $OA = a$ devra être telle que, dans la formule (23) de l'arc s, l'on ait $s =$ cette longueur AB pour la valeur de φ donnant x $\left(\text{ou } \sqrt{m^2+a^2}\cos\varphi\right)$ égal à l'abscisse $\frac{C}{F}$ de l'extrémité B. Telle est donc la condition par laquelle se déterminera le paramètre inconnu a.

Quand, en second lieu, m se trouve plus petit que a (ce qui donnerait $k > 1$), la quantité placée sous les radicaux dans (21), savoir $(m^2 + a^2 - x^2)(m^2 - a^2 + x^2)$, devient de la forme $(\alpha^2 - x^2)(x^2 - \beta^2)$, qui n'est pas de celles dont nous avons fait, au n° 253* (p. 30*), une étude spéciale. Mais on la ramène à l'une de celles-ci en prenant pour nouvelle variable t, d'après une indication de la fin de ce numéro (p. 34*), le facteur $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ du radical, après quoi l'on introduit un angle auxiliaire φ, aigu et positif, donné par la condition

$t = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\sin\varphi$. Or cela revient, en définitive, à poser, dans (21), non plus $x = \sqrt{m^2 + a^2}\cos\varphi$, mais

$$(24) \qquad x = \sqrt{(a^2 + m^2) - 2m^2\sin^2\varphi} = \sqrt{a^2 + m^2}\sqrt{1 - K^2\sin^2\varphi},$$

où K^2 désigne le rapport $\frac{2m^2}{a^2 + m^2}$, actuellement inférieur à l'unité; et l'on procède comme dans le cas précédent, après avoir observé que l'expression $\frac{dx}{\sqrt{m^4 - (a^2 - x^2)^2}}$ se réduit à $-\frac{1}{\sqrt{a^2 + m^2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - K^2\sin^2\varphi}}$. Il vient des résultats analogues, encore réductibles aux intégrales elliptiques $E(K, \varphi)$, $F(K, \varphi)$.

Pour donner enfin un exemple du second cas d'abaissement (p. 198), supposons que la ligne à construire doive avoir sa courbure, censée ici prise toujours avec le signe de y'', fonction non plus de la distance à une droite fixe, mais de la *normale* $N = y\sqrt{1 + y'^2}$ (t. I, p. 198), prise de même avec le signe de y. Alors l'équation différentielle sera de la forme

$$(25) \qquad (1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}} y'' = \varphi\left(y\sqrt{1 + y'^2}\right),$$

c'est-à-dire qu'elle ne contiendra pas la variable indépendante x. Elle s'abaissera donc au premier ordre en y choisissant y pour variable et y' pour fonction. Son premier membre, d'après les formules (15) [p. 198], deviendra aisément $-\frac{d}{dy}(1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}}$, ou bien $-\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{N}\right)$, en y introduisant la normale N à la place de y'; et l'équation (25), multipliée par $N^2 dy$, sera

$$y\,dN - N\,dy = N^2\varphi(N)\,dy \quad \text{ou} \quad -y\,dN + [N + N^2\varphi(N)]\,dy = 0.$$

Les variables s'y séparant immédiatement, une intégration donne

$$(26) \qquad \log y - \int \frac{dN}{N + N^2\varphi(N)} = \text{const.},$$

équation *finie* en y et N, mais *différentielle* du premier ordre en y quand on y remplace N par $y\sqrt{1 + y'^2}$. Si l'on peut alors la résoudre, soit par rapport à y', soit par rapport à y, les procédés exposés aux nos 367 et 371* (p. 183 et 243*) ramèneront enfin son intégration à une seule quadrature; car elle sera de l'une des deux formes $y' = \psi(y)$, $y = \chi(y')$. C'est ce qui arrive, par exemple, quand le rayon de courbure est proportionnel à la normale, ou, $\varphi(N)$, de la forme $\frac{a}{N}$.

383*. — Autres cas d'abaissement, spéciaux à des équations présentant certains genres d'homogénéité.

Il est quelques autres cas, offerts par des équations différentielles présentant certains genres d'homogénéité, où un changement soit de la fonction y, soit de cette fonction et de la variable indépendante x, suffit pour abaisser l'ordre de l'équation.

Le plus simple, reconnu par Euler, est celui où tous les termes sont du même degré relativement à y et à ses dérivées; de sorte que l'équation, divisée par une puissance convenable de y, contienne seulement, avec x, les rapports $\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \frac{y'''}{y}$, etc. Prenons pour nouvelle fonction le premier de ces rapports, ou posons $\frac{y'}{y} = u$. Nous tirerons de là

$$y' = uy \quad \text{et, par suite,} \quad y'' = u'y + uy', \quad y''' = u''y + 2u'y' + uy'', \quad \ldots.$$

En divisant par y, il viendra, au moyen de substitutions évidentes,

$$(27)\quad \begin{cases} \frac{y'}{y} = u, \quad \frac{y''}{y} = u' + u\frac{y'}{y} = u' + u^2, \\ \frac{y'''}{y} = u'' + 2u'\frac{y'}{y} + u\frac{y''}{y} = u'' + 2u'u + u(u' + u^2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ainsi, tous les rapports, à y, des dérivées successives de y s'expriment en fonction de la quantité u et de ses dérivées d'ordres moindres. Donc, l'équation, en u, ne sera plus que de l'ordre $n-1$. Si l'on parvient à l'intégrer, il viendra une relation de la forme $u = f(x)$, ou $\frac{y'}{y} = f(x)$, dont l'intégrale est

$$\log y = \int f(x)\,dx + \text{une constante } \log c, \quad \text{ou} \quad y = ce^{\int f(x)dx} = ce^{\int u dx}.$$

Une homogénéité d'une autre espèce, qui conduit à un abaissement de deux unités, se présente quand l'équation ne contient pas x et se trouve réductible à la forme $f\left(y, \frac{y''}{y'^2}, \frac{y'''}{y'^3}, \ldots\right) = 0$. On peut, en effet, pour abaisser d'abord d'une unité son ordre, lui appliquer la seconde transformation indiquée au n° 381, ou qui consiste à adopter y comme variable et y' comme fonction. Or les formules (15) de ce numéro (p. 198) montrent que $y'', y''', \ldots$ deviennent alors, dans tous leurs termes, respectivement du second degré, du troisième, etc., de manière à rendre les quotients $\frac{y''}{y'^2}, \frac{y'''}{y'^3}, \ldots$ homogènes du degré zéro.

Donc l'équation rentre dans le type qui vient d'être examiné, où la fonction inconnue et ses dérivées ne figurent que par leurs rapports, et la transformation précédente permet d'abaisser son ordre d'une nouvelle unité.

Enfin un troisième cas un peu plus complexe, reconnu, comme le premier, par Euler, concerne les équations qui, divisées par une puissance convenable de x, prennent la forme $f\left(\frac{y}{x}, y', xy'', x^2y''', \dots\right) = 0$. On les rend indépendantes de la variable et, par suite, susceptibles d'abaissement (p. 198), en choisissant pour cette variable le logarithme naturel de x et pour fonction le rapport $\frac{y}{x}$, c'est-à-dire en posant $x = e^t$, $\frac{y}{x} = u$. Comme il vient, en effet, $\frac{d}{dx} = \frac{1}{x'}\frac{d}{dt} = e^{-t}\frac{d}{dt}$, la valeur de y, savoir $e^t u$, donne, par sa différentiation répétée en x, et en multipliant finalement les dérivées obtenues par 1, x, x^2, ...,

$$(28)\quad \begin{cases} y' = e^{-t}\dfrac{d}{dt}(e^t u), \quad xy'' = \dfrac{d}{dt}\left[e^{-t}\dfrac{d}{dt}(e^t u)\right], \\ x^2y''' = e^t\dfrac{d}{dt}\left\{e^{-t}\dfrac{d}{dt}\left[e^{-t}\dfrac{d}{dt}(e^t u)\right]\right\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Or les expressions ainsi formées de $\frac{y}{x}$, y', xy'', x^2y''', ... contiennent seulement u et ses dérivées en t, mais non, d'une manière explicite, cette variable t; car les facteurs e^{-t} et e^t, les seuls par lesquels elle y paraisse, sont en nombre égal dans chaque expression et s'y détruisent. L'équation transformée s'abaissera donc à l'ordre $n - 1$, si l'on adopte u pour nouvelle variable indépendante et $\frac{du}{dt}$ pour fonction inconnue ([1]).

([1]) *Abaissement de l'equation binôme du second ordre.* — Le changement de variable qui consiste à poser $t = x^m$ et à choisir convenablement l'exposant m, ramène, en général, à cette troisième espèce d'homogénéité l'*équation binôme du second ordre*, $\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{K}t^a y^b \left(\frac{dy}{dt}\right)^c$, où a, b, c, K sont quatre constantes. La formule correspondante de transformation, $\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d}{dx} = \frac{1}{m}x^{1-m}\frac{d}{dx}$, donne, en effet, pour le premier terme de l'équation binôme, une valeur proportionnelle à $x^{1-m}\frac{d}{dx}\left(x^{1-m}\frac{dy}{dx}\right)$, ou au produit de x^{1-2m} par $x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-m)\frac{dy}{dx}$, et, pour le second terme, une valeur proportionnelle au produit de $x^{(a-c)m+b+c}$ par

384*. — Exemple : abaissement de l'ordre d'une équation linéaire sans second membre; réduction de l'équation non linéaire de Riccati à une telle équation linéaire, mais du second ordre.

Une équation linéaire sans second membre, c'est-à-dire sans terme indépendant de la fonction y et de ses dérivées, offre le plus simplement possible le premier cas d'homogénéité, puisque $y, y', y'', \ldots$ n'y figurent qu'au premier degré. On en abaissera donc l'ordre d'une unité en prenant pour fonction inconnue le rapport $\frac{y'}{y}$.

Soit, par exemple, l'équation linéaire et homogène du second ordre

$$y'' + Py' + Qy = 0, \tag{29}$$

où P et Q sont deux fonctions explicites quelconques de x seul. Si on l'écrit $\frac{y''}{y} + P\frac{y'}{y} + Q = 0$, les deux premières formules (27) la changeront en celle-ci,

$$\frac{du}{dx} + Pu + u^2 + Q = 0, \tag{30}$$

du premier ordre, mais non linéaire, et comprise dans le type quadrinôme (27) de la dernière Leçon (p. 240*).

D'ailleurs, la transformation qui a permis (p. 240*) de faire évanouir le second terme de cette équation (27), s'applique directement à la proposée. Elle consiste à poser

$$y = \alpha Y \qquad (\text{d'où} \qquad y' = \alpha Y' + \alpha' Y, \qquad y'' = \alpha Y'' + 2\alpha' Y' + \alpha'' Y), \tag{31}$$

ce qui change (29) en

$$\alpha Y'' + (2\alpha' + P\alpha) Y' + (\alpha'' + P\alpha' + Q\alpha) Y = 0, \tag{32}$$

puis à déterminer α de manière à annuler le terme en Y', c'est-à-dire par la condition $2\alpha' + P\alpha = 0$. L'on obtient $\alpha = e^{-\frac{1}{2}\int P dx}$, et l'équa-

---

$\left(\frac{y}{x}\right)^b \left(\frac{dy}{dx}\right)^c$: il suffit d'égaler les deux exposants de x, savoir $1 - 2m$ et $(a-c)m + b + c$, en prenant $m = \frac{b+c-1}{c-a-2}$, pour faire disparaître ces facteurs en x qui, seuls, empêchaient l'équation transformée d'être de la forme voulue $f\left(\frac{y}{x}, y', xy''\right) = 0$. Ainsi, l'équation *binôme* du second ordre est *généralement* réductible au premier ordre, comme l'avait encore trouvé Euler.

tion (32), divisée par α, devient $Y'' + \left(\frac{\alpha''}{\alpha} + P\frac{\alpha'}{\alpha} + Q\right)Y = 0$, relation qui est bien de la forme (29) avec $P = 0$.

Faisons ainsi $P = 0$ dans (29), ou donnons-nous l'équation $y'' + Qy = 0$; et sa transformée (30) en u sera $u' + u^2 + Q = 0$, équation identique (sauf la notation u au lieu de y) à celle (30) de Riccati (p. 241*) quand on prend Q de la forme $-ax^m$. Ainsi, les intégrations des deux équations, l'une, *linéaire* et binôme, mais du *second* ordre, l'autre, du *premier* ordre, mais trinôme et *non linéaire*,

$$(33) \qquad y'' = ax^m y, \qquad u' + u^2 = ax^m \quad \left(\text{avec } u = \frac{y'}{y}\right),$$

constituent deux problèmes étroitement liés ensemble. Le second, qui est celui de Riccati, se ramène donc au premier, que l'on juge ordinairement plus simple. Il suffit d'ailleurs d'y obtenir une intégrale particulière, c'est-à-dire une quelconque des fonctions y de x donnant $y'' = ax^m y$; car l'expression correspondante $\frac{y'}{y}$ de u sera une solution particulière de l'équation de Riccati $u' + u^2 = ax^m$, ce qui ramènera aux quadratures, comme on a vu à la fin du même n° 370* (p. 242*), la formation de l'expression générale de u.

385* — **Réduction, aux quadratures, de l'intégration de l'équation linéaire du second ordre dont une solution particulière est donnée; abaissement de l'ordre de toute équation linéaire, avec conservation de la forme linéaire, quand on connaît une ou plusieurs intégrales particulières de l'équation analogue sans second membre.**

Cette propriété, établie au n° 370*, en vertu de laquelle l'équation (30) ci-dessus peut être intégrée d'une manière générale dès qu'on donne une de ses solutions particulières, appartient aussi à l'équation (29), puisque la connaissance d'une solution particulière de (29) entraîne celle de la solution correspondante $u = \frac{y'}{y}$ de (30) et, par suite, l'intégration complète de (30), c'est-à-dire la formation générale de u, d'où se déduira, pour y, l'expression non moins générale $ce^{\int u\,dx}$.

On le reconnaît directement sur l'équation (29) en y prenant, comme ci-dessus, $y = \alpha Y$, mais en y supposant α solution particulière de l'équation, c'est-à-dire tel, que $\alpha'' + P\alpha' + Q\alpha = 0$, de manière à annuler, dans la transformée (32), le terme en Y, et non plus le terme

en Y′. Cette transformée (32) devient donc

$$(34) \quad \alpha Y'' + (2\alpha' + P\alpha) Y' = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dY'}{dx} + \left(2\frac{\alpha'}{\alpha} + P\right) Y' = 0,$$

équation linéaire et homogène comme la proposée (29), mais du premier ordre (en Y′) et immédiatement intégrable.

Si, par exemple, on a eu soin de faire préalablement disparaître de 29) le second terme Py', ou que l'équation proposée soit réduite à la forme $y'' + Qy = 0$, comme l'est la première (33) à laquelle se ramène celle de Riccati, il vient, en multipliant la première (34) par αdx, $\alpha^2 dY' + Y' d.\alpha^2 = 0$, c'est-à-dire, après intégration, $\alpha^2 Y' =$ une constante c; et l'on en déduit $dY = \frac{c}{\alpha^2} dx$. Il en résulte finalement

$$(35) \qquad Y = c\int \frac{dx}{\alpha^2} + \text{const.}, \qquad y = \alpha Y = \alpha\left(c\int \frac{dx}{\alpha^2} + \text{const.}\right).$$

En général, lorsqu'une équation différentielle est linéaire et sans second membre, c'est-à-dire de la forme $Qy + Py' + My'' + \ldots + Ly^{(n)} = 0$, il suffit d'en connaître une solution particulière α (autre que zéro), fonction variable de x donnant $Q\alpha + P\alpha' + M\alpha'' + \ldots = 0$, pour que la même substitution $y = \alpha Y$ abaisse son ordre d'une unité, sans lui faire perdre la forme linéaire et homogène. Car, vu les expressions (du premier degré en Y, Y′, Y″, ...)

$$(36) \qquad \begin{cases} y = \alpha Y, \quad y' = \alpha' Y + \alpha Y', \\ y'' = \alpha'' Y + 2\alpha' Y' + \alpha Y'', \quad y''' = \alpha''' Y + \ldots + \alpha Y''', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

le premier membre de l'équation proposée deviendra évidemment une somme, linéaire en Y, Y′, ..., $Y^{(n)}$, dans laquelle s'évanouira le terme en Y, affecté du coefficient total, identiquement nul,

$$Q\alpha + P\alpha' + M\alpha'' + \ldots.$$

Donc l'équation sera bien, par rapport à la dérivée Y′, linéaire et de l'ordre $n - 1$.

Si l'on connaît, à la proposée, une deuxième solution, $y = \beta$, dont le rapport à α varie avec x, la valeur correspondante de $Y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ ne sera pas nulle : elle constituera donc une solution bien propre à l'équation en Y′; ce qui permettra d'abaisser encore l'ordre de celle-ci. De même, un nouvel abaissement analogue est possible quand on donne une troisième intégrale particulière $y = \gamma$, ce qui fait qu'on en connaît deux pour l'équation différentielle en Y′;

et ainsi de suite, pourvu que toutes ces intégrales puissent être dites *distinctes*, c'est-à-dire pourvu qu'il en résulte, chaque fois, une solution particulière, autre que zéro, de la dernière transformée précédente.

Enfin, les mêmes transformations, appliquées à l'équation linéaire complétée par un second membre $F(x)$ fonction quelconque de x, c'est-à-dire à l'équation $Qy + Py' + \ldots + Ly^{(n)} = F(x)$, continueront évidemment à en modifier le premier membre comme quand le second se réduisait à zéro, *pourvu que* α, β, γ, ... *désignent toujours des solutions particulières de l'équation sans second membre;* et elles abaisseront, par conséquent, l'ordre d'autant d'unités qu'on donnera de telles solutions distinctes. Si donc l'équation proposée est du second ordre, une seule de ces solutions suffira pour la réduire au premier et, vu la forme linéaire de la transformée, pour en opérer par quadratures l'intégration complète.

COMPLÉMENT A LA TRENTE-HUITIÈME LEÇON,

CONCERNANT LA THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

393*. — **Absence de solutions singulières et d'intégrales asymptotes distinctes, dans les systèmes d'équations linéaires.**

Les facteurs intégrants de tout système d'équations linéaires étant des fonctions explicites de la variable indépendante x seule, de même que le sont les dérivées, par rapport aux fonctions inconnues y, z, $u, \ldots$, des expressions linéaires de y', z', u', ... données par ces équations, ce sera au plus pour des valeurs isolées de x, mais jamais pour aucun ensemble de fonctions y, z, u, ... de x, que deviendront infinis l'un des facteurs intégrants ou l'une des dérivées. Il n'y aura donc pas plus de solutions singulières dans un tel système que dans une équation linéaire du premier ordre ; et, même, nulle jonction d'intégrales n'y sera possible si ses coefficients sont, par exemple, constants.

Il est facile de voir, en raisonnant à peu près comme on l'a fait (p. 239*) pour ce cas d'une équation linéaire unique, qu'un système linéaire n'admettra pas davantage d'intégrale asymptote *distincte*. Car les solutions générales y, z, u, ... d'un tel système seront du premier degré par rapport aux constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_n$ et si, partant d'intégrales particulières considérées y, z, $u, \ldots$, on fait varier $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de petites quantités $\Delta c_1 = k_1 \varepsilon$, $\Delta c_2 = k_2 \varepsilon, \ldots$, $\Delta c_n = k_n \varepsilon$, prises entre elles comme des nombres constants arbitraires k_1, k_2, $k_n, \ldots$, les accroissements correspondants de y, z, u, ... égaleront les produits, par la petite quantité ε, de certaines fonctions de x et de $k_1, k_2, \ldots, k_n$ seuls, produits constituant, par conséquent, entre les intégrales dont il s'agit et leurs voisines, des écarts que l'on retrouverait exactement pareils auprès de tout autre système d'intégrales. Donc, quand x varie, les mêmes circonstances de rapprochement ou d'écartement entre solutions voisines se produisent aux environs d'intégrales quelconques, et non de préférence près de certaines d'entre elles; ce qui empêche évidemment chacune d'être plus ou moins asymptote que les autres.

COMPLÉMENT A LA TRENTE-NEUVIÈME LEÇON.

CALCUL DE DIVERSES INTÉGRALES DÉFINIES, SE REPRODUISANT PAR DEUX OU PAR QUATRE DIFFÉRENTIATIONS; INTÉGRATION DE CERTAINES ÉQUATIONS LINÉAIRES A SECOND MEMBRE.

401*. — **Emploi d'équations linéaires du second ordre pour le calcul de certaines intégrales définies, qui se reproduisent par deux ou par quatre différentiations.**

Une équation *linéaire* n'admettant pas d'autre solution que celles que donne son intégrale générale en y spécifiant les constantes arbitraires, toute fonction y de x qui vérifiera, par exemple, l'équation $y'' \pm y = 0$ devra nécessairement être de la forme $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ou $c_1 \operatorname{coh} x + c_2 \operatorname{sih} x$, suivant que l'on aura $y'' = -y$ ou $y'' = y$. Donc, de cette forme, on déduira la valeur des intégrales définies y que leur dérivée seconde par rapport à un paramètre x égalerait avec ou sans changement de signe, si l'on peut y déterminer c_1 et c_2 grâce à la connaissance préalable de l'intégrale et de sa dérivée y' pour une valeur particulière de x, ou grâce à d'autres circonstances, telles que l'évanouissement asymptotique de y pour $x = \infty$, etc.

Soient, en premier lieu, les deux intégrales, désignées par φ ou par $\pm\varphi$ au n° 347* [p. 182*, form. (9)],

$$(45)\quad y = \int_0^\infty \sin\left(\frac{\alpha^2}{2} \pm \frac{x^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha, \quad y' = \pm \int_0^\infty \cos\left(\frac{x^2}{2\alpha^2} \pm \frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha :$$

nous les appellerons ici, respectivement, y et y', vu que, d'après la première formule (6) du n° 346* [p. 181*], la seconde est la dérivée de la première par rapport à son paramètre x (supposé *positif* et nommé t dans ces numéros). D'après la deuxième des mêmes formules (6), on aura $y'' = \mp y$. Et comme, d'ailleurs, pour $x = 0$, les deux valeurs de y et de y' seront $\int_0^\infty \sin \frac{\alpha^2}{2}\, d\alpha$ et $\pm \int_0^\infty \cos \frac{\alpha^2}{2}\, d\alpha$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\pm \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en vertu des deux dernières formules (4) de la même Leçon (p. 180*), il viendra, en faisant $x = 0$ dans les deux

relations

$$\left\{\begin{aligned} y &= c_1\cos x + c_2\sin x \quad \text{ou} \quad c_1 \operatorname{coh} x + c_2 \operatorname{sih} x,\\ y' &= -c_1 \sin x + c_2\cos x \quad \text{ou} \quad c_1 \operatorname{sih} x + c_2 \operatorname{coh} x,\end{aligned}\right.$$

d'une part, $c_1 = y_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'autre part, $c_2 = y'_0 = \pm\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On aura donc, si l'on sépare es deux cas des signes soit supérieurs, soit inférieurs, et si, dans ce dernier cas, on se souvient que $\operatorname{coh} x - \operatorname{sih} x = e^{-x}$.

$$(46)\quad [\text{pour } x > 0] \quad \left\{\begin{aligned} \int_0^\infty \sin\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{x^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\cos x + \sin x),\\ \int_0^\infty \cos\left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{x^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(\cos x - \sin x),\\ \int_0^\infty \sin\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{x^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-x},\\ \int_0^\infty \cos\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{x^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-x}.\end{aligned}\right.$$

Enfin, considérant les quatre équations (46), prenons la demi-somme et la demi-différence tant de la première et de la troisième, que de la seconde et de la quatrième, après avoir décomposé comme à l'ordinaire les sinus ou cosinus de sommes et de différences; les résultats, disposés dans un ordre convenable, seront

$$(47)\quad [\text{pour } x > 0] \quad \left\{\begin{aligned} \int_0^\infty \sin\frac{\alpha^2}{2}\cos\frac{x^2}{2\alpha^2}\, d\alpha &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}(\sin x + \cos x + e^{-x}),\\ -\int_0^\infty \sin\frac{x^2}{2\alpha^2}\sin\frac{\alpha^2}{2}\, d\alpha &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}(\cos x - \sin x - e^{-x}),\\ -\int_0^\infty \cos\frac{\alpha^2}{2}\sin\frac{x^2}{2\alpha^2}\, d\alpha &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}(-\sin x - \cos x + e^{-x}),\\ -\int_0^\infty \cos\frac{x^2}{2\alpha^2}\cos\frac{\alpha^2}{2}\, d\alpha &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}(-\cos x + \sin x - e^{-x}).\end{aligned}\right.$$

Ainsi se trouvent déterminées les quatre intégrales, de la forme $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$, dont il a été parlé vers le même endroit (p. 182*) comme égalant leur dérivée quatrième. Et, en effet, si l'on appelle φ, par exemple, la première intégrale définie (47), il vient précisément les trois suivantes et puis la première φ, en différentiant celle-ci quatre fois de suite, d'après la règle donnée à la p. 179*; ce que confirme bien la différentiation des seconds membres de (47).

402*. — Autre exemple : intégrales définies de Laplace.

Un autre exemple, utile dans certaines applications physiques, d'intégrales définies qui, comme la troisième et la quatrième (46), sont égales entre elles et se reproduisent au moyen de deux différentiations, est fourni par les deux expressions

$$(48) \qquad y = \int_0^\infty \frac{\cos(x\alpha)}{1+\alpha^2}\,d\alpha, \qquad -y' = \int_0^\infty \frac{\alpha\sin(x\alpha)}{1+\alpha^2}\,d\alpha.$$

Ces intégrales, bien déterminées puisque leurs éléments se succèdent par groupes alternativement positifs et négatifs, de même champ, mais finalement de plus en plus faibles à cause du facteur évanouissant $\frac{1}{1+\alpha^2}$ ou $\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$, peuvent bien être appelées y et $-y'$; car la différentiation en x de la première, sous le signe $\int$, donne la seconde changée de signe. Or cette dernière a ses éléments, pour les très grandes valeurs de α, fort rapidement changeants de signe quand x varie; ce qui rend délicat le calcul de sa dérivée en x, à moins d'y éviter, conformément à une indication du n° 319* (p. 114*), la différentiation du facteur $\sin x\alpha$ auquel sont dus ces changements. Il suffira, pour cela, d'y prendre l'arc $x\alpha$ comme variable d'intégration, en posant $x\alpha = u$ $\left(\text{d'où } \alpha = \frac{u}{x} \text{ et } d\alpha = \frac{du}{x}\right)$; transformation possible *pourvu que x diffère de zéro.*

Si, par exemple, x est *positif*, les nouvelles limites seront encore $u=0$, $u=\infty$, et la seconde relation (48), devenue immédiatement

$$(49) \qquad y' = -\int_0^\infty \frac{u\sin u\,du}{x^2+u^2},$$

donnera, par sa différentiation en x sous le signe $\int$, suivie d'une intégration par parties,

$$(50) \qquad \begin{cases} y'' = \displaystyle\int_0^\infty \frac{2xu\sin u\,du}{(x^2+u^2)^2} = -\int_{u=0}^{u=\infty} \sin u\, d\,\frac{x}{x^2+u^2} \\ \quad = -\left(\dfrac{x\sin u}{x^2+u^2}\right)_{u=0}^{u=\infty} + \displaystyle\int_0^\infty \frac{x\cos u\,du}{x^2+u^2}. \end{cases}$$

Or l'avant-dernier terme (intégré) s'annule aux deux limites, et le dernier n'est autre que y, comme on le voit en y remettant $x\alpha$ au lieu de u et $x\,d\alpha$ au lieu de du. Donc, *dans tout l'intervalle compris depuis une valeur positive infiniment petite ε de x* jusqu'à $x=\infty$, cette

intégrale y vérifie l'équation $y'' = y$; et elle y a son expression de la forme $c_1 \operatorname{coh} x + c_2 \operatorname{sih} x$ ou $(c_1 + c_2)e^x + (c_1 - c_2)e^{-x}$. D'ailleurs, restant sans cesse, d'après la première formule (48), inférieure en valeur absolue à $\int_0^\infty \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\pi}{2}$, elle ne devient pas infinie pour $x = \infty$, alors que l'évanouissement de e^{-x} la réduit à

$$(c_1 + c_2)e^x = (c_1 + c_2) \times \infty;$$

et le coefficient $c_1 + c_2$ doit nécessairement s'annuler, ou l'intégrale être proportionnelle à e^{-x}. Or, à la limite $x = \varepsilon$ où $e^{-x} = 1$, sa valeur n'est qu'infiniment peu au-dessous de $\int_0^\infty \frac{d\alpha}{1+\alpha^2}$; car le facteur $\cos(x\alpha)$ y atteint l'unité dans tous les éléments *influents* qui correspondent à α fini. Donc, le rapport constant $c_1 - c_2$ de y à e^{-x} égale $\frac{\pi}{2}$; et il vient, pour toutes les valeurs positives de x, $y = \frac{\pi}{2}e^{-x}$; d'où $-y' = \frac{\pi}{2}e^{-x}$.

En résumé, l'intégrale y constituant une fonction paire de x et, sa dérivée y', une fonction impaire, on aura, en appelant $\sqrt{x^2}$ la valeur absolue de x :

$$(51)\quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\cos(x\alpha)\,d\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{\pi}{2}e^{-\sqrt{x^2}}, \\ \int_0^\infty \frac{\alpha\sin(x\alpha)\,d\alpha}{1+\alpha^2} = \pm\int_0^\infty \frac{u\sin u\,du}{x^2+u^2} = \pm\frac{\pi}{2}e^{-\sqrt{x^2}}. \end{cases}$$

De ces deux intégrales remarquables, calculées en premier lieu par Laplace, la première est donc continue depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = \infty$, mais la seconde, dérivée de la première changée de signe, présente, pour $x = 0$, le même brusque passage de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ que l'intégrale plus simple $\int_0^\infty \frac{\sin(x\alpha)}{\alpha}d\alpha$, qu'elle donne d'ailleurs, sous sa forme réduite $\pm\int_0^\infty \frac{\sin u\,du}{u}$ (p. 120*), en posant $x = \pm\varepsilon$ dans les deux derniers membres de (51). Ainsi, la courbe symétrique définie par l'équation $y = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(x\alpha)}{1+\alpha^2}d\alpha$ (en coordonnées rectangles) a pour sommet, sur l'axe des y, un point anguleux et, d'après la première (51), se confond du côté des y négatifs avec la logarithmique $y = e^x$.

403*. — Intégration de l'équation à second membre du problème de la charge roulante.

Les n°s 398 à 402* ont fait connaître quelques applications de l'équation linéaire $y'' \pm \beta^2 y = F(x)$, mais sans en épuiser, à beaucoup près, le nombre. Aussi en ajouterai-je encore deux assez importantes : elles achèveront de montrer l'utilité de cette équation.

La première se rapporte au problème de la *charge roulante* qui, d'un mouvement uniforme, parcourt une poutre élastique horizontale, appuyée à ses deux bouts $x = \mp l$, et d'une masse beaucoup plus faible que la sienne. Le petit abaissement y éprouvé, à raison de la légère flexion de la poutre, par la charge, est une fonction de l'abscisse x de celle-ci, à déterminer au moyen de l'équation différentielle (45) du n° 63* [t. I, p. 84*], avec adjonction des conditions initiales $y = 0$ et $y' = 0$ pour $x = -l$, exprimant la nullité de l'abaissement de la charge et l'horizontalité de sa vitesse au moment de son arrivée sur la poutre. Or un changement de variables effectué dans le même numéro donne à l'équation la forme (48) [t. I, p. 85*], savoir

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \pm k^2\eta = \frac{2}{\operatorname{coh}^3\xi}, \tag{52}$$

et transforme les conditions d'état initial en celles-ci, $\eta = 0$, $\dfrac{d\eta}{d\xi} = 0$ (pour $\xi = -\infty$). Il s'agit donc d'intégrer, sous ces conditions, l'équation (52), comprise dans le type $y'' \pm \beta^2 y = F(x)$. C'est dire qu'on devra, dans les valeurs (30) [p. 219] de C_1 et C_2, effectuer les intégrations à partir de la limite $x = -\infty$, au lieu de $x = 0$, et poser $c_1 = 0$, $c_2 = 0$.

Il viendra, vu d'ailleurs les changements de β en k, de $F(x)$ en $\dfrac{2}{\operatorname{coh}^3 x}$ et de x en ξ à la limite supérieure,

$$\left\{\begin{aligned} C_1 &= -\frac{2}{k}\int_{-\infty}^{\xi} \frac{\sin kx \quad \text{ou} \quad \operatorname{sih} kx}{\operatorname{coh}^3 x}\,dx, \\ C_2 &= \frac{2}{k}\int_{-\infty}^{\xi} \frac{\cos kx \quad \text{ou} \quad \operatorname{coh} kx}{\operatorname{coh}^3 x}\,dx. \end{aligned}\right. \tag{53}$$

Enfin ces valeurs, portées dans les expressions (31) de la fonction [p. 219], devenues

$$\eta = C_1 \cos k\xi + C_2 \sin k\xi \quad \text{ou} \quad C_1 \operatorname{coh} k\xi + C_2 \operatorname{sih} k\xi,$$

donneront, d'après les formules connues du sinus (circulaire ou hy-

perbolique) d'une différence,

$$(54)\qquad \eta = \frac{2}{k}\int_{-\infty}^{\xi} \frac{\sin(k\xi - kx) \quad \text{ou} \quad \text{sih}(k\xi - kx)}{\text{coh}^3 x}\,dx.$$

L'intégrale figurant au second membre est, sauf le changement de c en ξ, celle que nous avons appelée I_3 à la fin du n° 336* [form. (24), p. 152*], où nous l'avons évaluée en série. On aura donc, par l'emploi de cette série,

$$(55)\quad \begin{cases} \eta = R + \dfrac{1.2}{9 \pm k^2}\dfrac{1}{\text{coh}^3\xi} + \dfrac{1.2}{9 \pm k^2}\dfrac{3.4}{25 \pm k^2}\dfrac{1}{\text{coh}^5\xi} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{1.2}{9 \pm k^2}\dfrac{3.4}{25 \pm k^2}\cdots\dfrac{(2m-1)(2m)}{(2m+1)^2 \pm k^2}\dfrac{1}{\text{coh}^{2m+1}\xi} + \ldots, \\ \qquad \text{avec} \\ R = 0 \quad (\text{pour } \xi < 0) \quad \text{et} \\ R = \pi\,\dfrac{1 \pm k^2}{k}\left(\dfrac{\sin k\xi}{\text{coh}\,\dfrac{k\pi}{2}} \quad \text{ou} \quad \dfrac{\text{sih}\,k\xi}{\cos\dfrac{k\pi}{2}}\right) \quad (\text{pour } \xi > 0), \end{cases}$$

formules qui, après retour aux premières variables x et y de la question, permettent aisément de se représenter toutes les circonstances du phénomène [1].

Il est certains cas où, après avoir dépassé le milieu $x = 0$ de la poutre et sous la réaction de celle-ci, la charge roulante la quitte, pour y retomber parfois plus loin. L'étude d'un tel choc, régi comme le phénomène de simple passage par l'équation (52), mais avec des conditions initiales tout autres, exigera l'emploi de l'intégrale générale de (52), qui se forme évidemment en ajoutant la solution particulière (54) ou (55) à la solution générale, $c_1 \cos k\xi + c_2 \sin k\xi$ ou $c_1\,\text{coh}\,k\xi + c_2\,\text{sih}\,k\xi$, de l'équation sans second membre.

404*. — Intégration d'une autre équation à second membre, pour le calcul d'une fonction qui joue un rôle capital dans la théorie des ondes produites à la surface d'une eau tranquille, par l'émersion d'un solide ou par un coup de vent.

La fonction à considérer, fondamentale dans la théorie des ondes liquides superficielles, et dont la formation nous sera un dernier exemple de l'utilité de l'équation $y'' \pm \beta^2 y = F(x)$, est celle, $\psi(\gamma)$,

---

[1] *Voir*, par exemple, les pp. 569 à 576 du volume intitulé : *Application des potentiels à l'équilibre et au mouvement des solides élastiques, etc.*

que définissent, d'une part, la relation $\psi''(\gamma)+\psi(\gamma)=\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}$ et, d'autre part, les deux conditions spéciales $\psi(0)=0$, $\psi'(0)=0$. Il n'y a donc, pour l'obtenir sous forme d'intégrale définie, qu'à prendre, dans la formule (33) [p. 220], $\beta=1$, $F(\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}=\frac{d\sqrt{\xi}}{d\xi}$, $c_1=0$, $c_2=0$, et à changer d'ailleurs x en γ et y en $\psi(\gamma)$. Si, posant enfin $\sqrt{\xi}=m$, nous adoptons m comme variable d'intégration, nous aurons

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned}\psi(\gamma)&=\int_0^{\sqrt{\gamma}}\sin(\gamma-m^2)\,dm\\&=\sin\gamma\int_0^{\sqrt{\gamma}}\cos m^2\,dm-\cos\gamma\int_0^{\sqrt{\gamma}}\sin m^2\,dm.\end{aligned}\right.$$

Quand $\sqrt{\gamma}$ est assez grand, les intégrales qui figurent au troisième membre ne diffèrent plus sensiblement de $\int_0^{\infty}\cos m^2\,dm$ et de $\int_0^{\infty}\sin m^2\,dm$, dont la valeur commune, obtenue en faisant $b=1$ dans la formule (32) de la p. 127*, est $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Il vient, par conséquent,

$$(57)\quad (\text{pour } \gamma \text{ très grand})\quad \psi(\gamma)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\sin\gamma-\cos\gamma)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{4}\right).$$

Au reste, la différence entre $\psi(\gamma)$ et son *expression asymptotique* ainsi obtenue équivaut à une intégrale définie assez remarquable; car on a

$$(58)\qquad \psi(\gamma)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{4}\right)=\int_0^{\infty}e^{-2\sqrt{\gamma}m}\cos m^2\,dm.$$

Effectivement, si l'on appelle A cette intégrale, second membre de (58), sa dérivée par rapport à γ, évaluée (par différentiation sous le signe $\int$) en opérant finalement une intégration par parties où s'annulera aux deux limites le terme intégré, sera

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{dA}{d\gamma}&=-\int_0^{\infty}e^{-2\sqrt{\gamma}m}\cos m^2.\frac{m}{\sqrt{\gamma}}\,dm\\&=-\frac{1}{2\sqrt{\gamma}}\int_{m=0}^{m=\infty}e^{-2\sqrt{\gamma}m}\,d\sin m^2=-\int_0^{\infty}e^{-2\sqrt{\gamma}m}\sin m^2\,dm;\end{aligned}\right.$$

et une différentiation analogue du dernier membre, suivie de même d'une intégration par parties (mais où le terme intégré deviendra 1 à

la limite inférieure), donnera

$$(60)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 A}{d\gamma^2} &= -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \int_{m=0}^{m=\infty} e^{-2\sqrt{\gamma} m}\, d\cos m^2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} - \int_0^\infty e^{-2\sqrt{\gamma} m} \cos m^2\, dm = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} - A, \end{aligned} \right.$$

ou bien $\frac{d^2 A}{d\gamma^2} + A = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}$. Ainsi, déjà, le second membre de (58) satisfait à la même équation linéaire du deuxième ordre que le premier.

Il y aura donc égalité constante des deux membres, s'ils ont initialement (ou quand $\gamma = 0$) même valeur et même dérivée première. Or celles-ci sont respectivement, pour le premier membre, $\psi(0) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin \frac{\pi}{4}$ et $\psi'(0) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, et, pour le second membre, d'après les dernières expressions (58) et (59), $\int_0^\infty \cos m^2\, dm$ et $-\int_0^\infty \sin m^2\, dm$, ou encore $\pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. La formule (58) est donc démontrée. Elle fournira, pour l'intégrale définie $\psi(\gamma)$ *à limite supérieure variable,* une expression comprenant (57), car elle se composera de celle-ci et de l'intégrale *à limites constantes* formant le second membre de (58), laquelle tend rapidement vers zéro, à cause de l'exponentielle décroissante $e^{-2\sqrt{\gamma} m}$, dès que γ dépasse un assez petit nombre d'unités.

La formule approchée (57) n'étant utilisable que lorsque γ atteint une certaine grandeur, il y a lieu d'obtenir pour $\psi(\gamma)$ une série toujours convergente et qui, surtout, en rende aisé le calcul numérique au-dessous de cette grandeur, ou alors que l'expression asymptotique sera en défaut. Observons, dans ce but, que $\sin(\gamma - m^2)$ équivaut au développement

$$\frac{\gamma - m^2}{1} - \frac{(\gamma - m^2)^3}{1.2.3} + \frac{(\gamma - m^2)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

Par suite, l'intégrale $\int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - m^2)\, dm$, ayant sa fonction sous le signe $\int$ toujours développable suivant les puissances ascendantes de m, le sera elle-même et deviendra finalement, quand on y fera

$m=\sqrt{\gamma}$, une série convergente procédant suivant les puissances de $\sqrt{\gamma}$. On aura d'abord

$$\psi(\gamma)=\int_0^{\sqrt{\gamma}}(\gamma-m^2)\,dm-\frac{1}{1.2.3}\int_0^{\sqrt{\gamma}}(\gamma-m^2)^3\,dm+\ldots;$$

et, en prenant sous les signes $\int$ une nouvelle variable d'intégration, μ, telle que $m=\sqrt{\gamma}\mu$ ou que $dm=\sqrt{\gamma}d\mu$, puis posant, afin d'abréger,

$$(61)\qquad \mathrm{I}_p=\int_0^1(1-\mu^2)^p\,d\mu,$$

il viendra

$$(62)\qquad \psi(\gamma)=\frac{\mathrm{I}_1(\sqrt{\gamma})^3}{1}-\frac{\mathrm{I}_3(\sqrt{\gamma})^7}{1.2.3}+\ldots\pm\frac{\mathrm{I}_{2n+1}(\sqrt{\gamma})^{4n+3}}{1.2.3\ldots(2n+1)}\mp\ldots$$

Or une intégration par parties, effectuée sur le second membre de (61), en prenant μ pour facteur intégré et supposant p supérieur à zéro, donne

$$(63)\qquad \mathrm{I}_p=[(1-\mu^2)^p\mu]_0^1+2p\int_0^1\mu^2(1-\mu^2)^{p-1}\,d\mu.$$

Le terme intégré s'annule aux deux limites, et, d'autre part, le produit $\mu^2(1-\mu^2)^{p-1}$ étant la différence $(1-\mu^2)^{p-1}-(1-\mu^2)^p$, le dernier terme équivaut à $2p(\mathrm{I}_{p-1}-\mathrm{I}_p)$. L'équation devient donc $(2p+1)\mathrm{I}_p=2p\mathrm{I}_{p-1}$; et il en résulte, pour calculer I_p par réductions successives de l'indice, la formule

$$(64)\qquad \mathrm{I}_p=\frac{2p}{2p+1}\mathrm{I}_{p-1}.$$

A partir de I_0, qui égale $\int_0^1(1-\mu^2)^0d\mu$ ou 1, cette relation fera connaître I_1, puis I_2, puis I_3, ...; et l'on aura

$$(65)\qquad \mathrm{I}_p=\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{7}\cdots\frac{2p}{2p+1}:\quad \text{d'où}\quad \mathrm{I}_{2n+1}=2^{2n+1}\frac{1.2.3\ldots(2n+1)}{3.5.7\ldots(4n+3)}.$$

Enfin, la substitution, à $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_3, \ldots, \mathrm{I}_{2n+1}, \ldots$, dans (62), de ces valeurs, donnera aisément

$$(66)\qquad \psi(\gamma)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{(\sqrt{2\gamma})^3}{1.3}-\frac{(\sqrt{2\gamma})^7}{1.3.5.7}+\ldots\pm\frac{(\sqrt{2\gamma})^{4n+3}}{1.3.5.7\ldots(4n+3)}\mp\ldots\right].$$

C'est le développement cherché. En le différentiant deux fois terme à terme par rapport à γ, on reconnaît, d'abord, que les valeurs initiales $\psi(0)$, $\psi'(0)$ sont bien nulles, et, en deuxième lieu, que les deux séries $\psi(\gamma)$, $\psi''(\gamma)$ vérifient identiquement l'équation proposée

$$\psi''(\gamma) + \psi(\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}.$$

QUARANTIÈME LEÇON.

ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE, SOIT D'ORDRE SUPÉRIEUR, SOIT SIMULTANÉES : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS.

405*. — Intégration d'une équation linéaire homogène d'ordre quelconque, à coefficients constants.

Il nous reste à passer en revue les principaux cas où l'on sait former soit pour une équation linéaire d'ordre n, soit pour n équations linéaires simultanées du premier ordre, les n solutions particulières, correspondant à l'hypothèse de seconds membres nuls, desquelles se déduit ensuite l'intégrale générale de ces équations prises même avec seconds membres (p. 210). Le plus simple et aussi le plus utile, par suite de son application aux petits changements d'état physique (p. 202), est celui où les fonctions inconnues et leurs dérivées ont tous leurs coefficients constants.

Commençons donc par ce cas, et admettons d'abord qu'il s'agisse de l'équation unique, d'ordre n,

$$(1) \qquad y^{(n)} + \mathrm{A}y^{(n-1)} + \mathrm{B}y^{(n-2)} + \ldots + \mathrm{L}y' + \mathrm{M}y = 0,$$

que nous écrirons, symboliquement,

$$(2) \qquad \left(\frac{d^n}{dx^n} + \mathrm{A}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \mathrm{B}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots + \mathrm{L}\frac{d}{dx} + \mathrm{M}\right)y = 0.$$

Assimilons pour un instant l'expression entre parenthèses à un polynôme dont la variable serait $\frac{d}{dx}$; et décomposons-la, dans cette hypothèse, en ses facteurs *réels* les plus simples, que nous savons être ou du premier degré, de la forme $\frac{d}{dx} - r$, ou du second, et alors de la forme $\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^2 + \beta^2$, si r et $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ désignent respectivement les différentes racines, les unes, réelles, les autres, imaginaires, de l'équation obtenue en égalant à zéro le polynôme. Ce dernier constituera le produit de tous les facteurs analogues, dont chacun, *le plus souvent,*

n'y figurera qu'*une fois*. Supposons qu'il en soit ainsi ou, comme on dit, que le polynôme n'admette pas de racines égales; et appelons respectivement $a, b, \ldots$, celles qui seront réelles, $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}, \ldots$, les couples de celles qui seront imaginaires. On aura donc identiquement, en remplaçant dans (2), par ses facteurs, l'expression entre parenthèses regardée encore comme un polynôme,

$$(3)\qquad \left(\frac{d}{dx}-a\right)\left(\frac{d}{dx}-b\right)\cdots\left[\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)^2+\beta^2\right]\cdots y=0.$$

Or, quand on passe du sens algébrique au sens symbolique ou infinitésimal, la même décomposition en facteurs subsiste (t. I, pp. 81* à 83*), puisque le mécanisme de la différentiation de polynômes linéaires à coefficients constants est calqué sur celui de leur multiplication par $\frac{d}{dx}\cdot$ Et la même analogie permet d'intervertir l'ordre des facteurs symboliques; de manière qu'on peut, successivement, écrire chacun d'eux le dernier, c'est-à-dire aussitôt avant y. Mais il est évident que l'équation proposée se trouve satisfaite en annulant, dans le premier membre de (3), toute la quantité qui suit une quelconque des expressions entre parenthèses, ou à laquelle s'appliquent les opérations indiquées par cette expression symbolique et par les précédentes. Donc, en particulier, l'équation (3) admettra toutes les solutions des équations du premier ou du second ordre

$$(4)\qquad \begin{cases} \left(\frac{d}{dx}-a\right)y=0,\\ \left(\frac{d}{dx}-b\right)y=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \left[\left(\frac{d}{dx}-\alpha\right)^2+\beta^2\right]y=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

solutions qui sont respectivement, en appelant $c, c', \ldots, c_1, c_2, \ldots$ des constantes arbitraires en nombre total n,

$$(5)\quad y=ce^{ax},\qquad y=c'e^{bx},\ldots,\qquad y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x),\ldots.$$

Ainsi, *les n solutions particulières cherchées, avec lesquelles se formera l'intégrale générale, seront, sous leur forme la plus réduite possible*, $y=e^{ax}$, $y=e^{bx}$, ..., $y=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y=e^{\alpha x}\sin\beta x$,.... Nous les appellerons les *solutions simples* (réelles) de l'équation proposée. Elles s'obtiendront, comme on voit, en déterminant les facteurs

réels élémentaires du premier membre de l'équation algébrique

$$(6) \qquad r^n + A r^{n-1} + B r^{n-2} + \ldots + L r + M = 0,$$

qui se déduit de l'équation différentielle proposée par la substitution, à y, y', y'', ..., $y^{(n)}$, des puissances successives r^0, r^1, r^2, ..., r^n d'une inconnue r. *Pour chaque facteur,* $r - a$, $r - b$, ..., *du premier degré,* ou *pour chaque racine réelle* $r = a$, $r = b$, ... de l'équation (6), appelée quelquefois *équation caractéristique,* il y aura la solution simple e^{rx}, *de forme exponentielle,* et, *pour chaque facteur irréductible* du *second degré* $(r - \alpha)^2 + \beta^2$, ou *pour chaque couple* $r = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ *de racines imaginaires,* il y aura les deux solutions simples $e^{\alpha x}(\cos\beta x$ ou $\sin\beta x)$, *purement trigonométriques quand la partie réelle* α *des racines s'annulera,* mais, *en général, mixtes,* c'est-à-dire *comprenant deux facteurs, l'un exponentiel, l'autre trigonométrique.*

406*. — Cas singulier où l'équation caractéristique a des racines égales. — Réflexion générale sur la forme des résultats, quand il s'agit d'un système quelconque d'équations linéaires sans seconds membres et à coefficients constants.

Examinons maintenant le cas exceptionnel où, $m + 1$ racines de l'équation (6) devenant égales entre elles, les solutions simples correspondantes se confondent et, par conséquent, n'en laissent plus subsister de *distinctes,* dans (5), le nombre n strictement nécessaire pour la formation de l'intégrale générale. Alors, si l'on suppose les coefficients de l'équation (6) d'abord variables et, par exemple, fonctions continues quelconques d'un même paramètre, avant de recevoir leurs valeurs constantes assignées, toutes les solutions simples correspondant aux $m + 1$ racines ou aux $m + 1$ couples de racines qui tendent ainsi à se confondre, seront provisoirement différentes : il y aura donc lieu, utilisant leur multiplicité actuelle, de chercher à les remplacer par une seule d'entre elles, ou par un seul des couples qu'elles forment, et par m de leurs combinaisons ou couples de ces combinaisons, *assez bien choisies pour rester distinctes même à la limite.*

On pourra d'ailleurs, s'il en résulte plus de facilité dans le raisonnement, se donner arbitrairement, en fonction continue du paramètre, les racines de l'équation, c'est-à-dire les nombres a, b, ..., α, β, ..., au lieu de ses coefficients A, B, ..., L, M; car, les fonctions a, b, ..., α, β, ... étant ainsi choisies à volonté (sous la seule condition de tendre

vers les limites voulues), le produit $(r-a)(r-b)\ldots[(r-\alpha)^2+\beta^2]\ldots$ aura toujours, une fois effectué, la forme du premier membre de (6), avec pareilles valeurs finales des coefficients; et il suffira d'appeler A, B, ..., L, M ceux mêmes du produit obtenu.

Profitons de cette indétermination pour prendre équidistantes les $m+1$ valeurs de r ou les $m+1$ valeurs de α qui tendront à devenir égales, et pour laisser identiques, comme elles le sont à la limite, les $m+1$ valeurs de β. Soient donc, extrêmement près de leur limite commune,

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} r,\quad r+\Delta r,\quad r+2\Delta r,\quad \ldots,\quad r+m\Delta r, \\ \text{ou} \\ \alpha,\quad \alpha+\Delta\alpha,\quad \alpha+2\Delta\alpha,\quad \ldots,\quad \alpha+m\Delta\alpha, \end{array}\right.$$

les $m+1$ racines ou parties réelles de couples de racines dont il s'agit, et

$$(8)\qquad y,\quad y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_m,$$

les $m+1$ solutions simples correspondantes d'une même forme, qui sera ou e^{rx}, ou $e^{\alpha x}\cos\beta x$, ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Les quantités $y, y_1, y_2, \ldots, y_m$ constitueront donc $m+1$ valeurs successives d'une même fonction de la variable x et du paramètre r ou α, valeurs où x sera le même, mais non r ou α, qui, de l'une à l'autre, croîtra de Δr ou de $\Delta\alpha$. Or, si l'on considère les différences *actuelles* de cette fonction, *prises relativement au paramètre,*

$$\Delta y = y_1 - y,\qquad \Delta^2 y = (y_2-y_1)-(y_1-y) = y_2 - 2y_1 + y,\qquad \Delta^3 y = \ldots,$$

jusqu'à celle de l'ordre m inclusivement, il est évident qu'elles sont des combinaisons *linéaires,* à coefficients constants, des $m+1$ solutions particulières $y, y_1, \ldots, y_m$ de l'équation différentielle (3). Donc elles en forment de nouvelles intégrales, et elles ne cesseront pas davantage de la vérifier si on les multiplie par les facteurs respectifs (indépendants de x) $\frac{1}{\Delta r}, \frac{1}{(\Delta r)^2}, \ldots, \frac{1}{(\Delta r)^m}$, ou $\frac{1}{\Delta\alpha}, \frac{1}{(\Delta\alpha)^2}, \ldots, \frac{1}{(\Delta\alpha)^m}$. C'est dire que l'ensemble des $m+1$ solutions $y, y_1, y_2, \ldots, y_m$ peut être remplacé par le système

$$(9)\qquad y,\quad \frac{\Delta y}{(\Delta r \text{ ou } \Delta\alpha)},\quad \frac{\Delta^2 y}{(\Delta r \text{ ou } \Delta\alpha)^2},\quad \ldots,\quad \frac{\Delta^m y}{(\Delta r \text{ ou } \Delta\alpha)^m}.$$

Ces $m+1$ fonctions *bien continues* de x et de r ou α vérifiant l'équation (3), pour la valeur choisie de r ou α, quelque voisine que soit de zéro la différence Δr ou $\Delta\alpha$, il ne saurait en être autrement à la limite, alors qu'il y a égalité des $m+1$ racines, ou des $m+1$ couples de ra-

cines, et que les m dernières expressions (9) deviennent les m premières dérivées de y en r ou en α pour la valeur définitive de r ou de α. Par conséquent, *à $m+1$ racines réelles égales r, ou à $m+1$ couples de racines imaginaires $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ de l'équation* (6), *il correspondra, pour l'équation différentielle proposée* (1), *les $m+1$ solutions simples ou les $m+1$ couples de solutions simples*

$$(10) \qquad y, \quad \frac{dy}{(dr \text{ ou } d\alpha)}, \quad \frac{d^2 y}{(dr \text{ ou } d\alpha)^2}, \quad \dots, \quad \frac{d^m y}{(dr \text{ ou } d\alpha)^m},$$

y étant soit e^{rx}, soit, successivement, $e^{\alpha x}\cos\beta x$ et $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Ces solutions seront, dans le premier cas,

$$(11) \quad y = e^{rx}, \quad y = \frac{d.e^{rx}}{dr} = xe^{rx}, \quad y = \frac{d^2.e^{rx}}{dr^2} = x^2 e^{rx}, \quad \dots, \quad y = x^m e^{rx},$$

et, de même, dans le second,

$$(12) \qquad \begin{cases} y = e^{\alpha x}(\cos\beta x \text{ ou } \sin\beta x), \\ y = xe^{\alpha x}(\cos\beta x \text{ ou } \sin\beta x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y = x^m e^{\alpha x}(\cos\beta x \text{ ou } \sin\beta x). \end{cases}$$

En résumé, pour intégrer toute équation différentielle linéaire sans second membre et à coefficients constants, l'on aura un nombre suffisant de solutions simples des deux formes $x^m e^{\alpha x}\cos\beta x$ et $x^m e^{\alpha x}\sin\beta x$, où l'exponentielle se réduit à l'unité quand les racines correspondantes de l'équation (6) ont leur partie réelle α nulle, où c'est, au contraire, le facteur trigonométrique qui se réduit à l'unité quand les racines dont il s'agit n'ont pas de partie imaginaire β, et où, enfin, le facteur algébrique x^m a son exposant, essentiellement entier et non négatif, toujours inférieur au degré de multiplicité de ces racines, c'est-à-dire habituellement nul. L'intégrale générale d'une telle équation s'exprimera donc au moyen des seules fonctions entière, exponentielle et cosinus ou sinus, qui sont les plus simples dans les deux classes respectives des fonctions ou algébriques, ou transcendantes. Et comme, lorsqu'on donne un système quelconque d'équations linéaires simultanées sans seconds membres et à coefficients constants, chaque fonction inconnue se trouve régie en particulier (p. 214) par une équation différentielle d'ordre supérieur présentant les mêmes caractères, mais où elle figure seule, son expression la plus complète possible sera elle-même réductible à des termes de la forme $x^m e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $x^m e^{\alpha x}\sin\beta x$, dans lesquels on aura le plus souvent $m = 0$. Ainsi, *les fonctions exponentielle, cosinus et sinus suffiront, en se combi-*

nant quelquefois avec des facteurs algébriques de forme entière, pour exprimer les intégrales générales de systèmes quelconques d'équations linéaires sans seconds membres et à coefficients constants.

C'est principalement à cette propriété, que les fonctions exponentielle, cosinus et sinus doivent de jouer, dans la théorie des phénomènes physiques, un rôle immense, bien supérieur à celui de toutes les autres fonctions transcendantes.

407*. — Formation directe des solutions simples, pour tout un système d'équations linéaires à coefficients constants.

Mais il importe de savoir traiter plus directement le cas de n équations linéaires simultanées du premier ordre et à coefficients constants, c'est-à-dire d'apprendre à y former des systèmes de solutions simples embrassant à la fois toutes les fonctions demandées y, z, u, ..., sans avoir besoin de connaître, pour chacune d'elles, l'équation différentielle d'ordre supérieur qui lui est spéciale. Nous n'aurons, pour cela, qu'à généraliser la méthode précédente, relative à une équation unique, en cherchant une fonction auxiliaire φ régie par une telle équation linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre, et choisie de manière que toutes les inconnues y, z, u, ... s'expriment linéairement au moyen tant de cette fonction φ que de ses $n-1$ premières dérivées en x.

Soient donc les équations simultanées (2) de l'avant-dernière Leçon (p. 202), système où nous supposons ici indépendants de x tous les coefficients A_1, B_1, C_1, ..., A_2, ..., et que nous pourrons, sous une forme en partie symbolique, écrire

$$(13)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d}{dx}+A_1\right)y+B_1z+C_1u+\ldots=0,\\ A_2y+\left(\dfrac{d}{dx}+B_2\right)z+C_2u+\ldots=0,\\ A_3y+B_3z+\left(\dfrac{d}{dx}+C_3\right)u+\ldots=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Assimilons-y pour un instant, d'une part, la fraction symbolique $\dfrac{d}{dx}$ à une quantité, comme nous l'avons fait ci-dessus (p. 272*) pour donner à la relation proposée (2) la forme (3), et, d'autre part, $y, z, u, \ldots$ à des inconnues (ne s'annulant pas toutes), qu'il s'agirait de choisir compatibles avec le système (13). Après avoir divisé par y, dans ces hypothèses, $n-1$ des équations (13), les $n-1$ premières, par exemple,

résolvons-les par rapport aux $n-1$ quotients $\frac{z}{y}$, $\frac{u}{y}$, ..., qu'elles détermineront.

Nous aurons ainsi, pour y, z, u, ..., des valeurs proportionnelles à certains polynômes remarquables, nommés *déterminants mineurs*, que l'Algèbre apprend à former au moyen des coefficients $\frac{d}{dx}+A_1$, B_1, C_1, ..., A_2, ... des $n-1$ équations (13) dont on se sera servi. Appelant, pour fixer les idées, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, ... ces polynômes respectifs $\left(\text{qui seront au plus du degré } n-1 \text{ en } \frac{d}{dx}\right)$, et φ le rapport commun qu'auront avec eux y, z, u, ..., il viendra évidemment

$$(14) \qquad y=\mathfrak{P}_1\varphi, \qquad z=\mathfrak{P}_2\varphi, \qquad u=\mathfrak{P}_3\varphi, \qquad \ldots.$$

Enfin, pour que les relations (13), censées toujours purement algébriques, soient satisfaites, il ne restera plus qu'à porter ces valeurs de y, z, u, ... dans la dernière équation (13), non encore employée. Il viendra donc, entre l'inconnue φ et l'*indéterminée* $\frac{d}{dx}$, la relation, seule désormais à vérifier, $(A_n\mathfrak{P}_1+B_n\mathfrak{P}_2+C_n\mathfrak{P}_3+\ldots)\varphi=0$. Elle a entre parenthèses, dans son premier membre, d'après la théorie générale des équations algébriques du premier degré, ce qu'on appelle le *déterminant* du système (13); et elle s'écrira, avec les notations ordinaires de cette théorie,

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}+A_1, & B_1, & C_1, & \ldots \\ A_2, & \frac{d}{dx}+B_2, & C_2, & \ldots \\ A_3, & B_3, & \frac{d}{dx}+C_3, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \varphi = 0.$$

Le premier terme de la quantité censée inscrite entre les deux traits verticaux et formée avec les n^2 coefficients du système (13), sera le seul dont les n *éléments* ou facteurs comprennent tous la partie $\frac{d}{dx}$; car il se trouve constitué par le produit des éléments $\frac{d}{dx}+A_1$, $\frac{d}{dx}+B_2$, ... placés sur la *diagonale*. Donc le développement du déterminant forme un polynôme en $\frac{d}{dx}$ ayant pour terme le plus élevé

$\frac{d^n}{dx^n}$, et, par conséquent, est lui-même du degré n : ainsi l'on pourra le décomposer, comme l'expression entre parenthèses de l'équation (2), en facteurs réels irréductibles, les uns du premier degré, de la forme $\frac{d}{dx} - a$, ou $\frac{d}{dx} - b, \ldots$, les autres, du second degré et de la forme $\left[\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^2 + \beta^2\right]$.

Actuellement, restituons à $\frac{d}{dx}$ sa signification symbolique et voyons ce qu'exprimeront alors les résultats algébriques précédents. Les symboles $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ étant de la forme $\mathrm{a} + \mathrm{b}\frac{d}{dx} + \mathrm{c}\frac{d^2}{dx^2} + \ldots + \mathrm{f}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$, les relations (14) indiqueront, pour les quantités $y, z, u, \ldots$, des valeurs composées linéairement au moyen d'une fonction auxiliaire φ de x et de ses dérivées jusqu'à la $n - 1^{\text{ième}}$ au plus. Or, d'après la manière même dont ces expressions $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_n$ ont été formées, leur substitution à $y, z, u, \ldots$, dans les $n - 1$ premières équations (13), donne identiquement, après développement et réduction,

$$(16)\quad \begin{cases} \left(\frac{d}{dx} + \mathrm{A}_1\right)\mathfrak{P}_1 + \mathrm{B}_1\mathfrak{P}_2 + \mathrm{C}_1\mathfrak{P}_3 + \ldots = 0, \\ \mathrm{A}_2\mathfrak{P}_1 + \left(\frac{d}{dx} + \mathrm{B}_2\right)\mathfrak{P}_2 + \mathrm{C}_2\mathfrak{P}_3 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{A}_{n-1}\mathfrak{P}_1 + \mathrm{B}_{n-1}\mathfrak{P}_2 + \mathrm{C}_{n-1}\mathfrak{P}_3 + \ldots\ldots = 0, \end{cases}$$

au sens algébrique et même, par suite (vu la parité des deux modes d'enchaînement des opérations algébriques et infinitésimales), au sens symbolique, c'est-à-dire quand on fait suivre les premiers membres de (16) d'une fonction φ quelconque qui doit alors être, par les facteurs autres que $\frac{d}{dx}$, multipliée effectivement, mais, par chaque facteur $\frac{d}{dx}$, multipliée seulement symboliquement, c'est-à-dire différentiée en x.

Donc, quelle que soit la fonction auxiliaire φ, les formules (14) de $y, z, u, \ldots$ rendront identiques les $n - 1$ premières équations différentielles proposées. Et comme, de plus, elles transformeront évidemment la dernière en l'équation (15) où φ est la seule fonction inconnue, équation du $n^{\text{ième}}$ ordre et à coefficients constants, il suffira de trouver les n *solutions simples* de celle-ci, expressions de la forme $\varphi = x^m e^{\alpha x}(\cos\beta x \text{ ou } \sin\beta x)$, pour que les relations (14) où l'on fera ainsi $\varphi = x^m e^{\alpha x}(\cos\beta x \text{ ou } \sin\beta x)$ donnent, chaque fois, certaines

valeurs de $y, z, u, \ldots$ satisfaisant à (13), c'est-à-dire, en somme, les n systèmes que nous représentions respectivement, dans l'avant-dernière Leçon (p. 207), par $y_1, z_1, u_1, \ldots; y_2, z_2, u_2, \ldots; \ldots; y_n, z_n, u_n, \ldots$. Après quoi les expressions générales de $y, z, u, \ldots$ s'obtiendront en multipliant ces divers systèmes, ou *solutions simples* de (13), par tout autant de constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_n$, et en faisant la somme.

Or il est clair que les multiplications respectives par $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se trouveraient tout effectuées, en introduisant chaque fois la constante ou le facteur c dont il s'agit, dans l'expression correspondante de φ, c'est-à-dire en prenant celle-ci sous la forme $cx^m e^{\alpha x}(\cos\beta x$ ou $\sin\beta x)$, et que, de même, la superposition des n solutions simples se trouvera toute faite, pour les diverses fonctions $y, z, u, \ldots$, si, dans leurs expressions (14), on l'opère sur la fonction φ elle-même, en y remplaçant φ par l'intégrale générale de (15), expression de la forme

$$(17) \qquad \varphi = \Sigma c x^m e^{\alpha x}(\cos\beta x \text{ ou } \sin\beta x),$$

et non par l'un quelconque de ses termes. Bref, l'*intégrale générale du système proposé* (13) *s'obtiendra par l'intégration de l'équation unique* (15) *en* φ, *suivie du calcul de* $y, z, u, \ldots,$ *au moyen de* φ, *par les formules symboliques* (14).

On remarquera que l'équation algébrique à résoudre pour intégrer (15), ou celle dont il faudra décomposer le premier membre en ses facteurs réels irréductibles $r - a$, $r - b, \ldots, [(r-\alpha)^2 + \beta^2], \ldots$, se déduira de (15), par la substitution de r à $\frac{d}{dx}$ après suppression de φ, comme on a fait pour déduire (6) de (2) après suppression de y, et qu'elle pourra s'écrire

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} (r+A_1), & B_1, & C_1, & \ldots \\ A_2, & (r+B_2), & C_2, & \ldots \\ A_3, & B_3, & (r+C_3), & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Le cas particulier le plus simple, où la fonction auxiliaire φ se trouve, pour ainsi dire, donnée, est celui de l'équation unique (1) [p. 271*] examinée en premier lieu, quand on la considère comme équivalant au système

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}y - y' = 0, \quad \dfrac{d}{dx}y' - y'' = 0, \quad \ldots, \quad \dfrac{d}{dx}y^{(n-2)} - y^{(n-1)} = 0, \\ My + Ly' + \ldots + By^{(n-2)} + \left(\dfrac{d}{dx} + A\right)y^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Ce système rentre bien dans le type (13), où l'on appellerait maintenant y', y'', ... les fonctions z, u, ..., et où l'on poserait $A_1 = 0$, $B_1 = -1$, $C_1 = 0$, ..., $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, $C_2 = -1$, ... Les $n-1$ premières relations (19), *considérées comme algébriques,* reviennent à prendre soit y et y', soit y' et y'', ..., soit enfin $y^{(n-2)}$ et $y^{(n-1)}$, dans le rapport de 1 à $\frac{d}{dx}$, ou, par suite, à supposer $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ entre eux comme 1, $\frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$. Donc les formules (14) des fonctions inconnues se réduisent ici à

$$(20) \qquad y = \varphi, \qquad y' = \frac{d}{dx}\varphi, \qquad y'' = \frac{d^2}{dx^2}\varphi, \qquad \ldots, \qquad y^{(n-1)} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\varphi,$$

et la fonction auxiliaire φ n'est autre que y; de sorte que l'équation différentielle en φ, résultat de la substitution, dans la dernière (19), de ces valeurs (20) de $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, revient, comme il le fallait bien, à l'équation (1) elle-même, écrite sous sa forme symbolique (2) [p. 271*].

408*. — Expression la plus simple qui en résulte pour les intégrales générales d'un tel système sans seconds membres.

Quand, dans une solution simple, affectée d'une constante arbitraire c_1, l'expression de φ contiendra un facteur trigonométrique, un cosinus par exemple, ou que le coefficient β de l'arc βx n'y sera pas nul, on trouvera tout avantage à grouper cette solution simple avec son analogue, dans laquelle figurera le même arc βx, mais sous le signe sinus, affectée d'une autre constante arbitraire c_2; car l'expression de la *solution double* ainsi composée deviendra aisément aussi peu complexe, et aussi facile à interpréter, que celle d'une seule des solutions simples la constituant. Il suffira, en effet, de poser, comme on le peut toujours, $c_1 = C\cos c$, $c_2 = C\sin c$, où C et c seront deux nouvelles constantes arbitraires, pour que la partie de φ relative à cette solution double, savoir $x^m e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$, devienne $Cx^m e^{\alpha x}\cos(\beta x - c)$, ou très semblable à $cx^m e^{\alpha x}\cos\beta x$.

Si l'on se borne d'abord au cas ordinaire d'une équation caractéristique (18) dépourvue de racines égales, il ne restera donc dans l'expression générale de φ (vu l'annulation de tous les exposants m) que des termes de la forme $Ce^{\alpha x}\cos(\beta x - c)$, qui, différentiés autant de fois qu'on le voudra, ne donneront jamais que deux sortes de termes, produits respectifs de coefficients dépendant uniquement de α et de β par $Ce^{\alpha x}\cos(\beta x - c)$ ou par $Ce^{\alpha x}\sin(\beta x - c)$. Par suite, les expressions

correspondantes (14) de $y, z, u, \ldots$ ne comprendront également, chacune, que deux termes analogues, à coefficients fonctions entières de ceux des $n-1$ premières équations proposées (13), ainsi que de α et β, mais indépendants des constantes arbitraires C, c; et si l'on appelle, pour y, par exemple, l_1, l_2 ces deux coefficients, ou que la solution double considérée donne

$$y = \mathrm{C}e^{\alpha x}[l_1 \cos(\beta x - c) + l_2 \sin(\beta x - c)],$$

on pourra, en posant $l_1 = \lambda \cos\gamma$, $l_2 = \lambda \sin\gamma$, écrire plus simplement $y = \mathrm{C}e^{\alpha x}\lambda \cos(\beta x - c - \gamma)$.

En résumé, désignons : 1° par $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ les diverses racines r, réelles (avec $\beta = 0$) ou imaginaires, de l'équation (18), racines où α et β sont certaines fonctions de tous les coefficients A_1, B_1, $C_1, \ldots$, $A_2, \ldots$ du système proposé (13); 2° par λ et γ, μ et δ, ν et $\varepsilon, \ldots$ des constantes dépendant des coefficients de $n-1$ quelconques de ces équations proposées (13), ainsi que de α et β, tous paramètres dont les quantités $\lambda\cos\gamma$ et $\lambda\sin\gamma$, $\mu\cos\delta$ et $\mu\sin\delta$, $\nu\cos\varepsilon$ et $\nu\sin\varepsilon, \ldots$ seront même de simples fonctions entières; 3° par C, c des constantes dépendant de l'*état initial* (c'est-à-dire, par exemple, des valeurs arbitraires y_0, z_0, $u_0, \ldots$ attribuées aux fonctions $y, z, u, \ldots$ quand $x = 0$), mais non des équations proposées (13); 4°, enfin, par Σ une somme d'autant de termes, analogues au terme inscrit à la suite de ce signe, qu'il y aura de couples de valeurs α et β ou de couples de constantes C, c; et les expressions générales de φ, $y, z, u, \ldots$ seront

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi = \Sigma\, \mathrm{C}e^{\alpha x}\cos(\beta x - c),\\ y = \Sigma\, \mathrm{C}\lambda e^{\alpha x}\cos(\beta x - c - \gamma),\\ z = \Sigma\, \mathrm{C}\mu e^{\alpha x}\cos(\beta x - c - \delta),\\ u = \Sigma\, \mathrm{C}\nu e^{\alpha x}\cos(\beta x - c - \varepsilon),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Elles deviennent plus complexes dans le cas exceptionnel de racines égales, cas où, pour ces racines, la somme Σ s'accroît, dans φ, de termes de la forme $\mathrm{C}x^m e^{\alpha x}\cos(\beta x - c)$, c'est-à-dire $\mathrm{C}\dfrac{d^m}{d\alpha^m}[e^{\alpha x}\cos(\beta x - c)]$. Or, d'après les formules mêmes (14) servant à composer les valeurs de $y, z, u, \ldots$, ces termes en donnent, dans $y, z, \ldots$, d'autres ayant $\left(\text{vu la possibilité d'intervertir } \dfrac{d}{dx} \text{ et } \dfrac{d}{d\alpha}\right)$ les expressions respectives

$$\mathrm{C}\frac{d^m}{d\alpha^m}[\mathfrak{P}_1.e^{\alpha x}\cos(\beta x - c)],\quad \mathrm{C}\frac{d^m}{d\alpha^m}[\mathfrak{P}_2.e^{\alpha x}\cos(\beta x - c)],\quad \ldots,$$

c'est-à-dire,

$$C\frac{d^m}{dx^m}[\lambda e^{\alpha x}\cos(\beta x - c - \gamma)], \quad C\frac{d^m}{dx^m}[\mu e^{\alpha x}\cos(\beta x - c - \delta)], \quad \ldots,$$

où il n'y a plus seulement le facteur $e^{\alpha x}$, mais aussi λ et γ, μ et δ, ..., à faire varier en fonction de α. Ces termes se dédoublent donc et en fournissent de nouveaux où, à part les cas d'exacte destruction mutuelle, figurent quelques-uns au moins des facteurs algébriques x, x^2, x^3, ..., x^m, de degrés moindres que celui de multiplicité des racines $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$. Mais les seuls facteurs *transcendants* paraissant dans les diverses parties des résultats sont toujours, en définitive, $e^{\alpha x}\cos(\beta x - c)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x - c)$; et l'*état initial* n'influe encore que sur le coefficient général C de chaque solution simple ou double et sur la partie $-c$ de l'arc correspondant $\beta x - c$. Il ne change rien au mode d'association de ces facteurs transcendants avec les facteurs algébriques x^m ou aux rapports mutuels des coefficients affectant les termes partiels dont se compose, pour chaque fonction inconnue y, z, u, ..., la solution simple ou double considérée.

409*. — Formes plus spéciales imposées aux solutions simples ou doubles par la nature particulière des phénomènes à exprimer.

Il arrivera souvent, dans les applications physiques, que la nature du phénomène étudié, ou des circonstances de son évolution trop générales pour pouvoir échapper même aux observations les plus grossières, feront connaître, avant toute étude analytique, d'intéressantes particularités sur la forme des solutions simples.

Par exemple, s'il s'agit de petits changements produits dans le voisinage d'un état d'équilibre ou permanent dont la *stabilité* soit assurée, y, z, u, ... ne pourront, quelque grand que devienne le temps x, croître indéfiniment, même dans la supposition d'un état initial où subsisterait une seule quelconque des constantes C : et, par suite, aucune des parties réelles α des racines de l'équation (18) ne devra être positive; car le facteur $e^{\alpha x}$, où α serait positif, rendrait inévitablement infinie, pour $x = \infty$, la solution simple ou double correspondante dans laquelle il figurerait et dont la constante C différerait de zéro.

Et s'il résulte, en outre, de la nature de la question, que les changements ou mouvements étudiés ne puissent pas plus décroître indéfiniment, c'est-à-dire *s'éteindre*, que croître, comme il arriverait dans le cas des vibrations d'un corps isolé *parfaitement élastique*, on

pourra en conclure : 1° que les parties réelles α des racines ne seront pas non plus négatives et s'annuleront, sans quoi les facteurs $e^{\alpha x}$ entraîneraient l'*extinction* ou évanouissement asymptotique des changements $y, z, u, \ldots$; 2° que les racines, ainsi réduites à leurs parties purement imaginaires $\pm \beta\sqrt{-1}$, ne pourront être d'un degré de multiplicité supérieur à l'unité, si ce n'est dans des cas où les termes de $y, z, u, \ldots$ à facteurs algébriques x^m, introduits par l'égalité de deux ou plusieurs d'entre elles, auraient, à raison même des valeurs spéciales de ces racines multiples, tous leurs coefficients (dans le genre de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$) égaux à zéro; car de tels facteurs x^m, n'étant plus masqués par des exponentielles évanouissantes, feraient croître indéfiniment, avec x, les parties correspondantes de $y, z, u, \ldots$. Donc, de toute manière, les solutions simples seront alors en nombre pair et, associées deux à deux, donneront, dans $y, z, u, \ldots$, des expressions purement périodiques, de la forme que nous avons appelée *pendulaire* (p. 221) :

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= C\lambda\cos(\beta x - c - \gamma),\\ z &= C\mu\cos(\beta x - c - \delta),\\ u &= C\nu\cos(\beta x - c - \varepsilon),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

On voit que ces valeurs de $y, z, u, \ldots$ sont *pendulaires* et *isochrones*, ou admettent la même *période* $\frac{2\pi}{\beta}$ $\left(\text{car les arcs } \beta x - c - \gamma,\ \beta x - c - \delta, \ldots \text{ croissent de } 2\pi \text{ quand } x \text{ grandit de } \frac{2\pi}{\beta}\right)$. Mais elles n'atteignent pas aux mêmes instants x ce qu'on appelle les mêmes *phases*, c'est-à-dire leurs valeurs maxima, ou leurs valeurs nulles, bref, des valeurs égales à une même fraction de leurs maximums respectifs (*demi-amplitudes*) $\lambda C, \mu C, \ldots$. Les *différences de phase* ou, plus précisément, les *retards* $\frac{\gamma}{\beta}, \frac{\delta}{\beta}, \cdots$ des phases de $y, z, \ldots$ sur celles de $\cos(\beta x - c)$, quantités dont il faut que x s'accroisse pour que $\cos(\beta x - c - \gamma)$, $\cos(\beta x - c - \delta), \ldots$, respectivement, deviennent égaux à $\cos(\beta x - c)$, *dépendent, comme la période* $\frac{2\pi}{\beta}$, de la *nature du système,* c'est-à-dire des équations différentielles (13) qui le régissent, mais *non de l'état initial,* représenté seulement, dans la solution double dont il s'agit, par les deux constantes arbitraires C et c. Ainsi, *chaque solution double, toujours semblable à elle-même, intervient, dans l'expression du mouvement général, en proportion*

de son coefficient d'amplitude C, *naturellement d'autant plus grand, par rapport à ceux des autres solutions doubles, que l'état initial donné a plus d'analogie avec celui qu'elle exprime elle-même* pour la valeur initiale choisie $x=0$ de la variable.

Le cas le plus simple, qui se présente dans l'étude des petits mouvements d'un système matériel élastique, est celui où la moitié des fonctions inconnues $y, z, u, \ldots$ sont, par exemple, les *déplacements* (suivant trois axes coordonnés) de divers points mobiles, l'autre moitié, les *vitesses,* dérivées de ces *déplacements* par rapport au temps x, et où, *pour ceux-ci,* que je supposerai être $y, z, u, \ldots$, les expressions (14) ne contiennent le facteur symbolique $\frac{d}{dx}$ qu'*affecté d'exposants pairs.* Alors chaque terme de φ, réduit par les considérations précédentes à la forme $\mathrm{C}x^m \cos(\beta x - c)$, avec m nul le plus souvent, ne figure dans $y, z, u, \ldots$ que par lui-même ou par ses dérivées paires. Or, si on le différentie un nombre pair quelconque de fois, le résultat se compose de termes dont tous proviennent, dans leurs diverses parties, de ce nombre pair de différentiations effectuées, les unes, k par exemple, sur le facteur algébrique x^m, dont elles abaissent l'exposant à $m-k$, les autres, sur le facteur trigonométrique, qui, abstraction faite du signe, reste $\cos(\beta x - c)$ ou devient $\sin(\beta x - c)$, suivant que k est pair ou impair. D'ailleurs l'on n'aura ici à considérer, dans le résultat en question, que le terme dont le facteur algébrique x^{m-k} égale 1, ou pour lequel $k=m$, puisque, *finalement,* il contribuera seul à former les expressions de $y, z, u, \ldots$, tenues, par hypothèse, de ne pas croître sans limite avec x; et l'on voit que, dans *la totalité* des expressions correspondantes (14) de $y, z, u, \ldots$, ce terme sera ou constamment proportionnel à $\cos(\beta x - c)$, ou constamment proportionnel à $\sin(\beta x - c)$, facteur qui, écrit $\left(\cos \beta x - c - \frac{\pi}{2}\right)$, présente la même forme générale

$$\cos(\beta x - \text{const.}).$$

Donc, tant qu'il s'agira des déplacements $y, z, u, \ldots$, mais non des *vitesses,* ni même de φ *si m est impair,* on pourra poser $\gamma=0$, $\delta=0$, $\varepsilon=0, \ldots$ dans les formules (22), sous la seule condition d'attribuer, quand il le faudra, le signe — aux coefficients $\lambda, \mu, \nu, \ldots$. Les fonctions $y, z, u, \ldots$ sont ainsi, comme on dit, *synchrones;* ce qui signifie qu'elles se trouvent, toutes à la fois, aux mêmes phases de leurs variations, comptées positivement, pour chacune, dans un sens convenable.

Il est bon d'observer d'ailleurs que, pareillement aux expressions (14) de y, z, u, ..., l'équation (15), en φ, ne contiendra le facteur symbolique $\frac{d}{dx}$ qu'à des puissances paires, puisque, toutes les racines r y allant par couples et ayant leurs parties réelles α nulles, le premier membre de (15) ne se composera que de facteurs symboliques de la forme $\left(\frac{d}{dx} - \alpha\right)^2 + \beta^2$, réduits à $\frac{d^2}{dx^2} + \beta^2$. On voit même que cette circonstance est liée seulement à la périodicité de chaque solution double (22) et n'exigerait pas le synchronisme de y, z, u, ...

410*. — Application aux petits mouvements vibratoires d'un système élastique : possibilité d'y reproduire un état initial arbitraire en superposant de simples mouvements pendulaires synchrones, etc.

La présence du symbole $\frac{d^2}{dx^2}$, au lieu de $\frac{d}{dx}$, dans les expressions (14) de petits déplacements *élastiques* y, z, u, ... et dans l'équation (15) en φ, provient de ce que les équations différentielles sont alors, en réduisant leur nombre de moitié par l'élimination des vitesses $y' = \frac{dy}{dx}$, $z' = \frac{dz}{dx}$, $u' = \frac{du}{dx}$, ..., du second ordre et de la forme

$$(23)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^2}{dx^2} + A_1\right) y + B_1 z + C_1 u + \ldots = 0, \\ A_2 y + \left(\frac{d^2}{dx^2} + B_2\right) z + C_2 u + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

ou analogues à (13), mais avec $\frac{d^2}{dx^2}$ au lieu de $\frac{d}{dx}$. Or celles-ci (23), traitées exactement comme l'a été le système (13), donnent pour y, z, u, ... des expressions pareilles à (14) et une équation en φ pareille à (15), sauf partout la même substitution de $\frac{d^2}{dx^2}$ à $\frac{d}{dx}$; et, comme la double condition physique de stabilité et de non-extinction s'y applique encore de même pour prouver, avec l'absence de racines r égales ou, du moins, de tout facteur algébrique chez y, z, u, ... dans les solutions simples qui leur correspondraient, l'annulation des parties réelles α des racines r, le premier membre de (15) se décompose en facteurs symboliques exclusivement de la forme $\frac{d^2}{dx^2} + \beta^2$.

De ce système (23), à racines r purement imaginaires et à solutions doubles, toutes pendulaires synchrones, donnant par leur

superposition

$$(24)\quad \begin{cases} y = \Sigma C\lambda \cos(\beta x - c), \\ z = \Sigma C\mu \cos(\beta x - c), \\ u = \Sigma C\nu \cos(\beta x - c), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

on déduit aisément un second système, à racines r toutes réelles et négatives, c'est-à-dire à solutions simples sans facteur périodique, mais où les expressions partielles correspondantes de $y, z, u, \dots$ sont proportionnelles à une même exponentielle décroissante $e^{-\beta^2 x}$. Il suffit, pour cela, de remplacer partout, d'un côté, dans (23), $\frac{d^2}{dx^2}$ par $\frac{d}{dx}$, ce qui conduit à un système de la forme (13), et, d'un autre côté, dans (24), $\cos(\beta x - c)$ par $e^{-\beta^2 x}$, ce qui donne en même temps, pour ses intégrales,

$$(25)\quad y = \Sigma C\lambda e^{-\beta^2 x}, \qquad z = \Sigma C\mu e^{-\beta^2 x}, \qquad u = \Sigma C\nu e^{-\beta^2 x}, \qquad \dots$$

En effet, si l'on considère à part chaque solution simple, où y, $z, u, \dots$ varient proportionnellement au facteur commun $\cos(\beta x - c)$ dans (24) et $e^{-\beta^2 x}$ dans (25), les premiers membres de (23) s'y trouvent identiques à ceux de (13), abstraction faite de ce facteur commun variable qui s'en élimine par division; car deux différentiations de $\cos(\beta x - c)$ et une seule de $e^{-\beta^2 x}$ le multiplient également par $-\beta^2$. Il suffira donc que les intégrales de (23) soient (24), pour que celles de (13) soient (25). Et si, l'équation en β^2 ayant des racines multiples, une même valeur de β a donné dans (24) $m+1$ systèmes de rapports de $\lambda, \mu, \nu, \dots$, ou $m+1$ solutions doubles, elle donnera aussi, dans (25), tous ces systèmes de rapports, c'est-à-dire $m+1$ solutions simples sans aucun facteur algébrique en $x, x^2, \dots, x^m$; ce qui indiquera, pour les équations (13), la même absence d'intégrales à facteurs algébriques que pour les équations (25) [1].

---

[1] Voici comment on peut vérifier ce fait sur les expressions respectives de y, $z, u, \dots$ qui correspondent à une valeur simple quelconque,

$$x^m e^{-\beta^2 x} \quad \text{ou} \quad x^m \cos(\beta x - c),$$

de φ, expressions dont les formes sont, avec des coefficients constants $a_0, a_1, \dots$, $a_p, \dots$,

$$\left(a_0 + a_1 \frac{d}{dx} + \dots + a_p \frac{d^p}{dx^p} + \dots\right)(x^m e^{-\beta^2 x})$$

pour le système (13), et

$$\left(a_0 + a_1 \frac{d^2}{dx^2} + \dots + a_p \frac{d^{2p}}{dx^{2p}} + \dots\right)[x^m \cos(\beta x - c)]$$

Prenons successivement, dans (24), $c=0$ et $c=\frac{\pi}{2}$, en remplaçant d'ailleurs partout, dans le second cas, les constantes C par d'autres non moins arbitraires, que nous écrirons $\frac{C}{\beta}$. Il viendra, pour (23), les deux groupes partiels d'intégrales

$$(26)\quad \begin{cases} y=\Sigma C\lambda\cos\beta x, & z=\Sigma C\mu\cos\beta x, & u=\Sigma C\nu\cos\beta x,\ldots; \\ y=\Sigma C\frac{\lambda}{\beta}\sin\beta x, & z=\Sigma C\frac{\mu}{\beta}\sin\beta x, & u=\Sigma C\frac{\nu}{\beta}\sin\beta x,\ldots; \end{cases}$$

---

pour le système (23). Afin d'abréger, nous les représenterons respectivement par

$$\sum a_p\frac{d^p.x^m e^{-\beta^2 x}}{dx^p}\quad\text{et}\quad\sum a_p\frac{d^{2p}.x^m\cos(\beta x-c)}{dx^{2p}}.$$

Pour les développer, il faut savoir former la dérivée $p^{\text{ième}}$ quelconque d'un produit uv, à facteurs u et v fonctions de x, qui seront ici, l'un, $u=x^m$, et, l'autre, $v=e^{-\beta^2 x}$ ou $v=\cos(\beta x-c)$. A cet effet, l'on observe que chaque terme, de la forme $K\frac{d^i u}{dx^i}\frac{d^j v}{dx^j}$, faisant partie de toute dérivée, $(i+j)^{\text{ième}}$, de uv, se dédouble, quand on différentie une fois de plus, exactement comme le fait le terme en $u^i v^j$ de la puissance $(i+j)^{\text{ième}}$ du binôme $u+v$ quand on le multiplie par $u+v$ pour avoir la puissance suivante; et, partant de la dérivée première

$$\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx},$$

on déduit aisément de cette analogie, pour $\frac{d^p.uv}{dx^p}$, la formule suivante, due à Leibnitz, calquée sur celle de $(u+v)^p$ ou, ce qui revient au même, de $(v+u)^p$,

$$\frac{d^p.uv}{dx^p}=u\frac{d^p v}{dx^p}+\frac{p}{1}\frac{du}{dx}\frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}+\frac{p(p-1)}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{p-2}v}{dx^{p-2}}+\ldots.$$

Alors, en faisant $u=x^m$ et $v=$ soit $e^{-\beta^2 x}$, soit $\cos(\beta x-c)$, les deux expressions à évaluer deviennent respectivement

$$\begin{cases} \left[\sum(-\beta^2)^p a_p\right]x^m e^{-\beta^2 x}-\left[\sum\frac{p}{1}(-\beta^2)^p a_p\right]\frac{d.x^m}{dx}\frac{e^{-\beta^2 x}}{\beta^2} \\ \quad+\left[\sum\frac{p(p-1)}{1.2}(-\beta^2)^p a_p\right]\frac{d^2.x^m}{dx^2}\frac{e^{-\beta^2 x}}{\beta^4} \\ \quad-\left[\sum\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(-\beta^2)^p a_p\right]\frac{d^3.x^m}{dx^3}\frac{e^{-\beta^2 x}}{\beta^6}+\ldots \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \left[\sum(-\beta^2)^p a_p\right]x^m\cos(\beta x-c)+\left[\sum\frac{2p}{1}(-\beta^2)^p a_p\right]\frac{d.x^m}{dx}\frac{\sin(\beta x-c)}{\beta} \\ \quad-\left[\sum\frac{2p(2p-1)}{1.2}(-\beta^2)^p a_p\right]\frac{d^2.x^m}{dx^2}\frac{\cos(\beta x-c)}{\beta^2} \\ \quad-\left[\sum\frac{2p(2p-1)(2p-2)}{1.2.3}(-\beta^2)^p a_p\right]\frac{d^3.x^m}{dx^3}\frac{\sin(\beta x-c)}{\beta^3}+\ldots. \end{cases}$$

Cela posé, si $m=1$, ces développements se réduisent à leurs deux premiers

et ceux-ci, différentiés pour obtenir, dans chacun, l'expression des vitesses y', z', u', ..., donneront respectivement

(27) $$\begin{cases} y' = -\Sigma C\beta\lambda \sin\beta x, & z' = -\Sigma C\beta\mu \sin\beta x, & u' = -\Sigma C\beta\nu \sin\beta x, & \ldots; \\ y' = \Sigma C\lambda \cos\beta x, & z' = \Sigma C\mu \cos\beta x, & u' = \Sigma C\nu \cos\beta x, & \ldots \end{cases}$$

On voit, en faisant $x = 0$ dans (26) et (27), que le premier groupe (26) correspond à un état initial où les vitesses y'_0, z'_0, u'_0, ... sont nulles, et, les déplacements y_0, z_0, u_0, ..., exprimés par les formules

(28) $$y_0 = \Sigma C\lambda, \qquad z_0 = \Sigma C\mu, \qquad u_0 = \Sigma C\nu, \qquad \ldots,$$

tandis que le second groupe (26) correspond à des déplacements initiaux y_0, z_0, u_0, ... nuls et à des vitesses initiales y'_0, z'_0, u'_0, ... exprimées, de même, par les formules

(29) $$y'_0 = \Sigma C\lambda, \qquad z'_0 = \Sigma C\mu, \qquad u'_0 = \Sigma C\nu, \qquad \ldots.$$

La superposition des deux types (26) d'intégrales, en y attribuant aux constantes C, dans chacun, des valeurs distinctes, représentera donc les petits mouvements les plus généraux du système élastique, pourvu qu'un choix convenable de ces valeurs C rende arbitrairement disponibles les expressions $\Sigma C\lambda$, $\Sigma C\mu$, $\Sigma C\nu$, ... Or celles-ci constituent précisément, d'après (25), les valeurs y_0, z_0, u_0, ..., pour $x = 0$, des fonctions y, z, u, ... régies par les équations (13), plus simples que (23), et où toutes les racines de l'équation caractéristique (18) ont, par hypothèse, la forme *réelle* $r = -\beta^2$. Ainsi, pour achever de montrer comment s'exprimeront par les formules (24) tous les mouvements obéissant aux équations (23), dans notre système matériel élastique très peu écarté d'un état d'équilibre stable, il ne nous reste qu'à assigner les valeurs des constantes C propres à rendre,

---

termes, et la condition pour qu'il n'y subsiste que le terme en x^0 (ou indépendant du facteur algébrique) est $\Sigma(-\beta^2)^p a_p = 0$. Si $m = 2$, les développements comprennent les trois premiers termes et, pour qu'ils se réduisent encore au dernier, il vient, outre la même condition, celle-ci, également commune, $\Sigma p(-\beta^2)^p a_p = 0$. Si $m = 3$, l'on a, avec un terme de plus, une nouvelle condition à joindre aux précédentes, savoir, dans le cas du premier développement, $\Sigma p(p-1)(-\beta^2)^p a_p = 0$, et, dans celui du deuxième, $\Sigma 2p(2p-1)(-\beta^2)^p a_p = 0$, relations que la condition précédente réduit identiquement à $\Sigma p^2(-\beta^2)^p a_p = 0$. De même, si $m = 4$, on aura en plus, de part et d'autre, la relation

$$\Sigma p^3(-\beta^2)^p a_p = 0.$$

Et ainsi de suite, avec identité évidente des conditions, indéfiniment continuée dans les deux cas.

pour $x = 0$, les expressions (25) de y, z, u, ... égales à des quantités données quelconques, lorsque toutes les racines de l'équation (18) en r sont réelles et que d'ailleurs il n'existe pas de solution simple où figurent dans y, z, u, ... des facteurs algébriques en x. C'est précisément ce que nous ferons, d'après Cauchy, au nº 412* (p. 297*).

Les considérations exposées ici, étant indépendantes du nombre des équations données, auront pour principal résultat de révéler la forme analytique générale des fonctions inconnues, dans des cas où, vu la multitude des particules matérielles en jeu, ce nombre sera trop grand pour pouvoir être fixé et deviendra en quelque sorte infini. Alors les types (26) d'intégrales, à termes pendulaires et synchrones, seront utilisés spécialement dans l'étude des mouvements vibratoires, et le type (25), à termes sans cesse décroissants, proportionnels à une exponentielle *évanescente* (c'est-à-dire qui tend vers zéro quand x grandit), le seront surtout dans la théorie du refroidissement des corps.

Des solutions mixtes plus compliquées, empruntées à la forme (21) avec *coefficients d'extinction* α négatifs, deviendraient nécessaires s'il s'agissait d'exprimer la graduelle absorption du mouvement par un système matériel imparfaitement élastique, etc., ou, d'une manière générale, l'asymptotique évanouissement d'écarts y, z, u, ... existant entre l'état effectif d'un système et son état de régime soit permanent, soit périodique, sous l'influence de causes constantes ou périodiques elles-mêmes, comme on a vu par un exemple simple au nº 399 (p. 225).

411*. — Méthode d'Euler pour l'intégration des équations linéaires sans seconds membres et à coefficients constants.

Quand les racines r de l'équation (18) sont toutes réelles, ou que (en écartant d'abord le cas exceptionnel de racines égales) les solutions simples ont visiblement, pour φ, la forme unique e^{rx} et, pour y, z, u, ..., d'après (14), la forme, unique aussi,

$$(30) \qquad y = \lambda e^{rx}, \qquad z = \mu e^{rx}, \qquad u = \nu e^{rx}, \qquad \ldots,$$

l'intégration du système (13) peut s'effectuer plus simplement que nous n'avons fait, en se donnant *a priori* cette forme (30) des n groupes cherchés d'intégrales particulières, et en y déterminant les constantes r, λ, μ, ν, ... par la substitution même des expressions (30) de y, z, u, ... dans les équations (13). Le facteur e^{rx} étant commun à tous les termes, sa suppression donne entre λ, μ, ν, ... et r les n

relations, homogènes du premier degré en λ, μ, ν, ...,

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} (r+A_1)\lambda + B_1\mu + C_1\nu + \ldots = 0, \\ A_2\lambda + (r+B_2)\mu + C_2\nu + \ldots = 0, \\ A_3\lambda + B_3\mu + (r+C_3)\nu + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Or, vu l'analogie de forme de ces équations (31) avec (13), qu'on leur identifierait par les simples changements de $y, z, u, \ldots$ en $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ et de $\frac{d}{dx}$ en r, $n-1$ d'entre elles, les $n-1$ premières, par exemple, donneront pour $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, qui ne sont déterminés, dans (30), qu'à un facteur constant arbitraire près, les expressions désignées dans les formules (14) par $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \ldots$, sauf toujours la substitution de r à $\frac{d}{dx}$; et alors la relation (31) non encore employée, savoir la dernière, deviendra $A_n\mathfrak{P}_1 + B_n\mathfrak{P}_2 + \ldots = 0$, c'est-à-dire précisément l'équation (18), dont nous appellerons ici $f(r)$ le premier membre et que nous écrirons, par conséquent,

$$(32)\qquad f(r) = \begin{vmatrix} (r+A_1), & B_1, & C_1, & \ldots \\ A_2, & (r+B_2), & C_2, & \ldots \\ A_3, & B_3, & (r+C_3), & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Il est clair que les valeurs non seulement de r, mais aussi de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ ainsi déterminées, ne différeront pas de celles que donne la méthode exposée plus haut; car on y était précisément conduit à substituer r à $\frac{d}{dx}$ dans les formules (14) dès que, φ désignant e^{rx}, $\frac{d\varphi}{dx}$ devenait re^{rx} ou $r\varphi$.

Tel est le procédé classique, dû à Euler, pour intégrer les équations linéaires sans seconds membres et à coefficients constants. On l'étend au cas de racines imaginaires $r = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, en introduisant des exponentielles imaginaires $e^{(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})x}$, que l'on peut, comme nous avons vu (p. 17*), différentier en x à la manière d'exponentielles réelles, et en introduisant aussi, par suite, des valeurs imaginaires de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, conjuguées deux à deux comme celles de r : il suffit d'affecter les groupes de solutions simples, ainsi conjugués deux à deux, de constantes imaginaires c conjuguées aussi, pour que, grâce à une transformation exposée vers le commencement de ce Cours (T. I, p. 43*), leur superposition conduise aux solutions réelles doubles directement données par notre méthode.

Dans le cas exceptionnel de racines égales, on pourrait, laissant invariables les coefficients des $n-1$ premières équations (13) et, par suite, les expressions de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ en fonction de ces coefficients et de r, altérer très peu les n coefficients de la dernière équation (13), de la manière qu'il faut pour rendre les n valeurs de r variables à volonté dans le voisinage de leurs valeurs assignées, et pour rendre, par exemple, mutuellement *équidistantes* les $m+1$ d'entre elles destinées à devenir égales. Alors un raisonnement développé plus haut (p. 274*) donnerait, pour les $m+1$ solutions simples correspondant à une racine r du degré $m+1$ de multiplicité, en ce qui concerne, par exemple, la fonction y, les $m+1$ expressions λe^{rx}, $\frac{d}{dr}(\lambda e^{rx})$, ..., $\frac{d^m}{dr^m}(\lambda e^{rx})$.

412*. — Détermination des constantes arbitraires, effectuée par Cauchy.

Mais, revenant, pour fixer les idées, au cas d'une équation caractéristique (32) à racines toutes réelles (sauf à étendre encore les résultats, si c'était nécessaire, au cas de racines quelconques, par l'emploi d'exponentielles imaginaires), occupons-nous de déterminer, d'après Cauchy, en fonction des valeurs $y_0, z_0, u_0, \ldots$ *initiales* (ou relatives à $x=0$) des fonctions inconnues $y, z, u, \ldots$, les constantes arbitraires dont il faudra affecter les diverses solutions simples; ce qui montrera la parfaite distinction des n systèmes de solutions simples obtenues et la légitimité de leur emploi pour la formation des intégrales générales.

A cet effet, observons d'abord que, suivant l'équation dont on fera abstraction dans le système (31) pour composer $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, on obtiendra n groupes différents de ces expressions $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ déterminées seulement quant à leurs rapports. Nous appellerons $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots$ celles qu'on obtient en écartant la première équation (31) ou en se servant des $n-1$ dernières. Ce seront respectivement les déterminants

$$(33)\quad \lambda_1 = \begin{vmatrix} (r+B_2), & C_2, & \ldots \\ B_3, & (r+C_3), & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \qquad \mu_1 = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} C_2, & \ldots, & A_2 \\ r+C_3, & \ldots, & A_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}, \ldots,$$

dont le premier à $n-1$ éléments contenant r et, les autres, $n-2$; de sorte que le développement de λ_1 contient un terme en r^{n-1}, savoir le premier terme, à coefficient 1, du produit $(r+B_2)(r+C_3)\ldots$, tandis

qu'il y a seulement des termes en r^{n-2}, r^{n-3}, ... dans les développements de μ_1, ν_1, ... Nous appellerons pareillement λ_2, μ_2, ν_2, ... les expressions de λ, μ, ν, ... formées en abstrayant la seconde équation (31), expressions dont la seconde, μ_2, commencera, comme λ_1, par le terme r^{n-1}, et, les autres, par un terme moins élevé. De même encore, λ_3, μ_3, ν_3, ..., expressions dont la troisième seule aura pour premier terme r^{n-1}, désigneront ce que deviennent λ, μ, ν, ... quand on n'y fait pas figurer les coefficients de la troisième équation (31); et ainsi de suite, jusqu'aux expressions λ_n, μ_n, ν_n, ..., les seules que nous eussions précédemment, pour fixer les idées, appelées λ, μ, ν, ... On sait d'ailleurs que le déterminant général $f(r)$, introduit jusqu'ici comme étant la somme $A_n\lambda_n + B_n\mu_n + \ldots$, aura l'une quelconque des formes suivantes

$$(34)\quad \begin{cases} f(r) = (r + A_1)\lambda_1 + B_1\mu_1 + C_1\nu_1 + \ldots \\ \qquad = A_2\lambda_2 + (r + B_2)\mu_2 + C_2\nu_2 + \ldots \\ \qquad = A_3\lambda_3 + B_3\mu_3 + (r + C_3)\nu_3 + \ldots \\ \qquad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Cela posé, admettons d'abord l'inégalité des n racines r de l'équation $f(r) = 0$, ou la non-annulation de la dérivée $f'(r)$ quand $f(r)$ s'annule. Comme nous n'aurons aucune raison, pour une solution simple quelconque où $y, z, u, \ldots$ seront λe^{rx}, μe^{rx}, νe^{rx}, ..., de préférer les premières expressions de λ, μ, ν, ou les secondes, etc., proportionnelles d'ailleurs les unes aux autres, il sera naturel de les employer toutes à la fois *en les superposant convenablement;* ce qui permettra de diviser chaque solution simple en n parties, dont, *par une extension non moins naturelle des principes de superposition et de proportionnalité,* on attribuera la première, affectée des coefficients λ_1, μ_1, ν_1, ..., à l'influence de y_0, la deuxième, affectée de λ_2, μ_2, ν_2, ... à celle de z_0, et ainsi de suite. Bref, on posera

$$(35)\quad \begin{cases} \lambda = y_0\lambda_1 + z_0\lambda_2 + u_0\lambda_3 + \ldots, \\ \mu = y_0\mu_1 + z_0\mu_2 + u_0\mu_3 + \ldots, \\ \nu = y_0\nu_1 + z_0\nu_2 + u_0\nu_3 + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Enfin, la constante, *finie,* dont devront être affectées les expressions λe^{rx}, μe^{rx}, ... de y, z, ... changera d'une solution simple à l'autre, mais non d'une des variables y, z, ... à l'autre; et c'est ce que nous rappellerons en l'exprimant par $\frac{1}{\psi(r)}$. Son inverse, $\psi(r)$, ne sera

astreint qu'à ne pas s'annuler pour la racine r caractérisant la solution simple; et l'on pourra, à cela près, lui attribuer des valeurs quelconques permettant de satisfaire à l'état initial, s'il en existe de telles.

La solution générale, formée par superposition des n solutions simples dans chacune desquelles $y, z, u, \ldots$ auront ainsi les formes respectives $\frac{\lambda}{\psi(r)} e^{rx}$, $\frac{\mu}{\psi(r)} e^{rx}$, $\frac{\nu}{\psi(r)} e^{rx}, \ldots$, s'écrira donc, vu les formules (35) de $\lambda, \mu, \nu, \ldots$,

$$(36)\quad \begin{cases} y = y_0 \sum \frac{\lambda_1}{\psi(r)} e^{rx} + z_0 \sum \frac{\lambda_2}{\psi(r)} e^{rx} + u_0 \sum \frac{\lambda_3}{\psi(r)} e^{rx} + \ldots, \\ z = y_0 \sum \frac{\mu_1}{\psi(r)} e^{rx} + z_0 \sum \frac{\mu_2}{\psi(r)} e^{rx} + u_0 \sum \frac{\mu_3}{\psi(r)} e^{rx} + \ldots, \\ u = y_0 \sum \frac{\nu_1}{\psi(r)} e^{rx} + z_0 \sum \frac{\nu_2}{\psi(r)} e^{rx} + u_0 \sum \frac{\nu_3}{\psi(r)} e^{rx} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On voit que les conditions à vérifier par les n valeurs de $\psi(r)$, pour que ces expressions de $y, z, u, \ldots$ se réduisent identiquement, quand $x=0$, à $y_0, z_0, u_0, \ldots$, seront, réunies en deux groupes,

$$(37)\quad \sum \frac{(\lambda_1, \mu_2, \nu_3, \ldots)}{\psi(r)} = 1, \qquad \sum \frac{(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \mu_1, \ldots, \nu_1, \nu_2, \ldots)}{\psi(r)} = 0.$$

Or une propriété des fractions rationnelles démontrée plus haut [p. 21*, form. (5)] prouve que, $\lambda_1, \mu_2, \nu_3, \ldots$ étant des polynômes en r du degré $n-1$, où le coefficient de r^{n-1} est l'unité, et $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \mu_1, \ldots$ n'étant que d'un degré moindre, ces relations (37), dans lesquelles les sommes $\sum$ s'étendent aux n racines de l'équation $f(r)=0$, se trouveront vérifiées en prenant simplement pour $\psi(r)$ la dérivée $f'(r)$, essentiellement différente, par hypothèse, de zéro, dès que $f(r)$ s'annule. Les expressions définitives cherchées de $y, z, u, \ldots$ seront donc, si l'on groupe tous les $\sum$ dans chaque formule (36) après y avoir fait $\psi(r) = f'(r)$,

$$(38)\quad \begin{cases} y = \sum \frac{y_0\lambda_1 + z_0\lambda_2 + u_0\lambda_3 + \ldots}{f'(r)} e^{rx}, \\ z = \sum \frac{y_0\mu_1 + z_0\mu_2 + u_0\mu_3 + \ldots}{f'(r)} e^{rx}, \\ u = \sum \frac{y_0\nu_1 + z_0\nu_2 + u_0\nu_3 + \ldots}{f'(r)} e^{rx}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Passons maintenant au cas général où l'équation $f(r) = 0$ admettra, outre des racines simples, diverses racines multiples, et désignons par $m+1$, pour l'une quelconque d'entre elles, le degré de multiplicité. Alors la formule (5) du n° **241***, que nous venons d'utiliser, est remplacée par une autre (10), plus générale (p. 24*); et, en appelant ici $\psi(r)$, pour une racine quelconque c, le quotient de $f(r)$ par $(r-c)^{m+1}$, quotient d'une forme ainsi changeante avec la racine et qui, lorsque $r=c$, ne se réduit à $f'(c)$ que pour une racine simple, cette formule (10) donnera, au lieu des identités (37), celles-ci

$$(39)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{(\lambda_1, \mu_2, \nu_3, \ldots)}{f'(r)} \\ &\qquad + \sum \frac{1}{1.2.3\ldots m} \frac{d^m}{dr^m} \frac{(\lambda_1, \mu_2, \nu_3, \ldots)}{\psi(r)} = 1, \\ &\sum \frac{(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \nu_1, \ldots)}{f'(r)} \\ &\qquad + \sum \frac{1}{1.2.3\ldots m} \frac{d^m}{dr^m} \frac{(\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \nu_1, \ldots)}{\psi(r)} = 0, \end{aligned} \right.$$

dans chacune desquelles il est entendu que le premier signe de sommation $\sum$ concerne toutes les racines simples, et, le second, toutes les racines multiples.

Il y aura donc lieu, pourvu que les équations différentielles (13) [p. 276*] continuent à être vérifiées, de remplacer les expressions (38) de $y, z, u, \ldots$ par les suivantes, dans chacune desquelles les deux signes $\sum$ auront encore les mêmes extensions respectives,

$$(40)\quad \left\{ \begin{aligned} y &= \sum \frac{y_0\lambda_1 + z_0\lambda_2 + u_0\lambda_3 + \ldots}{f'(r)} e^{rx} \\ &\quad + \sum \frac{1}{1.2.3\ldots m} \frac{d^m}{dr^m} \left[\frac{y_0\lambda_1 + z_0\lambda_2 + \ldots}{\psi(r)} e^{rx} \right], \\ z &= \sum \frac{y_0\mu_1 + z_0\mu_2 + u_0\mu_3 + \ldots}{f'(r)} e^{rx} \\ &\quad + \sum \frac{1}{1.2.3\ldots m} \frac{d^m}{dr^m} \left[\frac{y_0\mu_1 + z_0\mu_2 + \ldots}{\psi(r)} e^{rx} \right], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned} \right.$$

car on voit, en faisant, dans celles-ci, $x=0$ et en mettant hors des signes $\sum$, après décomposition des sommes en leurs parties affectées de $y_0, z_0, u_0, \ldots$, les facteurs $y_0, z_0, u_0, \ldots$ indépendants de r, qu'elles se réduisent à $y=y_0$, $z=z_0$, $u=u_0, \ldots$ pour $x=0$.

Or, de plus, elles vérifient bien les équations différentielles (13). En effet, si l'on y considère à part un quelconque des termes (les seuls dont l'examen soit nécessaire) inscrits sous le second $\sum$ de chaque formule (40), par exemple celui qui, dans toutes, se trouve affecté de y_0 et correspond à une même racine multiple quelconque c, il constituera pour $y, z, u, \ldots$, abstraction faite du coefficient numérique commun $\frac{1}{1.2.3\ldots m}$, les expressions particulières

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{d^m}{dr^m}\left[\dfrac{\lambda_1}{\psi(r)}e^{rx}\right], \\ z = \dfrac{d^m}{dr^m}\left[\dfrac{\mu_1}{\psi(r)}e^{rx}\right], \\ u = \dfrac{d^m}{dr^m}\left[\dfrac{\nu_1}{\psi(r)}e^{rx}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} [\text{pour } r = c].$$

Mais, dans celles-ci où $\frac{\lambda_1}{\psi(r)}, \frac{\mu_1}{\psi(r)}, \frac{\nu_1}{\psi(r)}, \cdots$ désignent certaines fonctions explicites de r, de c, des coefficients des $n-1$ dernières équations (31) et de ceux de la première équation (31), *pris, tous, avec leurs valeurs fixes données,* les quantités entre crochets représentent, en y donnant à r, successivement, $m+1$ valeurs équidistantes (infiniment voisines de c), l'expression commune de $m+1$ solutions simples du système (13) où l'on aurait modifié légèrement, d'une certaine manière, les n coefficients A_1, B_1, $C_1, \ldots$ de la première équation, c'est-à-dire de celle qui n'a pas servi à former les expressions de $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots$, comme il a été indiqué à la fin du numéro précédent (p. 291*). Et un raisonnement déjà invoqué deux fois (pp. 274* et 291*) en déduit que la dérivée $m^{\text{ième}}$ en r de ces expressions constitue, pour $r=c$, une solution particulière du système proposé.

On le reconnaît, du reste, directement par la substitution des valeurs (41) de $y, z, u, \ldots$ dans (13). Les premiers membres de celles-ci deviennent, vu l'interversion possible des différentiations en r et en x,

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^m}{dr^m}\left[\dfrac{(r+A_1)\lambda_1 + B_1\mu_1 + C_1\nu_1 + \ldots}{\psi(r)}e^{rx}\right], \\ \dfrac{d^m}{dr^m}\left[\dfrac{A_2\lambda_1 + (r+B_2)\mu_1 + C_2\nu_1 + \ldots}{\psi(r)}e^{rx}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} [\text{pour } r = c],$$

Or, en vertu des $n-1$ dernières équations (31) qui ont servi à déterminer $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots$, les quantités entre crochets, dans ces expressions,

sont *identiquement* nulles, sauf pour la première (42). Et celle-ci, d'après la première formule (34) de $f(r)$, n'est autre que

$$\frac{d^m}{dr^m}\left[\frac{f(r)}{\psi(r)}e^{rx}\right] \quad (\text{pour } r = c),$$

c'est-à-dire encore

$$\frac{d^m}{dr^m}\left[(r-c)^{m+1}e^{rx}\right] \quad (\text{pour } r = c),$$

vu que $f(r)$ est identique à $(r-c)^{m+1}\psi(r)$. Or, quand on différentie une fois, deux fois, trois fois, ..., m fois en r l'expression $(r-c)^{m+1}e^{rx}$, tous les termes obtenus ont en facteur le binôme $(r-c)$ élevé à une puissance dont l'exposant se trouve inférieur respectivement de 1, 2, 3, ..., m unités à l'exposant primitif $m+1$. Donc, après m différentiations, cette expression contient encore un facteur $r-c$ et s'annule à la limite $r=c$.

Ainsi, les valeurs entièrement explicites (40) de $y, z, u, \ldots$ sont bien celles qu'il faut attribuer à ces fonctions, quand le système (13) d'équations différentielles les régit et qu'elles doivent, pour $x=0$, se réduire respectivement à des quantités arbitraires données $y_0, z_0, u_0, \ldots$.

Observons que les seconds membres de (41), dérivées $m^{\text{ièmes}}$ en r, développées, des produits de $\frac{1}{\psi(r)}$ par les facteurs $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots)e^{rx}$, ont leurs termes respectifs proportionnels, les premiers, à ces facteurs, les deuxièmes, à leurs dérivées premières en r, les suivants, à leurs dérivées secondes en r, et ainsi de suite, jusqu'à ceux où figure $\frac{1}{\psi(r)}$ non différentié, qui sont entre eux comme les dérivées $m^{\text{ièmes}}$ en r des mêmes facteurs. Donc la solution (41) se trouve composée des $m+1$ solutions simples

$$(42\ bis) \qquad (\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots)e^{rx}, \quad \frac{d.(\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots)e^{rx}}{dr}, \ldots, \quad \frac{d^m.(\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \ldots)e^{rx}}{dr^m},$$

que l'on connaissait déjà et dont la vérification serait d'ailleurs immédiate par le procédé suivi ci-dessus pour (41). Les expressions analogues qu'affectent, dans (40), $z_0, u_0, \ldots$ se décomposant de même, il correspond en tout $(m+1)n$ de ces solutions simples à chaque racine r de degré $m+1$; et l'intégrale générale (40) en comprend n^2, au lieu de n qui, choisies distinctes, suffiraient à la rigueur. Une telle abondance de solutions simples permet l'introduction de n^2 arbitraires, et non plus seulement de n, dans les expressions de $y, z, u, \ldots$ les plus générales formées par leur moyen : or on conçoit

qu'elle facilite beaucoup la vérification des conditions d'état initial, en laissant le moyen d'établir entre elles $n(n-1)$ relations appropriées au but poursuivi, comme il arrive justement dans les formules (40) où les n quantités y_0, z_0, u_0, ... restent seules disponibles.

Quand les expressions telles que (42 *bis*) n'admettent aucun facteur algébrique, chaque solution simple comme (41) se réduit, pour y, z, u, ..., aux produits respectifs de e^{rx} par des facteurs constants, qu'on peut encore appeler λ, μ, ν, ..., mais qui, évidemment proportionnels entre eux, ou réductibles à un seul système, dans toutes les solutions correspondant à une même racine *simple* r, auront au contraire des rapports mutuels généralement différents dans celles qui correspondront à une racine multiple. Il est clair, en effet, que, sans cela, les solutions simples *distinctes* seraient en nombre insuffisant pour permettre, comme elles le font, de vérifier par leur superposition les n conditions d'état initial, ou d'introduire les n constantes *essentiellement arbitraires* y_0, z_0, u_0, ... Donc, si, par exemple, les racines r ont alors des valeurs négatives $-\beta^2$, les intégrales générales (40) seront bien de la forme (25) [p. 286*] ou comporteront les expressions initiales (28) [p. 288*], comme nous l'avions admis au n° **410***.

413*. — Exemple : intégration d'équations du quatrième ordre, pour le calcul d'intégrales définies qui se reproduisent, en valeur absolue, par quatre différentiations.

En fait d'application des théories précédentes, contentons-nous ici de chercher les valeurs des intégrales définies φ, de la forme $\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$, dont il a été parlé au commencement du n° **347*** (p. 182*), et dont les unes, où f, ψ sont des sinus ou des cosinus, vérifient, entre les limites $x=0$ et $x=\infty$, l'équation différentielle $\varphi^{\text{IV}}-\varphi=0$, tandis que les autres, où ces fonctions sont, respectivement, une exponentielle à exposant négatif et un sinus ou un cosinus, donnent, encore depuis une valeur infiniment petite positive de x jusqu'à $x=\infty$, $\varphi^{\text{IV}}+\varphi=0$.

Dans le premier cas, où $\varphi^{\text{IV}}-\varphi=0$, l'équation caractéristique (6) [p. 273*] est évidemment

$$r^4-1=0 \qquad \text{ou} \qquad (r-1)(r+1)(r^2+1)=0;$$

ce qui fournit deux racines réelles, $r=\pm 1$, et deux racines imaginaires $r=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, avec $\alpha=0$, $\beta=1$. Donc, si c_1, c_2, c_3, c_4 sont quatre constantes arbitraires, il viendra, pour l'expression générale

de φ et, par suite, pour celles de ses trois dérivées premières,

$$(43)\quad \begin{cases} \varphi = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 e^{-x} + c_4 e^x, \\ \varphi' = -c_1\sin x + c_2\cos x - c_3 e^{-x} + c_4 e^x, \\ \varphi'' = -c_1\cos x - c_2\sin x + c_3 e^{-x} + c_4 e^x, \\ \varphi''' = c_1\sin x - c_2\cos x - c_3 e^{-x} + c_4 e^x, \end{cases}$$

formules qui, pour $x = 0$, se réduisent à

$$(44)\quad \begin{cases} \varphi_0 = c_1 + c_3 + c_4, \qquad \varphi'_0 = c_2 - c_3 + c_4, \\ \varphi''_0 = -c_1 + c_3 + c_4, \qquad \varphi'''_0 = -c_2 - c_3 + c_4, \end{cases}$$

et donnent immédiatement les quatre combinaisons suivantes, déterminant c_1, c_2, c_3, c_4,

$$(45)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi_0 - \varphi''_0}{2} = c_1, \qquad \dfrac{\varphi'_0 - \varphi'''_0}{2} = c_2, \\ \dfrac{\varphi_0 - \varphi'_0 + \varphi''_0 - \varphi'''_0}{4} = c_3, \qquad \dfrac{\varphi_0 + \varphi'_0 + \varphi''_0 + \varphi'''_0}{4} = c_4. \end{cases}$$

Cela posé, choisissons, par exemple, pour φ, l'intégrale où f est un sinus et ψ un cosinus. Écrivons donc, en différentiant ensuite trois fois par la règle du n° **346*** (p. 179*),

$$(46)\quad \begin{cases} \varphi = \displaystyle\int_0^\infty \sin\frac{\alpha^2}{2}\cos\frac{x^2}{2\alpha^2}\,d\alpha, \qquad \varphi' = -\int_0^\infty \sin\frac{x^2}{2\alpha^2}\sin\frac{\alpha^2}{2}\,d\alpha, \\ \varphi'' = -\displaystyle\int_0^\infty \cos\frac{\alpha^2}{2}\sin\frac{x^2}{2\alpha^2}\,d\alpha, \qquad \varphi''' = -\int_0^\infty \cos\frac{x^2}{2\alpha^2}\cos\frac{\alpha^2}{2}\,d\alpha. \end{cases}$$

Nous aurons, pour $x = 0$, d'après les deux dernières formules (4) de la p. 180*, $\varphi_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\varphi'_0 = 0$, $\varphi''_0 = 0$, $\varphi'''_0 = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, de sorte que les valeurs (45) de c_1, c_2, c_3, c_4 seront $c_1 = c_2 = c_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$, $c_4 = 0$, donnant bien, pour les quatre intégrales φ, φ', φ'', φ''', des expressions identiques à celles que nous avons obtenues autrement dans la dernière Leçon [p. 262*, form. (47)].

Passons au cas où $\varphi^{\text{IV}} + \varphi = 0$. Alors l'équation en r est $r^4 + 1 = 0$: d'où $r^2 = \pm\sqrt{-1}$; et les quatre racines sont imaginaires. Posant donc $r = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, il viendra $(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})^2 = \pm\sqrt{-1}$, c'est-à-dire $(\alpha^2 - \beta^2) \pm 2\alpha\beta\sqrt{-1} = \pm\sqrt{-1}$, ou bien $\alpha^2 - \beta^2 = 0$ et $2\alpha\beta = 1$. La dernière de celles-ci montrant que α et β ont même signe, la précédente donne $\beta = \alpha$; ce qui change la dernière en $2\alpha^2 = 1$. Donc $\alpha = \beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; et, si l'on appelle c_1, c_2, c_3, c_4 quatre constantes arbi-

traires, il vient

$$(47) \quad \varphi = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_3 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_4 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Le calcul des dérivées φ', φ'', φ''' étant un peu plus long que dans le cas précédent, on peut, après avoir écrit, par exemple,

$$(48) \qquad \varphi = \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \cos\frac{x^2}{2\alpha^2}\, d\alpha,$$

remarquer que cette intégrale est toujours, en grandeur absolue, inférieure à sa valeur pour $x = 0$, obtenue en y remplaçant sous le signe $\int$ $\cos\frac{x^2}{2\alpha^2}$ par 1, et qui, d'après la première formule (4) de la p. 180* (ou formule de Poisson), égale $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Donc elle ne devient pas infinie pour $x = +\infty$, pas plus aux instants où $\sin\frac{x}{\sqrt{2}} = 0$, qu'à ceux où $\cos\frac{x}{\sqrt{2}} = 0$; et il faut, dans (47), annuler les deux coefficients c_3, c_4. Ayant ainsi réduit à ses deux premiers termes l'expression (47) de φ, celle-ci sera, avec ses trois premières dérivées,

$$(49) \quad \begin{cases} \varphi = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_1 \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \\ \varphi' = -e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{2}} \cos\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}} \sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \\ \varphi'' = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_1 \sin\frac{x}{\sqrt{2}} - c_2 \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \\ \varphi''' = -e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(\frac{c_1 - c_2}{\sqrt{2}} \sin\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}} \cos\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \end{cases}$$

Pour $x = 0$, la première et la troisième de ces formules deviennent $\varphi_0 = c_1$ et $\varphi''_0 = -c_2$. Or l'expression (48) de φ, avec celles qui s'en déduisent pour ses trois dérivées premières relatives à $x > 0$, savoir

$$(50) \quad \begin{cases} \varphi = \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \cos\frac{x^2}{2\alpha^2}\, d\alpha, & \varphi' = -\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \sin\frac{\alpha^2}{2}\, d\alpha, \\ \varphi'' = \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sin\frac{x^2}{2\alpha^2}\, d\alpha, & \varphi''' = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \cos\frac{\alpha^2}{2}\, d\alpha, \end{cases}$$

donnent, d'après l'intégrale de Poisson rappelée tout à l'heure,

$$(\text{pour } x \text{ infiniment petit positif}) \quad \varphi_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \varphi_0'' = 0.$$

Donc $c_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $c_2 = 0$; et les valeurs des quatre intégrales définies cherchées (50) sont dès lors exprimées par les formules (49) où il ne reste plus rien d'inconnu.

Pour les présenter sous une forme plus générale, utile dans la théorie du choc transversal des barres, posons-y $\alpha = m\beta$ (d'où $d\alpha = m\,d\beta$) et $x^2 = 2m^2\xi^2$, m et ξ étant deux constantes *positives* quelconques. Il viendra, en divisant finalement par m et rapprochant les formules analogues :

$$(51) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{m^2\beta^2}{2}} \cos\frac{\xi^2}{\beta^2}\,d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-m\xi}\frac{\cos m\xi}{m}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{m^2\beta^2}{2}} \sin\frac{\xi^2}{\beta^2}\,d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-m\xi}\frac{\sin m\xi}{m}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{\beta^2}} \cos\frac{m^2\beta^2}{2}\,d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-m\xi}\frac{\cos m\xi - \sin m\xi}{m}, \\ \displaystyle\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{\beta^2}} \sin\frac{m^2\beta^2}{2}\,d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-m\xi}\frac{\cos m\xi + \sin m\xi}{m}. \end{cases}$$

On remarquera que les deux dernières de ces formules donnent bien, en y faisant ξ infiniment petit et $m = \sqrt{2b}$, les valeurs des deux intégrales $\int_0^\infty \cos bx^2\,dx$ et $\int_0^\infty \sin bx^2\,dx$ obtenues antérieurement, (p. 127*). Quant aux deux premières (51), supposons, dans la seconde, m infiniment petit et $\xi = 1$: il viendra $\int_0^\infty \left(\sin\frac{1}{\beta^2}\right)d\beta = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ou bien $\int_0^\infty \frac{\sin u^2}{u^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\left(\text{en changeant la variable d'intégration et prenant } \beta = \frac{1}{u},\ d\beta = -\frac{du}{u^2}\right)$. Si l'on observe que $\frac{\pi}{2}$ est la valeur de l'intégrale classique $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$, on aura donc la formule assez curieuse

$$(52) \qquad \int_0^\infty \frac{\sin u^2}{u^2}\,du = \sqrt{\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

QUARANTE ET UNIÈME LEÇON.

SUITE DE L'ÉTUDE DES ESPÈCES LES PLUS UTILES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE : ÉQUATIONS A COEFFICIENTS VARIABLES QUE L'ON SAIT INTÉGRER OU SOUS FORME FINIE, OU EN SÉRIE, OU PAR DES INTÉGRALES DÉFINIES; FONCTIONS CYLINDRIQUES, ETC.

414*. — **De quelques cas où s'intègre sous forme finie une équation linéaire sans second membre et à coefficients variables : équations homogènes par rapport à x, y, dx, dy, d^2y, d^3y, ...**

Peu d'équations linéaires données, à coefficients variables, peuvent s'intégrer sans l'emploi des séries ou des intégrales définies. Les plus remarquables d'entre elles sont les équations à la fois linéaires, et homogènes par rapport à x, y, dx, dy, d^2y, d^3y, ..., c'est-à-dire dont la forme, après division par une puissance convenable de x, est

$$(53)\qquad A\frac{y}{x}+By'+Cxy''+Dx^2y'''+\ldots+Kx^{n-1}y^{(n)}=0.$$

On remarquera, du reste, que celles-ci acquièrent des coefficients constants, tout en gardant la forme linéaire, quand, vu leur genre d'homogénéité considéré à la fin du n° 383*, on en fait disparaître la variable, par la transformation $x=e^t$ et $\frac{y}{x}=u$ d'où résultent les valeurs (28) [p. 255*] des produits y', xy'', x^2y''', ... Mais il suffit, sans développer l'équation en u, u', u'', ..., d'observer que les solutions simples $u=e^{rt}=(e^t)^r$ de celle-ci reviennent à prendre $u=x^r$ et, par suite, $y=x^{r+1}$. On posera donc $y=x^{r+1}$; ce qui changera la relation (53), divisée par x^r, en une équation simplement algébrique ayant r pour inconnue, savoir

$$(54)\quad \begin{cases} A+B(r+1)+C(r+1)r \\ \qquad +D(r+1)r(r-1)+\ldots+K(r+1)r(r-1)\ldots(r-n+2)=0. \end{cases}$$

Elle est du $n^{\text{ième}}$ degré en r et si, en la résolvant, on ne lui trouve que des racines réelles et inégales, il viendra bien, sous la forme $y=x^{r+1}$, les n solutions distinctes propres à composer l'expression générale de

y. Dans les cas contraires, on procédera comme il a été indiqué à la fin du n° 411* (p. 290*) pour les équations à coefficients constants.

Soient, par exemple, les deux équations, utiles respectivement dans l'étude de l'équilibre d'un cylindre et d'une sphère élastiques,

$$(55) \qquad x^2y'' + xy' - y = 0, \qquad x^2y'' + 2xy' - 2y = 0.$$

En y posant $y = x^{r+1}$, il vient aisément les deux équations en r, $(r+2)r = 0$, $(r+3)r = 0$, qui donnent, l'une, $r = 0$, $r = -2$ et, l'autre, $r = 0$, $r = -3$. Donc les solutions simples x^{r+1} sont, dans un cas, $x^{\pm 1}$ et, dans l'autre, x^1, x^{-2}; d'où résultent respectivement, comme intégrales générales,

$$(56) \qquad y = cx + \frac{c_1}{x}, \qquad y = cx + \frac{c_1}{x^2}.$$

Il est à peine besoin d'ajouter que, si dans (53), on remplaçait x par une quelconque de ses fonctions du premier degré, $ax + b$, ou que l'équation linéaire proposée fût homogène par rapport à $ax + b$, y, dx, dy, d^2y, d^3y, ..., l'adoption de $ax + b$ comme variable lui conserverait la même homogénéité et la ramènerait au type intégrable (53).

415*. — Formation d'équations linéaires ayant leurs intégrales de forme finie; équations de Jacobi.

Si l'on ne peut que bien rarement intégrer sous forme finie une équation ou un système linéaires *donnés*, sans seconds membres et à coefficients variables, il est, au contraire, facile de *composer* un tel système admettant pour expressions générales de y, z, u, ... des fonctions quelconques de x homogènes du premier degré par rapport à n constantes c_1, c_2, ..., c_n, c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$(57) \quad y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n, \qquad z = c_1z_1 + c_2z_2 + \ldots + c_nz_n, \quad \ldots.$$

En effet, celles-ci, différentiées en x, donnent, pour valeurs des dérivées y', z', u', ..., des fonctions linéaires homogènes de c_1, c_2, ..., c_n et aussi, par suite de y, z, u, ... quand on substitue à c_1, c_2, ..., c_n leurs expressions du premier degré en y, z, u, ... tirées de (57). Donc les équations différentielles du premier ordre ainsi formées sont bien linéaires en y, z, u, ..., et, de plus, homogènes, c'est-à-dire sans seconds membres.

On doit à Jacobi une manière ingénieuse de composer à la fois certains systèmes d'équations linéaires homogènes et leurs intégrales, en les déduisant de tout système d'équations différentielles non li-

néaires que l'on aura pu intégrer. Il y a été conduit par la considération des écarts existant entre intégrales infiniment voisines d'un tel système, ou écarts dus, pour les diverses valeurs de x, à des changements infiniment petits assignés da, db, dc, ... des n constantes arbitraires, que j'appellerai ici a, b, c, ..., introduites par l'intégration. Soient

$$(58)\quad \frac{dy}{dx}+f_1(x,y,z,u,\ldots)=0,\qquad \frac{dz}{dx}+f_2(x,y,z,u,\ldots)=0,\qquad \ldots$$

les n équations non linéaires proposées, et

$$(59)\quad \begin{cases} y=F_1(x,a,b,c,\ldots), & z=F_2(x,a,b,c,\ldots), \\ u=F_3(x,a,b,c,\ldots), & \ldots, \end{cases}$$

leur système d'intégrales générales. Nous pouvons, pour considérer une suite d'intégrales voisines, y regarder a, b, c, ... comme des fonctions *arbitraires* d'un même paramètre k, et appeler $c_1, c_2, \ldots, c_n$ leurs dérivées par rapport à k. Alors l'écart de deux intégrales consécutives, rapporté à l'unité de variation de k, ou divisé par dk, sera, pour y, z, u, ... respectivement, la dérivée de y, ou de z, ou de u, ..., par rapport à k, c'est-à-dire obtenue sans faire varier x, mais seulement a, b, c, ... Appelons Y, Z, U, ... ces dérivées de y, z, u, ... par rapport à k, et en faisant, dans (58) et (59), croître, d'une part, y, z, u, ... de $Y\,dk$, $Z\,dk$, $U\,dk$, ..., d'autre part, a, b, c, ... de $c_1\,dk$, $c_2\,dk$, $c_3\,dk$, ..., ces équations donneront évidemment :

$$(60)\quad \begin{cases} \dfrac{dY}{dx}+\dfrac{df_1}{dy}Y+\dfrac{df_1}{dz}Z+\dfrac{df_1}{du}U+\ldots=0, \\ \dfrac{dZ}{dx}+\dfrac{df_2}{dy}Y+\dfrac{df_2}{dz}Z+\ldots=0, \quad \ldots; \end{cases}$$

$$(61)\quad \begin{cases} Y=\dfrac{dF_1}{da}c_1+\dfrac{dF_1}{db}c_2+\dfrac{dF_1}{dc}c_3+\ldots, \\ Z=\dfrac{dF_2}{da}c_1+\dfrac{dF_2}{db}c_2+\ldots, \qquad \ldots. \end{cases}$$

Or les dérivées partielles de f_1, f_2, ... en y, z, u, ... et de F_1, F_2, ... en a, b, c, ... sont, vu les expressions (59) de y, z, u, ..., certaines fonctions de x et des valeurs *actuelles* quelconques de a, b, c, ... valeurs indépendantes de x. Donc les *écarts relatifs* Y, Z, U, ... des intégrales (59) du système proposé (58), se trouvent régies par le système (60) d'équations linéaires, et leurs expressions (61), affectées des n constantes arbitraires c_1, c_2, ..., c_n, constituent les solutions générales de ce système linéaire.

Par exemple, l'équation différentielle du second ordre $y'' = f(y)$, dont nous avons appris (p. 197, 3°) à composer l'intégrale générale, de la forme $y = \mathrm{F}(x - a, b)$, donnera, en y faisant, quel que soit x, croître y de $\mathrm{Y}\,dk$ et, par suite, y'' de $\mathrm{Y}''\,dk$,

$$(62) \qquad \mathrm{Y}'' = f'(y)\mathrm{Y} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Y}'' = f'[\mathrm{F}(x-a, b)]\mathrm{Y},$$

équation linéaire du second ordre, dans le genre de celle, $\mathrm{Y}'' = \mathrm{A}x^m\mathrm{Y}$, à laquelle se ramène [p. 257*] l'équation de Riccati. Son intégrale générale, déduite de $y = \mathrm{F}(x - a, b)$ en y faisant, de même, croître a de $c_1\,dk$ et b de $c_2\,dk$, sera

$$(63) \qquad \mathrm{Y} = \frac{d\mathrm{F}(x-a, b)}{da}c_1 + \frac{d\mathrm{F}(x-a, b)}{db}c_2.$$

416*. — Intégration des équations linéaires par les séries; exemple sur une équation du quatrième ordre, qui se présente dans la théorie du mouvement vibratoire transversal d'une barre droite de largeur constante à coupe verticale parabolique, comme sont les balanciers des machines à vapeur.

Quand une équation linéaire donnée, en $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, sans second membre, n'est pas intégrable sous forme finie, on peut essayer d'en obtenir, sous forme de séries procédant suivant les puissances ou ascendantes ou descendantes de la variable x, les n solutions particulières indispensables pour former son intégrale générale. On cherchera donc des expressions y de la forme

$$(64) \qquad y = \mathrm{A}x^\alpha + \mathrm{B}x^\beta + \mathrm{C}x^\gamma + \mathrm{D}x^\delta + \ldots,$$

où les indéterminées $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ et A, B, C, D, ... désigneront, les premières, une suite indéfinie d'exposants croissants ou décroissants, les secondes, une suite de coefficients, dont il faudra disposer de manière que la série (64) soit convergente et vérifie identiquement l'équation proposée.

Les calculs sont assez simples quand cette équation proposée se trouve, à un terme près, homogène par rapport à $x, y, dx, dy, \ldots$, c'est-à-dire quand, ce terme étant, par exemple, $\pm y$, elle a la forme

$$(65) \qquad x^{1-m}\left(\mathrm{E}\frac{y}{x} + \mathrm{F}\frac{dy}{dx} + \mathrm{G}x\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \mathrm{I}x^{n-1}\frac{d^ny}{dx^n}\right) = \pm y,$$

où E, F, G, ..., I désignent des coefficients constants et m une quantité quelconque soit positive, soit négative, mais différente de zéro, sans quoi l'équation (65) serait homogène (y compris même le terme

$\pm y$) et intégrable sous forme finie [p. 301*]. Un terme quelconque, que j'écrirai Lx^λ, de l'expression (64) de y, donne en tout, par sa substitution dans le premier membre de (65), $Lf(\lambda)x^{\lambda-m}$, si l'on appelle, pour abréger, $f(\lambda)$ le polynôme, du $n^{\text{ième}}$ degré en λ,

$$(66)\quad f(\lambda) = E + F\lambda + G\lambda(\lambda-1) + \ldots + I\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1).$$

Par suite, l'équation (65) devient

$$(67)\quad \left\{ \begin{aligned} &Af(\alpha)x^{\alpha-m} + Bf(\beta)x^{\beta-m} + Cf(\gamma)x^{\gamma-m} + \ldots \\ &\qquad\qquad = \pm Ax^\alpha \pm Bx^\beta \pm Cx^\gamma \pm \ldots. \end{aligned} \right.$$

Ses deux membres seront donc identiques, comme il le faut, si l'on pose, d'abord, $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire

$$(68)\quad f(\alpha) = E + F\alpha + G\alpha(\alpha-1) + \ldots + I\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1) = 0,$$

et, de plus, $\beta - m = \alpha$, $\gamma - m = \beta$, ..., avec

$$Bf(\beta) = \pm A, \qquad Cf(\gamma) = \pm B, \qquad \ldots,$$

ou bien

$$(69)\quad \left\{ \begin{aligned} &\beta = \alpha + m, \qquad \gamma = \beta + m = \alpha + 2m, \qquad \delta = \alpha + 3m, \qquad \ldots, \\ &B = \pm\frac{A}{f(\beta)}, \quad C = \frac{\pm B}{f(\gamma)} = \frac{A}{f(\beta)f(\gamma)}, \quad D = \frac{\pm A}{f(\beta)f(\gamma)f(\delta)}, \quad \ldots. \end{aligned} \right.$$

Donc, en divisant la solution (64) par A (ce qui est permis puisqu'il s'agit uniquement de former des intégrales particulières aussi simples que possible), et en mettant de plus x^α en facteur commun, il viendra

$$(70)\quad \left\{ \begin{aligned} y = x^\alpha \Big[1 &\pm \frac{x^m}{f(\alpha+m)} + \frac{x^{2m}}{f(\alpha+m)f(\alpha+2m)} \\ &\pm \frac{x^{3m}}{f(\alpha+m)f(\alpha+2m)f(\alpha+3m)} + \ldots \Big]. \end{aligned} \right.$$

Admettons que l'équation (68) ait ses n racines réelles et inégales, et que, de plus, pour chacune d'elles, l'expression (70) de y constitue une série convergente. Alors la formule (70) fournira bien n solutions particulières propres à composer l'intégrale générale. Dans les cas contraires de racines imaginaires ou égales, on procéderait d'une manière analogue à ce qui a été indiqué (pp. 290* et 274*) pour les cas semblables, quand l'intégration s'effectuait sous forme finie : mais les séries obtenues ne pourront être utilisées qu'autant qu'elles seront convergentes. Si une ou quelques-unes d'entre elles seulement l'étaient,

on s'en servirait pour abaisser l'ordre de l'équation (65) [p. 258*], et, dans le cas $n=2$, on la ramènerait ainsi aux quadratures.

Prenons pour exemple l'équation du quatrième ordre

$$(71) \qquad \frac{d^4y}{dx^4}=x^2y \quad \text{ou} \quad x^{1-6}\left(x^3\frac{d^4y}{dx^4}\right)=y,$$

qui se présente dans l'étude des vibrations transversales et du choc transversal d'une barre droite, de largeur constante, mais à coupe verticale parabolique, ou d'une épaisseur proportionnelle à la racine carrée de la distance à l'extrémité voisine, comme on fait ordinairement les deux bras du balancier d'une machine à vapeur pour leur donner une forme d'égale résistance à la flexion (¹). Il faudra poser, dans (65), $n=4$, $m=6$, $E=0$, $F=0$, $G=0$, ..., $I=1$; ce qui réduira (66) à

$$(72) \qquad f(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3),$$

et l'équation (68) à

$$(73) \qquad \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)=0.$$

On aura donc

$$(74) \quad \begin{cases} y=x^\alpha\left[1+\dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)x^6}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+6)}\right. \\ \qquad\qquad \left.+\dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+7)(\alpha+8)x^{12}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+12)}+\ldots\right], \\ \text{avec } \alpha=0, \quad \text{ou } 1, \quad \text{ou } 2, \quad \text{ou } 3; \end{cases}$$

ce qui donnera quatre séries convergentes quel que soit x, et même très rapidement pour les valeurs de x modérées. L'intégrale générale de (71) s'obtiendra donc en faisant la somme de ces quatre séries, après les avoir respectivement multipliées par des constantes arbitraires c_1, c_2, c_3, c_4.

417*. — Intégration par le moyen d'intégrales définies : exemple tiré de l'équation du second ordre qui revient à celle de Riccati.

Le procédé indiqué ci-dessus s'appliquerait aisément à l'équation

---

(¹) *Voir*, dans la *Théorie de l'Élasticité de Clebsch*, traduite par MM. de Saint-Venant et Flamant, l'importante Note de M. de Saint-Venant *Sur l'impulsion transversale et le choc transversal des barres*, p. 594.

du second ordre (où p désigne un exposant constant)

$$x^{1-p}\left(x\frac{d^2y}{dx^2}\right) = ay \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ax^{p-2}y,$$

que nous savons (p. 257*) revenir à celle de Riccati. Mais comme, sous sa forme binôme dont il s'agit maintenant, cette équation ne se présente pour ainsi dire pas en Physique mathématique, je me contenterai d'en remarquer une solution particulière (due à Poisson), constituée par une intégrale définie que nous avons rencontrée presque accidentellement à la fin du n° 348* (p. 186*), et qui la vérifie quand, par un changement de variable revenant à poser

$$x = \left(\frac{p^2}{4a}\right)^{\frac{1}{p}} t \quad \left[\text{d'où} \quad \frac{d}{dx} = \left(\frac{p^2}{4a}\right)^{-\frac{1}{p}} \frac{d}{dt}\right],$$

on lui donne la forme $\left(\frac{p^2}{4a}\right)^{-\frac{2}{p}} \frac{d^2y}{dt^2} = a\left(\frac{p^2}{4a}\right)^{\frac{p-2}{p}} t^{p-2}y$, c'est-à-dire

$$(75) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{p^2}{4} t^{p-2}y.$$

D'après la formule (15 *bis*) du n° 348*, cette équation (75) est vérifiée, en effet, par l'expression

$$(76) \qquad y = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\alpha^p + \frac{t^p}{\alpha^p}\right)} d\alpha.$$

Ce n'est donc pas seulement par des séries, mais quelquefois aussi par des intégrales définies, qu'il y aura lieu, comme il a été annoncé (p. 177*), d'intégrer des équations différentielles dont aucune solution ne pourra se réduire aux fonctions algébriques ou transcendantes usuelles.

Je n'insisterai pas davantage sur cet exemple, devant considérer l'équation (75), ou plutôt celle dont nous l'avons déduite, savoir $\frac{d^2y}{dx^2} = ax^{p-2}y$, sous la forme plus utile qu'elle prend quand on remplace, comme on a vu vers la fin du même n° 348* (p. 186*), t^p par r^2, ou, à un facteur constant près, x par $r^{\frac{2}{p}}$. En posant, par exemple,

$$x = \left(\frac{p^2}{-4a}\right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{2}{p}}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d}{dx} = \left(\frac{p^2}{-4a}\right)^{-\frac{1}{p}} \frac{p}{2} r^{1-\frac{2}{p}} \frac{d}{dr},$$

il vient

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \left(1 - \frac{2}{p}\right)\frac{1}{r}\frac{dy}{dr} = -y; \tag{77}$$

et, sous cette nouvelle forme, l'équation $y'' = ax^{p-2}y$ figure assez souvent en Physique mathématique. Aussi nous y arrêterons-nous, en lui donnant encore d'autres formes non moins usuelles, jusqu'à la fin de la présente Leçon. Pour plus de commodité, nous y remplacerons l'inverse de p par un nouveau paramètre, $-\nu$, ou, autrement dit, nous l'écrirons

$$\frac{d^2y}{dr^2} + \frac{1+2\nu}{r}\frac{dy}{dr} = -y. \tag{78}$$

On peut y faire disparaître le second terme par le procédé indiqué au n° 384* (p. 256*), en y posant $y = \alpha Y$, avec $\alpha = e^{-\frac{1}{2}\int\frac{1+2\nu}{r}dr} = r^{-\nu-\frac{1}{2}}$; ce qui, après division par α, donne

$$\frac{d^2Y}{dr^2} + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\frac{Y}{r^2} = -Y, \quad \text{où} \quad Y = r^{\nu+\frac{1}{2}}y. \tag{79}$$

On peut encore, dans (78), faire disparaître non pas tout le second terme, mais seulement sa partie qui contient ν, en posant $y = r^{-\nu}J$, où J désigne la fonction de r que l'on veut substituer à y. Il viendra, après avoir divisé par $r^{-\nu}$,

$$\frac{d^2J}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ}{dr} - \nu^2\frac{J}{r^2} = -J, \quad \text{où} \quad J = r^{\nu}y = r^{-\frac{1}{2}}Y. \tag{80}$$

Enfin, la substitution, à r, de son carré, ou mieux du quart, que j'appellerai ρ, de son carré, comme variable indépendante, donne encore à l'équation (78) une forme quelquefois utile. De $\rho = \frac{1}{4}r^2$, ou $r = 2\sqrt{\rho}$, il résulte $\frac{d}{dr} = \sqrt{\rho}\frac{d}{d\rho}$, et la relation (78) devient

$$\rho\frac{d^2y}{d\rho^2} + (1+\nu)\frac{dy}{d\rho} = -y, \quad \text{où} \quad \rho = \frac{1}{4}r^2. \tag{81}$$

418*. — Idée des fonctions de Fourier et de Bessel ou fonctions cylindriques : leurs expressions en intégrales définies et en séries.

Parmi les formes précédentes, (78) à (81), de l'équation de Riccati ou plutôt de celle du second ordre $y'' = ax^{p-2}y$, nous distinguerons surtout la troisième, (80), parce que c'est la forme sous laquelle

l'équation dont il s'agit se présente presque toujours, en Physique mathématique, dans l'étude des cylindres et des plaques circulaires, corps pour lesquels on en a spécialement besoin. Elle s'y trouve amenée par l'étude, dans un plan rapporté à des coordonnées polaires r et θ, de fonctions Φ, vérifiant l'équation simple $\Delta_2\Phi = -\Phi$ et constituées par le produit de deux fonctions $J(r)$, $f(\theta)$ qui dépendent exclusivement, l'une, du rayon vecteur r, l'autre, de l'azimut θ. Comme on a, pour une pareille fonction,

$$\Delta_2\Phi = \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Phi}{d\theta^2}$$

[t. I, p. 93*, form. (21)], l'équation $\Delta_2\Phi + \Phi = 0$, multipliée par $\frac{r^2}{\Phi}$, devient, en y isolant un terme en θ, après avoir substitué Jf à Φ,

$$(82) \qquad \frac{r^2}{J}\left(J'' + \frac{J'}{r}\right) + r^2 = -\frac{f''}{f}.$$

Or les deux membres de cette relation, étant indépendants, le second, de r, le premier, de θ, se réduisent forcément à une constante; et, de plus, cette constante est positive, ou peut être désignée par ν^2, si l'on veut que la fonction $f(\theta)$, alors régie par l'équation $-\frac{f''}{f} = \nu^2$ ou $f'' + \nu^2 f = 0$, ne soit pas exprimée par des exponentielles, mais ait la forme $C\cos(\nu\theta - c)$ et soit, par conséquent, périodique, de manière à permettre à la fonction de point $\Phi = J(r)f(\theta)$, supposée exister tout autour du pôle, de redevenir la même quand θ croît de 2π. La fonction J de r et de l'indice (*alors entier*) ν est donc définie par la relation $\frac{r^2}{J}\left(J'' + \frac{J'}{r}\right) + r^2 = \nu^2$, qui revient bien à (80). Ainsi s'explique l'importance des fonctions J et leur dénomination de *fonctions cylindriques*. On les appelle encore *fonctions de Fourier* et *de Bessel*, du nom des géomètres qui les ont découvertes.

Toutes les équations ci-dessus, (78), (79), (80), (81), rentrent dans le type (65), comme celle, $y'' = ax^{p-2}y$, qui nous a servi de point de départ pour les obtenir. On pourrait donc leur appliquer les formules (66) à (70), et développer en série soit leur intégrale générale, soit du moins une de leurs solutions particulières, qui permettrait ensuite de réduire aux quadratures (p. 257*) le calcul de leur intégrale générale elle-même.

Mais il est préférable de remarquer une ou deux de leurs solutions constituées par certaines intégrales définies, dont nous avons eu occa-

sion, au n° 337* (p. 152*), de chercher la forme asymptotique. Ce sont ces intégrales que nous appelions alors φ_m et dont l'expression était $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos(r\cos x)\,dx$. Nous avons reconnu (p. 154*), en y supposant implicitement $2m > -1$ (pour que $\sin^{2m+1} x$ s'annulât à la limite inférieure zéro), que chacune d'elles, d'un indice supérieur à $\frac{1}{2}$, se ramenait à une autre, d'indice moindre, par la formule

$$\varphi_{m+1} = -\frac{1+2m}{r}\frac{d\varphi_m}{dr}.$$

Or, d'autre part, si l'on différentie en r, deux fois de suite et sous le signe $\int$, l'intégrale φ_m, puis qu'on ajoute le résultat à cette intégrale elle-même, il vient identiquement

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_m + \frac{d^2\varphi_m}{dr^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x(1-\cos^2 x)\cos(r\cos x)\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(m+1)} x \cos(r\cos x)\,dx = \varphi_{m+1}, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire $\varphi_m + \frac{d^2\varphi_m}{dr^2} = -\frac{1+2m}{r}\frac{d\varphi_m}{dr}$ ou

$$\frac{d^2\varphi_m}{dr^2} + \frac{1+2m}{r}\frac{d\varphi_m}{dr} = -\varphi_m, \tag{83}$$

relation pareille à (78), en prenant $m = \nu$. Donc φ_ν est, pour $2m > -1$ ou $\nu > -\frac{1}{2}$, une solution particulière de l'équation différentielle (78) et, par suite, d'après l'expression $r^\nu y$ de la fonction J, le produit $r^\nu \varphi_\nu$ constitue une solution particulière de l'équation différentielle corrélative (80). Ainsi l'on pourra poser, en changeant d'ailleurs x en α sous le signe $\int$ de φ_ν, et en se bornant, pour le moment, à considérer une solution particulière,

$$(\text{pour } \nu > -\tfrac{1}{2}) \qquad J = r^\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\nu}\alpha \cos(r\cos\alpha)\,d\alpha. \tag{84}$$

L'intégrale $\int$ à limites finies, qui paraît au second membre, est parfaitement déterminée non seulement pour les valeurs positives de 2ν, mais même pour celles qui sont comprises entre zéro et -1, vu que la fonction sous le signe $\int$ ne devient infinie qu'à la limite inférieure zéro, et seulement dans les cas $2\nu < 0$, où elle est de l'ordre de

$(\sin\alpha)^{2\nu}$, c'est-à-dire comparable à $\alpha^{2\nu}$, de manière à ne commencer à rendre l'intégrale infinie que pour $2\nu = -1$. Donc, pourvu que ν soit compris entre $\mp\frac{1}{2}$, ou ν^2 moindre que $\frac{1}{4}$, la formule (84) exprimera, en y changeant le signe de ν, les deux intégrales particulières nécessaires pour composer l'intégrale générale de l'équation (80), où ν n'entre que par son carré; et ces deux intégrales pourront s'écrire

$$(85)\qquad (\text{pour } \nu^2 < \tfrac{1}{4})\quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\sin^2\alpha)^{\pm\nu}\cos(r\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Elles se réduisent à une seule au milieu $\nu = 0$ de l'intervalle considéré, ou alors que $(r\sin^2\alpha)^{\pm\nu} = 1$. Mais comme, pour $\nu = -$ une très petite quantité positive ε, leur différence, divisée par l'accroissement 2ε qu'éprouve l'exposant ν de l'une à l'autre, constitue une nouvelle solution particulière où $(r\sin^2\alpha)^\nu$ est remplacé, sous le signe $\int$, par

$$\frac{(r\sin^2\alpha)^\varepsilon - (r\sin^2\alpha)^{-\varepsilon}}{2\varepsilon} = \frac{d(r\sin^2\alpha)^\nu}{d\nu}\quad (\text{pour } \nu = 0),$$

cette solution particulière, qu'on pourra joindre à (85), sera

$$(86)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{d\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\sin^2\alpha)^\nu\cos(r\cos\alpha)\,d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(r\sin^2\alpha)^\nu\log(r\sin^2\alpha)\cos(r\cos\alpha)\,d\alpha \quad (\text{à la limite } \nu = 0).\end{aligned}\right.$$

Donc, quand $\nu = 0$, l'intégrale générale est, avec deux constantes arbitraires c, c_1,

$$(87)\qquad (\text{pour } \nu = 0)\quad \left\{\begin{aligned} J = c&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(r\cos\alpha)\,d\alpha \\ &+ c_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(r\sin^2\alpha)\cos(r\cos\alpha)\,d\alpha\ (^1).\end{aligned}\right.$$

---

(1) Il peut être bon de noter ce que devient, quand on a ainsi $\nu = -\varepsilon =$ (finalement) zéro, la forme binôme $y'' = ax^{p-2}y$ de l'équation, dans laquelle $p-2$, c'est-à-dire $-\frac{1}{\nu} - 2 = \frac{1}{\varepsilon} - 2$, se transforme en un exposant m infini. Si alors, effectuant le même changement de variable qu'au n° 349* (p. 188*) dans un cas analogue, et pour les mêmes raisons, on pose $x = 1 + \frac{\xi}{m}$ $\left(\text{d'où } \frac{d}{dx} = m\frac{d}{d\xi}\right.$, et

On remarquera que la deuxième solution particulière, affectée de c_1, devient infinie à la limite $r = 0$, par suite de ce que, $\log(r \sin^2 \alpha)$ s'y dédoublant en $\log r$ et $2 \log \sin \alpha$, il y a une partie de l'intégrale, savoir

$$(\log r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(r \cos \alpha)\, d\alpha = (\log 0) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha = \frac{\pi}{2} \log 0,$$

qui est alors infinie.

Cette observation s'étend au cas de valeurs quelconques de l'indice ν^2. Prenons, en effet, $\nu > 0$ dans le second membre de (84), dès lors parfaitement fini et déterminé à la limite $r = 0$, et, appelant α cette solution particulière, proposons-nous de ramener l'intégrale générale de (80) aux quadratures par la méthode du n° 385* (p. 257*), c'est-à-dire en posant $J = \alpha U$, où U désignera la nouvelle fonction à déterminer. L'équation (80) deviendra

$$(88) \qquad \alpha \left(\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) + 2\alpha' \frac{dU}{dr} = 0;$$

ce qui, multiplié par αr, donne identiquement

$$(89) \qquad \frac{d}{dr} \left(\alpha^2 r \frac{dU}{dr} \right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha^2 r \frac{dU}{dr} = \text{une constante } c_1.$$

$x^m = e^\xi$), l'équation $y'' = ax^m y$, en faisant d'ailleurs $a = \mathrm{K} m^2$, devient

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = \mathrm{K} e^\xi y.$$

Celle-ci n'est donc qu'un cas limite de l'équation $y'' = ax^m y$ ou de Riccati, et y s'y trouve réductible à la fonction cylindrique J exprimée par (87), du moins quand a, K sont négatifs et, par suite, r réel dans (77). Alors la relation entre x et r donnée immédiatement avant cette formule (77) devient, en prenant les logarithmes des deux membres après avoir remplacé a par $\mathrm{K} m^2$,

$$\log x \quad \text{ou} \quad \frac{\xi}{m} = \frac{1}{p} \log \left(\frac{p^2 r^2}{-4 \mathrm{K} m^2} \right),$$

c'est-à-dire, vu la limite 1 du rapport de $p = m + 2$ à m,

$$\xi = \log \left(\frac{r^2}{-4\mathrm{K}} \right) \qquad \text{ou} \qquad r = 2 \sqrt{-\mathrm{K}}\, e^{\frac{\xi}{2}}.$$

Telle est, par conséquent, la valeur de r qui, substituée dans (87), fera de cette expression particulière de J l'expression générale de la quantité y régie par l'équation $\frac{d^2 y}{d\xi^2} = \mathrm{K} e^\xi y$.

Il vient donc $\frac{dU}{dr} = \frac{c_1}{\alpha^2 r}$, et

$$(90)\quad U = c_1 \int \frac{dr}{\alpha^2 r} + \text{une const. } c \quad \text{ou} \quad J = \alpha U = c\alpha + c_1 \alpha \int \frac{dr}{\alpha^2 r}.$$

Comme α est, d'après (84), de l'ordre de r^ν près de la limite $r = 0$, on voit que le facteur de c_1, dans l'expression de J, s'y trouve lui-même de l'ordre de $r^\nu \int r^{-2\nu-1}\,dr$, c'est-à-dire comparable à $r^\nu r^{-2\nu} = r^{-\nu}$, pour $\nu > 0$, et à $\log r$ pour $\nu = 0$, ou, par conséquent, infini dans les deux cas. Donc la seconde partie de J, celle que ne peut pas donner la solution simple (84) multipliée par une constante c, devient nécessairement infinie à la limite $r = 0$.

Cela posé, les problèmes les plus importants pour lesquels on ait besoin des fonctions J sont ceux où le corps étudié existe au pôle même $r = 0$, et y présente un état physique non moins fini, non moins continu qu'ailleurs. Par conséquent, le dernier terme de (90) ne pourra pas y figurer, et l'on aura $c_1 = 0$, ou $J = c\alpha$; ce qui rendra suffisante la solution simple (84), prise avec $\nu > 0$ et multipliée par un coefficient quelconque c. D'ailleurs, les valeurs de ν sont alors entières, comme il a été remarqué (p. 309*); et, si, pour distinguer les fonctions J correspondant aux divers indices ν, on les affecte de cet indice, en posant

$$(91)\qquad (\text{pour } \nu > 0) \quad J_\nu = r^\nu \varphi_\nu,$$

toutes ces fonctions seront calculables, de proche en proche, à partir de J_0,

$$(92)\qquad J_0 = \varphi_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(r\cos\alpha)\,d\alpha,$$

par la formule, qui vient d'être rappelée (p. 310*),

$$(93)\qquad \varphi_{\nu+1} = -\frac{1+2\nu}{r}\frac{d\varphi_\nu}{dr}.$$

Évaluons-les en série. A cet effet, remplaçons dans (92), sous le signe $\int$, $\cos(r\cos\alpha)$ par le développement toujours convergent $1 - \frac{r^2}{1.2}\cos^2\alpha + \frac{r^4}{1.2.3.4}\cos^4\alpha - \ldots$, et rappelons (p. 89) que la valeur moyenne de $\cos^{2n}\alpha$ entre les limites $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, est $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$. Il viendra, en intégrant chaque terme du produit de ce développe-

ment par $d\alpha$,

$$(94) \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{r^2}{2^2} + \frac{r^4}{2^2.4^2} - \frac{r^6}{2^2.4^2.6^2} + \cdots\right).$$

La relation (93), où l'on fera $\nu = 0$, donnera donc

$$(95) \qquad \varphi_1 = -\frac{1}{r}\frac{d\varphi_0}{dr} = 1.\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2^2.4} + \frac{r^4}{2^2.4^2.6} - \cdots\right);$$

et l'on en déduira le développement de $J_1 = r\varphi_1$. Puis, en faisant $\nu = 1$ dans (93), il viendra

$$(96) \qquad \varphi_2 = -\frac{3}{r}\frac{d\varphi_1}{dr} = 1.3\,\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2.4} - \frac{r^2}{2^2.4.6} + \frac{r^4}{2^2.4^2.6.8} - \cdots\right);$$

d'où résultera l'expression de $J_2 = r^2\varphi_2$: et ainsi de suite. Les fonctions J_0, J_1, J_2, ... seront bien respectivement comparables à r^0, r^1, r^2, ... pour les petites valeurs de r.

Le développement de J_ν, même pour les valeurs fractionnaires de 2ν, s'obtiendrait directement en remplaçant $\cos(r\cos\alpha)$ par

$$1 - \frac{r^2}{1.2}\cos^2\alpha + \ldots$$

dans le second membre de (84), comme nous venons de le faire pour J_0, et en ramenant ensuite à la première d'entre elles, par la méthode usuelle (p. 32), les diverses intégrales à effectuer, savoir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\nu}\alpha\cos^{2i}\alpha\,d\alpha,$$

où i recevrait successivement les valeurs entières 0, 1, 2, 3, ... jusqu'à l'infini. Il viendrait, de la sorte, au facteur près r^ν, une série procédant suivant les puissances paires de r, et ayant pour premier terme l'unité, abstraction faite du facteur commun $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\nu}\alpha\,d\alpha$, qui resterait seul à évaluer. Ce facteur, aisément calculable dans le cas de 2ν entier, serait d'ailleurs rendu inutile par l'emploi de la série elle-même comme solution simple; car il se combinerait, dans l'intégrale (90), avec la constante c, pour donner une nouvelle constante arbitraire. Il est d'ailleurs à peine nécessaire d'ajouter que les développements obtenus sont identiques à ceux que donnent, pour ces cas où 2ν dépasse -1, les formules plus générales (67) à (70) du n° 416* (p. 305*), et identiques aussi, quand ν est entier, aux séries des

seconds membres de (95), (96), etc., divisées par leurs premiers termes.

419*. — Calcul approché des mêmes fonctions quand leur variable est assez grande, au moyen de leurs expressions asymptotiques complétées grâce à la méthode de la variation des constantes.

Pour nous borner aux cas utiles de ν entier et positif, les développements ci-dessus (94), (95), (96), etc., suffiront au calcul des fonctions cylindriques, tant que la variable r ne dépassera pas quelques unités. Mais, au delà, ce calcul deviendra trop long ; et il y aura lieu de suppléer aux formules (94), (95), etc., par des expressions comme celles que nous avons obtenues pour des fonctions diverses dans la XXXIe Leçon (pp. 141*, 147*, 156*) ou qui, basées sur les formes asymptotiques de ces fonctions, convergent de plus en plus vite à mesure que la variable est plus grande, devenant ainsi d'autant meilleures que s'accuse davantage le défaut des autres modes de calcul. Nous pourrons justement utiliser, à cet effet, les expressions asymptotiques (26) et (28) [pp. 154* et 155*], que nous y avons obtenues pour les fonctions φ_0 et φ_ν, savoir

$$(97)\ (\text{pour } r \text{ très grand}) \quad \begin{cases} \varphi_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2r}} \cos\left(r - \dfrac{\pi}{4}\right), \\[2ex] \varphi_\nu = \dfrac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{(-r)^\nu} \sqrt{\dfrac{\pi}{2r}} \dfrac{d^\nu}{dr^\nu} \cos\left(r - \dfrac{\pi}{4}\right), \end{cases}$$

et qui, vu les valeurs $J_\nu = r^\nu y = r^\nu \varphi_\nu$, $Y_\nu = r^{\frac{1}{2}} J_\nu$ (p. 308*), des deux fonctions J et Y corrélatives à φ_ν, donnent

$$(98)\ (\text{pour } r \text{ très grand}) \quad \begin{cases} J_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2r}} \cos\left(r - \dfrac{\pi}{4}\right), \\[2ex] J_\nu = \dfrac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{(-1)^\nu} \sqrt{\dfrac{\pi}{2r}} \dfrac{d^\nu}{dr^\nu} \cos\left(r - \dfrac{\pi}{4}\right), \\[2ex] Y_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \cos\left(r - \dfrac{\pi}{4}\right), \\[2ex] Y_\nu = \dfrac{1.3.5\ldots(2\nu-1)}{(-1)^\nu} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{d^\nu}{dr^\nu} \cos\left(r - \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

La forme périodique des dernières, qui sont les expressions finales des fonctions Y, aurait pu se prévoir, d'après l'équation différentielle (79) qui régit ces fonctions. En effet, quand r croît sans limite, le terme de (79) qui contient r^2 en dénominateur prend la forme εY,

avec ε évanouissant du *second* ordre de petitesse ; et l'équation, devenue $Y'' + (1+\varepsilon)Y = 0$ ou tendant vers $Y'' + Y = 0$, montre que son intégrale générale tend elle-même vers la forme $A\cos(r - B)$. Mais les formules (98) font, de plus, connaître les constantes A et B. Pour Y_0, par exemple, elles donnent $A = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $B = \frac{\pi}{4}$.

Cela posé, écrivant l'équation (79) ainsi,

$$\frac{d^2 Y}{dr^2} + Y = -\left(\tfrac{1}{4} - \nu^2\right)\frac{Y}{r^2}, \tag{99}$$

et y considérant des valeurs de r non plus infinies, mais cependant telles que le second membre soit une assez petite fraction de Y, il nous suffira de l'intégrer par la méthode approchée de la variation des constantes (p. 211), à partir de $r = \infty$ où Y et Y' nous sont connus, pour avoir l'expression cherchée de Y; d'où se déduiront, si on le désire, celles de J et de φ ou y.

Développons les calculs dans le cas particulièrement important $\nu = 0$, le seul à considérer quand l'état physique des cylindres circulaires dont on s'occupe est pareil tout autour de l'axe, ou quand $f(\theta) = \cos(\nu\theta - c)$ se réduit (p. 309*) à une constante. L'équation sans second membre $Y'' + Y = 0$, qui sert de point de départ, étant l'équivalent des deux équations simultanées

$$dY - Y'dr = 0, \qquad dY' + Y\,dr = 0,$$

ce sont les deux intégrales de celles-ci, savoir

$$Y = A\cos(r - B), \qquad Y' = -A\sin(r - B), \tag{100}$$

qui fourniront le type des deux expressions cherchées de la fonction Y et de sa dérivée Y' régies par (99), *en y regardant* A *et* B *comme désormais variables*. On aura à substituer ces expressions (100), en même temps que leurs dérivées *complètes* en r, dans les deux équations du problème

$$\frac{dY}{dr} - Y' = 0, \qquad \frac{dY'}{dr} + Y = -\frac{Y}{4r^2}, \tag{101}$$

dont la seconde n'est autre que (99) prise avec $\nu = 0$. Il vient ainsi, pour déterminer le mode de variation de A et B, les deux relations

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dr}\cos(r - B) + A\dfrac{dB}{dr}\sin(r - B) = 0, \\ -\dfrac{dA}{dr}\sin(r - B) + A\dfrac{dB}{dr}\cos(r - B) = -\dfrac{A}{4r^2}\cos(r - B). \end{cases} \tag{102}$$

La fonction A s'élimine, en les ajoutant après les avoir respectivement multipliées par $\sin(r - B)$ et $\cos(r - B)$, puis en divisant par A (qui ne peut évidemment s'annuler d'une manière continue). Il vient

$$(103) \qquad \frac{dB}{dr} = -\frac{\cos^2(r - B)}{4r^2} = -\frac{1}{8r^2}[1 + \cos 2(r - B)].$$

Le second membre, essentiellement négatif, prouve que B, égal à $\frac{\pi}{4}$ pour r infini, tend vers cette limite en décroissant sans cesse, et que, de $r = r$ à $r = \infty$, sa variation absolue, exprimée par

$$\int_r^\infty \frac{\cos^2(r - B)}{4r^2} dr,$$

reste inférieure à $\int_r^\infty \frac{dr}{4r^2}$ ou $\frac{1}{4r}$. On peut donc, si r est assez grand, prendre simplement, *du moins à une première approximation*, $B = \frac{\pi}{4}$ dans le troisième membre de (103), qui, multiplié par dr et intégré de $r = r$ à $r = \infty$, puis retranché de $\frac{\pi}{4}$, donne, dès lors, à fort peu près,

$$(104) \qquad B = \frac{\pi}{4} + \int_r^\infty \frac{1 + \sin 2r}{8r^2} dr = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8r} + \int_r^\infty \frac{\sin 2r}{8r^2} dr.$$

Effectuons par parties l'intégration indiquée au dernier terme, en choisissant le facteur algébrique $\frac{1}{8r^2}$ pour facteur non intégré, et il viendra

$$(105) \qquad B = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8r} + \frac{\cos 2r}{16r^2} - \int_r^\infty \frac{\cos 2r}{8r^3} dr.$$

On pourrait appliquer la même réduction au dernier terme de celle-ci. Mais, si l'on convient, pour simplifier, de s'arrêter *définitivement* aux quantités du second ordre de petitesse et de négliger, en conséquence, celles de l'ordre de r^{-3}, on pourra le supprimer. En effet, ses éléments, changeant de signe chaque fois que $2r$ croît de π, constituent des groupes à signes alternés, de champ $\frac{\pi}{2}$ dès le second, et dont les valeurs absolues totales décroissent graduellement de l'un à l'autre, à partir du moins de ce second groupe. L'intégrale est donc, en valeur absolue, notablement inférieure au plus grand des groupes, qui

n'atteint évidemment pas le produit de $\frac{\pi}{2}$ par la valeur la plus forte possible, $\frac{1}{8r^3}$, de la fonction sous le signe $\int$. Ainsi, le dernier terme de (105) n'est qu'une fraction de $\pm\frac{\pi}{16r^3}$ et se trouvera négligeable.

A une deuxième approximation, $\cos 2(r-\mathrm{B})$ ne sera plus $\sin 2r$ dans le dernier terme de (103), mais bien, d'après (105),

$$\cos\left(2r-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4r}-\cdots\right) \quad \text{ou} \quad \sin\left(2r-\frac{1}{4r}-\cdots\right);$$

ce qui, vu le petit accroissement $-\frac{1}{4r}-\cdots$, éprouvé par l'arc $2r$, et vu que la dérivée d'un sinus est le cosinus, ajoutera sensiblement à $\sin 2r$, dans le dernier terme de (104), la petite partie $-\frac{\cos 2r}{4r}$. Donc les seconds membres de (104) et de (105) s'accroîtront, à fort peu près, du terme $-\int_r^\infty \frac{\cos 2r}{32r^3}dr$, égal au quart du dernier terme de (105) et négligeable comme lui. Ainsi l'on aura définitivement, avec erreur de l'ordre de r^{-3} seulement,

$$\mathrm{B}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8r}+\frac{\cos 2r}{16r^2}. \tag{106}$$

Occupons-nous actuellement de A. L'équation (103) pouvant remplacer la seconde (102), nous n'aurons qu'à substituer, dans la première (102) divisée par A, la valeur de $\frac{d\mathrm{B}}{dr}$ fournie par le deuxième membre de (103). Il viendra, après suppression du facteur commun $\cos(r-\mathrm{B})$,

$$\frac{d\log\mathrm{A}}{dr}=\frac{\cos(r-\mathrm{B})\sin(r-\mathrm{B})}{4r^2}=\frac{\sin 2(r-\mathrm{B})}{8r^2}; \tag{107}$$

et, en multipliant par dr, puis intégrant depuis $r=r$ jusqu'à la limite $r=\infty$, où $\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, on aura

$$\log\sqrt{\frac{\pi}{2}}-\log\mathrm{A}=\int_r^\infty\frac{\sin 2(r-\mathrm{B})}{8r^2}dr,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-\int_r^\infty\frac{\sin 2(r-\mathrm{B})}{8r^2}dr}. \tag{108}$$

Les raisonnements ci-dessus montrent que l'on peut, sauf erreur de l'ordre de r^{-3}, remplacer B, sous le signe $\int$, par sa valeur approchée $\frac{\pi}{4}$, et intégrer ensuite par parties en choisissant le facteur algébrique comme facteur non intégré. Le premier terme obtenu sera, d'ailleurs, comme plus haut dans (104), seul sensible; et l'on trouvera

$$\text{(109)} \qquad A = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{\sin 2r}{16r^2}}.$$

Telles sont donc les valeurs de B et A qu'il faudra porter dans (100) pour avoir Y et Y'; après quoi l'on en déduira l'expression de J_0, égale à $r^{-\frac{1}{2}}Y$, que l'on se proposait de former, et aussi, directement, si l'on veut, celle de la dérivée J'_0. La différentiation de $J_0 = r^{-\frac{1}{2}}Y$ donne, en effet, $J'_0 = r^{-\frac{1}{2}}Y' - \frac{1}{2}r^{-\frac{3}{2}}Y$, ou, à cause des formules (100),

$$\text{(110)} \qquad J'_0 = -r^{-\frac{1}{2}}A\left[\sin(r-B) + \frac{\cos(r-B)}{2r}\right].$$

Or, à une erreur près de l'ordre de r^{-2}, le binôme entre crochets, dont le second terme peut être regardé comme un petit accroissement du premier, devient le simple sinus $\sin\left(r - B + \frac{1}{2r}\right)$, et comme celui-ci, développé par la formule de Taylor suivant les puissances de $\frac{1}{2r}$ jusqu'aux termes du troisième ordre exclusivement, serait

$$\sin\left(r - B + \frac{1}{2r}\right) = \sin(r-B) + \frac{1}{2r}\cos(r-B) - \frac{1}{8r^2}\sin(r-B),$$

ou encore, sauf erreur négligeable du même ordre de r^{-3},

$$\left\{\begin{aligned} \sin\left(r - B + \frac{1}{2r}\right) &= \left[\sin(r-B) + \frac{\cos(r-B)}{2r}\right]\left(1 - \frac{1}{8r^2}\right) \\ &= \left[\sin(r-B) + \frac{\cos(r-B)}{2r}\right]e^{-\frac{1}{8r^2}}, \end{aligned}\right.$$

le binôme entre crochets, dans (110), revient à $e^{\frac{1}{8r^2}}\sin\left(r - B + \frac{1}{2r}\right)$.

En définitive, les expressions cherchées de J_0 et de J'_0 seront respectivement, sous forme monôme,

$$r^{-\frac{1}{2}}A\cos(r-B) \qquad \text{et} \qquad -r^{-\frac{1}{2}}A\,e^{\frac{1}{8r^2}}\sin\left(r - B + \frac{1}{2r}\right),$$

ou, avec les valeurs (106), (109) de B et A,

$$(111)\quad \begin{cases} J_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2r}}\, e^{-\frac{\sin 2r}{16r^2}} \cos\left(r - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{8r} - \dfrac{\cos 2r}{16r^2}\right), \\ \dfrac{dJ_0}{dr} = -\sqrt{\dfrac{\pi}{2r}}\, e^{\frac{1}{8r^2}\left(1 - \frac{\sin 2r}{2}\right)} \sin\left(r - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3}{8r} - \dfrac{\cos 2r}{16r^2}\right). \end{cases}$$

420*. — Résolution rapide d'équations transcendantes où figurent les fonctions cylindriques.

Ces formules (111) seront spécialement utiles quand il s'agira de déterminer les racines un peu élevées d'équations où figureront les fonctions cylindriques. On a, par exemple, dans divers problèmes de Physique mathématique, à déterminer les valeurs positives de r qui annulent soit la fonction J_0, soit sa dérivée. L'emploi de la série (94), ou de celle qui en résulte par différentiation, conduit alors à des calculs de longueur modérée tant qu'il ne s'agit que des deux premières racines; mais il devient presque impraticable au delà, c'est-à-dire précisément alors que les deux formules (111) commencent à être fort approchées. Or la forme même de celles-ci montre que J_0 et J'_0 s'annulent, alternativement, quand les deux arcs entre parenthèses, qui sont presque égaux à $r - \frac{\pi}{4}$, deviennent les multiples impairs et pairs successifs de $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, en évaluant ces racines par les relations (111), la $n^{\text{ième}}$ de $J_0 = 0$ donnera

$$(112)\qquad r - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8r} - \frac{\cos 2r}{16r^2} = \frac{2n-1}{2}\pi,$$

et la $n^{\text{ième}}$ de $J'_0 = 0$ (abstraction faite de la racine nulle évidente) donnera de même

$$(113)\qquad r - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8r} - \frac{\cos 2r}{16r^2} = n\pi.$$

Dans les deux cas, $2r$ ne diffère d'un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ que par une quantité comparable à r^{-1}, et $\cos 2r$ est de l'ordre de r^{-1}, ou, le terme $-\frac{\cos 2r}{16r^2}$, du troisième ordre de petitesse, c'est-à-dire négligeable. Les deux équations (112) et (113), réunies d'ailleurs en une seule à double signe, sont donc

$$(114)\qquad r - \frac{\pi}{4} + \frac{1 \mp 2}{8r} = \frac{(4n-1) \mp 1}{4}\pi \quad \text{ou} \quad r + \frac{1 \mp 2}{8r} = \frac{4n \mp 1}{4}\pi.$$

Multipliées par r, elles deviennent deux équations du second degré, dont les racines cherchées, voisines de $\frac{4n \mp 1}{4}\pi$, sont enfin

$$(115) \qquad r = \frac{4n \mp 1}{8}\pi + \sqrt{\left(\frac{4n \mp 1}{8}\pi\right)^2 - \frac{1 \mp 2}{8}}.$$

Les signes supérieurs conviennent pour l'équation $J_0 = 0$ et les signes inférieurs pour l'équation $J'_0 = 0$. Dans le cas de l'équation $J_0 = 0$, les deux premières racines, obtenues en posant $n = 1$ et $n = 2$, sont, d'après (115), $r = 2,4081$ et $r = 5,5204$, tandis que leur calcul direct au moyen de la série (94) donne $r = 2,4048$ et $r = 5,5201$. Ainsi la formule (115) se trouve approchée par excès pour cette première équation $J_0 = 0$, et il est visible que l'erreur, égale à 0,0033 seulement pour la première racine, à 0,0003 pour la deuxième, serait négligeable dès la troisième racine.

Quant à l'équation $J'_0 = 0$, M. de Saint-Venant en a évalué les neuf premières racines [1] au moyen de la dérivée de la série (94); et, pour les trois premières, par exemple, il a obtenu $r = 3,8317$, $= 7,0156$, $= 10,1735$. Leurs valeurs approchées (115) sont respectivement 3,8291, 7,0151, 10,1733; ce qui montre que, pour cette équation $J'_0 = 0$, la formule (115) est, contrairement au cas de l'équation $J_0 = 0$, approchée par défaut, et en erreur, respectivement, de 0,0026, 0,0005, 0,0002, etc. On voit que cette erreur devient négligeable, dans la pratique, dès la troisième racine, et qu'elle n'est même guère sensible sur les deux premières, comme il arrivait déjà pour l'équation $J_0 = 0$, où elle paraissait décroître, d'ailleurs, plus rapidement.

On procéderait d'une manière analogue s'il s'agissait de résoudre d'autres équations du même genre, dans lesquelles les deux expressions $A\cos(r - B)$, $A\sin(r - B)$ seraient combinées, soit linéairement, soit avec le facteur $\frac{1}{r}$ multipliant l'une d'elles [ce qui avait lieu, d'après la formule (110), pour l'équation $J'_0 = 0$]; et, plus généralement, on ne manquerait pas d'utiliser la méthode de la variation des constantes dans l'étude de la marche des fonctions qui, comme J_ν, se simplifient notablement pour les très grandes valeurs de leurs variables.

[1] Avec l'aide de deux calculateurs qu'il y a employés pendant plus d'un mois (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 février 1869).

QUARANTE-DEUXIÈME LEÇON.

DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET DE LEUR INTÉGRATION SOUS FORME FINIE : ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

421* — **Des équations aux dérivées partielles : idée de leur utilité.**

Nous avons consacré déjà six Leçons à l'étude des quantités dont on donne une dérivée en fonction des variables indépendantes et surtout des valeurs actuelles tant de ces quantités que de certaines de leurs autres dérivées. Mais nous supposions unique la variable indépendante x, qui était tantôt une abscisse, tantôt le temps. Or il y a bien des questions où l'emploi de plusieurs variables indépendantes, $x, y, \ldots$, est indispensable, et où les fonctions inconnues, que j'appellerai $u, v, \ldots$, se trouvent définies, quant à leurs changements élémentaires, soit par une expression de leur différentielle totale dans laquelle peuvent entrer ces fonctions inconnues, soit au moyen de relations déterminant certaines de leurs dérivées partielles en fonction d'autres et des variables indépendantes ou dépendantes. Dans le second cas, les relations proposées sont dites, *non plus des équations différentielles*, mais des *équations aux dérivées partielles*. Et le premier pourrait s'y ramener ; car connaître une expression de la différentielle totale d'une fonction équivaut à en avoir une pour chacune des dérivées partielles dont dépend la différentielle totale ; ce qui fait tout autant d'équations simultanées aux dérivées partielles, comme étaient, par exemple, aux n°s 218 et 220* (p. 12 et 3*) les relations (6), (16), etc.

Nous nous bornerons donc aux équations aux dérivées partielles. Elles sont utiles, en Géométrie, dans la théorie des surfaces, comme le montreront bientôt quelques exemples. Mais c'est surtout en Mécanique et en Physique, dans l'étude des phénomènes offerts par les corps d'une certaine étendue, qu'elles acquièrent une importance extrême. En effet, les particules matérielles en rapport mutuel de contiguïté ou, par suite, d'action, et susceptibles de présenter des états physiques distincts, s'y offrent en nombre pour ainsi dire infini ; ce qui permet de regarder les quantités définissant ces états phy-

siques comme des fonctions de point, variables non seulement avec le temps (s'il s'agit de phénomènes dynamiques), mais aussi d'une particule à ses voisines, ou en fonction continue des coordonnées x, y, z soit actuelles, soit primitives, au moyen desquelles on y distingue les unes des autres toutes les particules. Or il suit de là, comme nous le verrons plus complètement au commencement de la XLIVe Leçon, que les influences exercées sur une particule par ses voisines, et dont dépend presque toujours le changement élémentaire de son état, c'est-à-dire la dérivée, par rapport au temps, des quantités définissant son état, s'expriment au moyen de ces quantités mêmes et de leurs différences actuelles éprouvées tout autour, ou mesurées par leurs dérivées en x, y, z; car les influences dont il s'agit sont essentiellement fonction des états physiques réalisés dans la région de l'espace où elles ont lieu. C'est ainsi que la dérivée de l'état actuel par rapport au temps se reliera à ses dérivées par rapport aux coordonnées, et que les problèmes de Physique se traduiront analytiquement par des équations aux dérivées partielles.

Mais plaçons-nous plutôt, dans cette Leçon ainsi que dans la suivante, au point de vue de l'Analyse pure et de la Géométrie, quoique certains procédés d'intégration auxquels nous allons être conduits doivent trouver aussi leur emploi en Mécanique physique; et quand, par exemple, il y a seulement deux variables indépendantes x et y à considérer, regardons-les comme deux coordonnées rectangulaires sur un plan horizontal des xy, tandis que leurs fonctions, inconnues, $u, v, \ldots$, seront les ordonnées verticales z de tout autant de surfaces, propres à représenter toutes leurs valeurs.

422*. — Signification des équations aux dérivées partielles; existence et étendue de leurs intégrales générales, dans les cas où une des variables indépendantes peut être choisie comme variable principale.

Il arrivera assez souvent que, pour une certaine valeur, x_0, de l'une, x par exemple, des variables indépendantes, les fonctions u, $v, \ldots$ seront données directement dans tout le champ où varient les autres variables $y, z, \ldots$, et qu'elles en égaleront certaines *fonctions arbitraires* $\varphi(y, z, \ldots)$, $\psi(y, z, \ldots)$, ... Alors x jouera le rôle qu'avait la variable indépendante unique quand il s'agissait de simples équations différentielles. Autrement dit, c'est à ses valeurs successives, de plus en plus éloignées de x_0, que correspondront les changements continus éprouvés de proche en proche par $u, v, \ldots$ à partir de leurs valeurs *initiales* données

$$u_0 = \varphi(y, z, \ldots), \qquad v_0 = \psi(y, z, \ldots), \quad \ldots,$$

comme il arrivait quand celles-ci, faute de variables y, z, ... autres que x, étaient de simples *constantes arbitraires*. Une telle quantité x sera dite la *variable indépendante principale*.

Cela posé, quand, dans une équation aux dérivées partielles où figurera une fonction inconnue u, la dérivée de u *la plus élevée relativement à la variable principale* x sera une dérivée *directe,* ou prise *uniquement* par rapport à x, l'ordre de cette dérivée directe constituera ce qu'on appelle *l'ordre* même *de l'équation, eu égard à la variable principale choisie,* et, l'équation, résolue par rapport à cette dérivée directe, admettra une signification facile à saisir.

Supposons, par exemple, que l'équation, à trois variables x, y, u dont deux, x et y, indépendantes, soit *du premier ordre en* x, ou ne contienne, à part x, y, u et des dérivées quelconques de u en y, que la dérivée première de u en x. Alors, en la résolvant par rapport à celle-ci, on la mettra sous la forme

$$\text{(1)} \qquad \frac{du}{dx} = f\left(x, y, u, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \ldots\right).$$

Or on donne, par hypothèse, pour $x = x_0$, les valeurs $u_0 = \varphi(y)$ de la fonction inconnue et, par suite, toutes ses dérivées successives en y, $\varphi'(y)$, $\varphi''(y)$, ... En d'autres termes, nous connaissons entièrement la coupe $u = \varphi(y)$, par le plan $x = x_0$, de la surface demandée, $u = \mathrm{F}(x, y)$, qu'il s'agit de construire conforme à l'équation (1). Si donc nous convenons de faire tracer cette surface par une courbe, graduellement déformable, d'un plan mobile $x =$ const. sans cesse normal aux x, courbe dont chaque point pourra être censé garder la même coordonnée y ou se mouvoir dans un plan vertical parallèle aux x, l'équation (1) définira à tout instant, ou pour chaque valeur de x, la *pente* $\frac{du}{dx}$ de la trajectoire de ces divers points, en fonction continue de leur situation (x, y, u), et de la pente $\frac{du}{dy}$, ou des circonstances de forme $\frac{d^2u}{dy^2}$, ..., qu'y affectera la courbe génératrice. Toutes ces données étant fournies quand $x = x_0$, il existera au début, pour chaque *point décrivant,* une *direction* déterminée, que fixe la pente $\frac{du}{dx}$, suivant laquelle il pourra se mouvoir pour arriver, avec la file entière $u = \varphi(y)$, dans un plan $x =$ const. voisin de $x = x_0$. Et comme il en sera de même de proche en proche, ou que la courbe décrivante aura sans cesse devant elle une voie ouverte par l'équation (1) [sauf les cas de valeurs $f(x, y, u, \ldots)$ imaginaires ou infinies], la

surface $u = F(x, y)$ sera possible, à partir d'une première coupe $u_0 = \varphi(y)$, tracée arbitrairement (au moins entre certaines limites) dans le plan $x = x_0$.

Il est clair que, s'il figurait dans le second membre de (1), outre x et y, d'autres variables indépendantes $z, \ldots$, avec des dérivées quelconques de u par rapport à ces variables, soit seules, soit mêlées à y, les valeurs de u *initiales,* ou correspondant à $x = x_0$, constitueraient ensemble une fonction arbitraire de la forme $u_0 = \varphi(y, z, \ldots)$, au lieu de $u_0 = \varphi(y)$, et que l'équation (1) continuerait à définir, de proche en proche, une certaine manière possible de faire varier u en fonction de x, pour chaque groupe *fixe* de valeurs de $y, z, \ldots$, et presque de même pour des groupes très voisins, de manière à composer, en accord avec l'équation (1), une fonction $u = F(x, y, z, \ldots)$ continue non seulement par rapport à x, mais aussi par rapport à y, $z, \ldots$. Ainsi, *toute équation aux dérivées partielles, du premier ordre par rapport à la variable indépendante principale x, admet une intégrale générale, dans laquelle les valeurs initiales de la quantité à déterminer u constituent une fonction arbitraire des autres variables $y, z, \ldots$.*

Cette intégrale générale est d'ailleurs unique ; car, en nous bornant, par exemple, au cas des deux variables x, y, si, pour une certaine valeur x de la variable principale, deux fonctions distinctes u, U devenaient possibles, on aurait, pour les valeurs suivantes, jusqu'à une autre très voisine $x + \varepsilon$, non seulement l'équation (1), mais encore celle-ci

$$(2) \qquad \frac{dU}{dx} = f\left(x, y, U, \frac{dU}{dy}, \frac{d^2U}{dy^2}, \ldots\right);$$

et, par suite, la différence d'abord nulle $U - u$ aurait sa dérivée en x donnée par la relation

$$(3) \quad \frac{d(U-u)}{dx} = f\left(x, y, U, \frac{dU}{dy}, \frac{d^2U}{dy^2}, \ldots\right) - f\left(x, y, u, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \ldots\right).$$

Or, sauf pour des systèmes spéciaux de valeurs des quantités $x, y, u, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dy^2}, \ldots$, et aussi des rapports

$$\frac{1}{U-u}\frac{d(U-u)}{dy}, \quad \frac{1}{U-u}\frac{d^2(U-u)}{dy^2}, \quad \ldots$$

qui ne peuvent devenir qu'exceptionnellement infinis, la fonction f n'éprouve, quand on y change $u, \frac{du}{dy}, \cdots$ en $U, \frac{dU}{dy}, \ldots$, qu'une

variation comparable à $U - u$. Donc, *en général,* le second membre de (3) est de l'ordre de $U - u$, ou reste inférieur (en valeur absolue), pendant que x croît de ε sans que y varie, au produit d'une quantité *finie* K par la dernière valeur de la différence, d'abord nulle et croissante, $U - u$. Alors l'équation (3), multipliée par dx et intégrée dans tout l'intervalle ε, donne évidemment

$$(4) \qquad U - u < K(U - u)\varepsilon \quad \text{(en valeur absolue)},$$

inégalité impossible quand $U - u$ diffère de zéro, à cause du coefficient infiniment petit $K\varepsilon$ de $U - u$ dans le second membre. Donc cette différence $U - u$ s'annule; et *la solution* $u = F(x, y)$ *reste unique, en dehors des circonstances exceptionnelles indiquées, les seules, qui, par conséquent, rendent possibles des bifurcations et des intégrales singulières.*

Cette théorie s'étend d'elle-même au cas d'équations simultanées du premier ordre

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f_1\left(x, y, u, v, \ldots, \dfrac{du}{dy}, \dfrac{dv}{dy}, \ldots, \dfrac{d^2u}{dy^2}, \dfrac{d^2v}{dy^2}, \ldots\right), \\ \dfrac{dv}{dx} = f_2\left(x, y, u, v, \ldots, \dfrac{du}{dy}, \dfrac{dv}{dy}, \ldots, \dfrac{d^2u}{dy^2}, \ldots\right), \quad \ldots, \end{cases}$$

où plusieurs surfaces $u = F_1(x, y)$, $v = F_2(x, y)$, ... sont tracées à la fois par tout autant de courbes d'un même plan mobile $x = \text{const.}$, chaque point décrivant ayant à tout instant sa direction, définie par $\frac{du}{dx}$, ou par $\frac{dv}{dx}$, ..., sous la dépendance des autres, situés au-dessus ou au-dessous de lui, et même des circonstances de forme qu'y présentent les courbes génératrices. Mais il est évident qu'alors l'*état initial* comprend autant de fonctions arbitraires

$$u_0 = \varphi(y), \qquad v_0 = \psi(y), \qquad \ldots$$

qu'il y a, dans le système (5), d'équations ou d'inconnues u, v, ...; et il est clair en outre que, s'il ne s'agissait pas de simples surfaces, ou qu'il y eût plus de deux variables indépendantes x, y, ces *données initiales* comprendraient des fonctions arbitraires $u_0 = \varphi(y, z, \ldots)$, $v_0 = \psi(y, z, \ldots)$, ..., de toutes les variables indépendantes autres que la principale, x.

Or on voit de suite qu'une équation du *second ordre,* de la forme

$$(6) \qquad r = f(x, y, u, p, q, s, t),$$

où p, q, r, s, t désignent, suivant l'usage, les dérivées respectives,

premières et secondes, $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2u}{dx\,dy}, \frac{d^2u}{dy^2}$, équivaut, en y regardant p comme une fonction distincte, aux deux équations simultanées du premier ordre

$$(7) \qquad \frac{du}{dx} = p, \qquad \frac{dp}{dx} = f\left(x, y, u, p, \frac{du}{dy}, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2u}{dy^2}\right).$$

Donc elle admettra une intégrale générale, ou une expression de u, dans laquelle on pourra se donner arbitrairement la coupe $u_0 = \varphi(y)$ de la surface $u = F(x, y)$ par un premier plan $x = x_0$ normal aux x et, tout le long de cette coupe, la pente $p_0 = \psi(y)$ de la surface *suivant les plans verticaux perpendiculaires* $y =$ const., pente achevant d'y déterminer la direction du plan tangent ; ce qui revient, en définitive, à se donner les deux coupes de la surface $u = F(x, y)$ par deux plans infiniment voisins normaux aux x.

On réduira de même bien des systèmes d'équations d'ordre supérieur à des systèmes d'un nombre plus grand d'équations *du premier ordre par rapport à une variable principale* x ; et cette réduction montrera que leurs intégrales générales contiendront assez de fonctions arbitraires, pour permettre de se donner à volonté, en $y, z, \ldots$, les valeurs *initiales*, ou relatives à $x = x_0$, des fonctions inconnues proposées $u, v, \ldots$ et de toutes leurs dérivées *directes*, par rapport à x, d'ordre inférieur, pour chaque fonction, à la plus élevée en x qui paraisse dans les équations. Les systèmes dont il s'agit sont ceux où ne figurent pas des dérivées *obliques*, c'est-à-dire *mixtes*, de u, ou $v, \ldots$, qui, prises une ou plusieurs fois en $y, z, \ldots$, le seraient, *en outre*, par rapport à x, autant ou plus de fois que ne le sont, dans les équations, les dérivées directes en x les plus élevées des mêmes fonctions u, ou $v, \ldots$.

423*. — Des cas où soit une variable désignée, soit même aucune des variables figurant dans les équations, ne peut jouer le rôle de variable principale.

S'il n'en était pas ainsi et que, par exemple, la dérivée *directe* la plus haute de u en x, paraissant dans une équation unique donnée, n'indiquât pas un nombre de différentiations supérieur à celui qu'impliquerait, par rapport à x seul, quelque dérivée oblique y figurant également, l'interprétation de l'équation ne pourrait plus se faire de même et ne comporterait pas le choix de x comme variable principale.

Supposons, en effet, pour fixer les idées, que, *d'une manière*

absolue (ou indépendamment de la considération de toute variable principale), une telle équation proposée soit du *second* ordre, c'est-à-dire contienne uniquement avec x, y, u et les dérivées premières p, q de u (quantités qui pourraient aussi y faire défaut), les dérivées secondes r, s, t de u, ou, *du moins,* l'une d'elles. Pour être comprise dans le cas qu'il s'agit d'étudier, elle devra manquer de la dérivée directe r, laquelle se trouve prise deux fois par rapport à x, savoir, plus que ne l'est, en x, la dérivée oblique s. Alors, résolue par rapport à celle-ci, l'équation sera de la forme $s = f(x, y, u, q, t, p)$ ou

$$\frac{dp}{dy} = f\left(x, y, u, \frac{du}{dy}, \frac{d^2 u}{dy^2}, p\right). \tag{8}$$

On ne pourra plus, pour $x = x_0$, se donner arbitrairement la pente p des trajectoires $y = \text{const.}$ décrites par les divers points de la courbe $u = \varphi(y)$ génératrice de la surface ; car on voit que l'équation (8), où u, $\frac{du}{dy}$, $\frac{d^2 u}{dy^2}$ seront les fonctions connues $\varphi(y)$, $\varphi'(y)$ et $\varphi''(y)$, définira cette pente p de proche en proche, dès qu'on la connaîtra pour une valeur spéciale de y, par exemple sur un certain plan $y = y_0$ parallèle aux zx. Le même fait se produisant à partir de toute abscisse x atteinte par la courbe génératrice, il est clair que l'intégrale générale comportera, comme fonctions arbitraires, d'une part, les valeurs *initiales* $u_0 = \varphi(y)$ de l'ordonnée sur le plan primitif $x = x_0$ normal aux x, mais, d'autre part, les pentes *successives* $\frac{du}{dx}$ ou p sur le plan $y = y_0$ normal aux y ; *ce qui revient à se donner à volonté les deux coupes $u = \varphi(y)$ et $u = \psi(x)$ de la surface par ces deux plans rectangulaires.*

Et l'on voit même que, si l'équation (8) ne contient pas t, ou que, dépourvue de toute autre dérivée seconde que la dérivée oblique s, elle soit de la forme $s = f(x, y, u, p, q)$, elle n'admettra pas plus le choix de y que celui de x pour variable principale, et ne pourra s'interpréter *simplement* qu'au moyen de cette sorte de partage, entre x et y, des données *initiales* nécessaires pour construire la surface.

Il est clair, au reste, que, soit dans ce cas, soit dans les autres, les fonctions arbitraires inhérentes à l'intégrale générale pourront encore se déterminer par des conditions plus complexes, c'est-à-dire ne se rapportant pas à des valeurs constantes ou de x, ou de y, pourvu toutefois qu'elles constituent l'équivalent des précédentes, ou leur soient liées et aient la même étendue. Par exemple, au lieu d'astreindre la surface à avoir une coupe donnée, $u_0 = \varphi(y)$, par un plan

$x = x_0$ normal aux x, ou d'y admettre des plans tangents affectant des directions données, on pourrait l'astreindre à contenir une certaine courbe, ou à admettre, le long de cette courbe, certains plans tangents ; etc.

424*. — Description des surfaces définies par une équation du premier ordre, au moyen de courbes, dites caractéristiques, ne dépendant que de cette équation et de données relatives à leur point de départ.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une seule équation du premier ordre $f(x, y, u, p, q) = 0$, à deux variables indépendantes x, y, ou, sous forme géométrique, d'une surface $u = F(x, y)$, à construire au moyen de cette équation et de la coupe $u_0 = \varphi(y)$ de la surface par le plan $x = x_0$. Cette coupe est supposée la première position d'une ligne déformable qui, contenue dans un plan mobile normal aux x, trace la surface demandée. Or, pour arriver plus aisément à la notion de l'intégrale générale, nous avons fait décrire à ses divers points des trajectoires parallèles aux zx, de sorte que la coordonnée y de chacun restât invariable. Mais il est clair qu'ils ne traceraient et définiraient pas moins la surface s'ils se déplaçaient en même temps sur la ligne génératrice, dans une proportion qui donnerait à leurs trajectoires, projetées sur le plan horizontal, des coefficients angulaires $\frac{dy}{dx}$ quelconques. L'avantage de ce mode de description de la surface par des courbes obliques (et non plus parallèles) aux zx, sera justement dans l'indétermination du rapport $\frac{dy}{dx}$. Car on en disposera, s'il est possible, de manière à rendre le tracé tout entier de chaque courbe déterminable de proche en proche au moyen de données ne se rapportant qu'à son point de départ et impliquées dans la fonction arbitraire $u_0 = \varphi(y)$, sans recours, le long du trajet, à aucune autre propriété de la surface que l'équation même $f(x, y, u, p, q) = 0$. Ces lignes pouvant se construire directement, le problème sera résolu, puisque la surface cherchée résultera de leur association.

On appelle *caractéristiques,* de telles courbes, *dont l'existence ramène,* comme on voit, *l'intégration de l'équation aux dérivées partielles* $f(x, y, u, p, q) = 0$, *à la construction d'une famille de lignes d'une orientation définie de proche en proche,* c'est-à-dire *à l'intégration d'un système d'équations simplement différentielles,* ou comportant une seule variable indépendante x.

Dans le cas d'une équation unique $f(x, y, u, p, q) = 0$, il y a toujours, effectivement, une famille de caractéristiques. On l'obtient en

cheminant, à partir de chaque point (x, y, u), suivant la direction pour laquelle les deux projections dx, dy de l'élément de chemin ds parcouru sont entre elles comme les deux dérivées partielles en p et q du premier membre de l'équation proposée $f(x, y, u, p, q) = 0$, dérivées qui constituent deux fonctions connues de x, y, u, p, q, et qui ont par suite, en chaque point de la surface $u = F(x, y)$, un rapport déterminé. Si l'on observe, en effet, que, le long du trajet ainsi défini, les variations élémentaires du, dp, dq, éprouvées à chaque instant par l'ordonnée u et par ses deux dérivées partielles p, q, ne cessent pas d'avoir les expressions

$$du = p\,dx + q\,dy, \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

il viendra aisément la proportion continue

$$(9)\quad \frac{dx}{\frac{df}{dp}} = \frac{dy}{\frac{df}{dq}} = \frac{du}{p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}} = \frac{dp}{r\frac{df}{dp} + s\frac{df}{dq}} = \frac{dq}{s\frac{df}{dp} + t\frac{df}{dq}}.$$

Or l'équation $f(x, y, u, p, q) = 0$, continuellement vérifiée quand on se meut sur la surface parallèlement ou aux zx ou aux zy, peut être différentiée soit en x, soit en y, et donne ainsi

$$(10)\quad \frac{df}{dx} + \frac{df}{du}p + \frac{df}{dp}r + \frac{df}{dq}s = 0, \qquad \frac{df}{dy} + \frac{df}{du}q + \frac{df}{dp}s + \frac{df}{dq}t = 0;$$

ce qui permet d'éliminer des dénominateurs des deux derniers rapports (9) les dérivées secondes r, s, t de u, en substituant à ces dénominateurs leurs valeurs tirées de (10),

$$-\left(\frac{df}{dx} + p\frac{df}{du}\right) \quad \text{et} \quad -\left(\frac{df}{dy} + q\frac{df}{du}\right).$$

Mais, si l'on observe même que l'équation $f(x, y, u, p, q) = 0$ contiendra toujours au moins une des dérivées p, q, savoir, la dérivée p (à laquelle on aura pu donner ce nom grâce au choix de la variable correspondante pour la variable *principale* x), la résolution de cette équation par rapport à p et la substitution à p, dans les dénominateurs de (9), de sa valeur obtenue, rendront inutile, dans la proportion multiple (9), le rapport où figure dp. Ainsi, écrivons seulement l'ensemble des autres, dont les dénominateurs seront dès lors des fonctions explicites ou connues de x, y, u, q ; et nous aurons

$$(11)\qquad \frac{dx}{\frac{df}{dp}} = \frac{dy}{\frac{df}{dq}} = \frac{du}{p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq}} = \frac{dq}{-\left(\frac{df}{dy} + q\frac{df}{du}\right)}.$$

On voit que les rapports $\frac{dy}{dx}, \frac{du}{dx}, \frac{dq}{dx}$ seront bien, le long des courbes suivies, des fonctions parfaitement explicites de x, y, u, q, ou que les relations (11) constitueront trois équations différentielles simultanées, propres à donner, par leur intégration, les inconnues y, u et q en fonction de x et de leurs valeurs *initiales* (c'est-à-dire relatives à $x = x_0$), que j'appellerai y_0, u_0, q_0. Or u_0 et q_0 sont connues en fonction de y_0, car $u_0 = \varphi(y_0)$ et $q_0 = \varphi'(y_0)$. Donc, en particulier, y et u, fonctions de x, y_0, $\varphi(y_0)$ et $\varphi'(y_0)$, ne dépendront finalement que de x et de y_0, cette dernière variable y figurant à titre de *paramètre* distinctif de la *caractéristique* considérée ; et l'élimination de y_0, entre les deux équations ainsi obtenues pour y et u, fera connaître le lieu de ces caractéristiques, c'est-à-dire la surface même, dont on aura ainsi, en x, y et u, l'équation, intégrale générale de la proposée $f(x, y, u, p, q) = 0$.

C'est Lagrange qui a réduit à l'intégration des équations différentielles (11) celle de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes ; et il a opéré cette réduction après en avoir reconnu une autre analogue, plus simple, dont nous nous occuperons bientôt (p. 333*), pour l'équation du premier ordre, à un nombre quelconque de variables, *linéaire par rapport aux dérivées.*

425*. — L'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre se réduit toujours à celle d'un système d'équations différentielles.

Mais étendons d'abord les raisonnements qui précèdent au cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes x, y, z, ..., de trois par exemple. Soit alors

$$(12) \qquad f(x, y, z, u, p, q, r) = 0,$$

l'équation proposée, où r désigne, non plus, comme ci-dessus, une dérivée seconde, mais l'analogue de p, q, c'est-à-dire la dérivée partielle en z de la fonction inconnue u. D'ailleurs, x étant encore la variable indépendante principale, nous nous donnerons arbitrairement, pour $x = x_0$, les valeurs initiales u_0 de u, en fonction des autres variables y, z, sous la forme $u_0 = \varphi(y, z)$. Partant ainsi de $x = x_0$ et de valeurs quelconques y_0, z_0, de y, z, pour lesquelles u, q, r seront

$$u_0 = \varphi(y_0, z_0), \qquad q_0 = \varphi'_{y_0}(y_0, z_0), \qquad r_0 = \varphi'_{z_0}(y_0, z_0),$$

nous grouperons l'ensemble des valeurs de u, q, r en *séries linéaires*

qui soient l'équivalent analytique des *caractéristiques* tracées tout à l'heure sur la surface $u = F(x, y)$, ou dont chacune puisse se calculer *séparément* de proche en proche, sans autres données que l'équation même $f = 0$ et les valeurs initiales u_0, q_0, r_0, propres à la série ou suite considérée. Nous réglerons, pour cela, les changements élémentaires dy, dz de y, z, changements, entièrement disponibles, éprouvés pendant que x variera de dx, de manière que dx, dy, dz soient sans cesse entre eux comme les dérivées partielles en p, q, r du premier membre f de l'équation (12). Alors, vu l'identité de dérivées obliques comme $\frac{dp}{d(y,z)}$ et $\frac{d(q,r)}{dx}$, la marche qui a conduit aux relations (9), (10) et (11) donnera, pour évaluer à chaque instant les rapports $\frac{d(y, z, u, q, r)}{dx}$, la multiple proportion

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{\frac{df}{dp}} = \frac{dy}{\frac{df}{dq}} = \frac{dz}{\frac{df}{dr}} &= \frac{du}{p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq} + r\frac{df}{dr}} \\ &= \frac{dq}{-\left(\frac{df}{dy} + q\frac{df}{du}\right)} = \frac{dr}{-\left(\frac{df}{dz} + r\frac{df}{du}\right)}, \end{aligned}\right.$$

dont les dénominateurs ne contiendront que x, y, z, u, q, r après élimination de p au moyen de l'équation (12). Donc l'intégration des équations simultanées (13), simplement différentielles, déterminera les quantités y, z, u, q, r en fonction de x et de leurs valeurs initiales y_0, z_0, $\varphi(y_0, z_0)$, $\varphi'_{y_0}(y_0, z_0)$, $\varphi'_{z_0}(y_0, z_0)$. Et l'on aura, en particulier, pour y, z, u, trois expressions de cette nature qui, par un choix convenable de y_0, z_0, permettront à y et à z d'atteindre telles valeurs que l'on voudra quand x atteindra aussi une valeur quelconque désignée à l'avance : alors la valeur correspondante de u sera connue et, par conséquent, cette fonction u de x, y, z se trouvera formée, quoique d'une manière encore implicite. Il ne restera, pour l'avoir explicitement, qu'à éliminer y_0 et z_0 entre les équations trouvées, exprimant y, z et u au moyen de y_0, z_0, $\varphi(y_0, z_0)$ et φ'_{y_0}, φ'_{z_0}.

Le détail des calculs variera suivant la forme sous laquelle se présenteront les intégrales du système (13). Supposons, par exemple, que l'intégration ait introduit justement comme constantes arbitraires les valeurs initiales des fonctions y, z, u, q, r, savoir, y_0, z_0, u_0 ou $\varphi(y_0, z_0)$, q_0 ou $\varphi'_{y_0}(y_0, z_0)$, r_0 ou $\varphi'_{z_0}(y_0, z_0)$, et que, par suite, les équations intégrales, sous leur forme normale, soient

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &Y = y_0, \qquad Z = z_0, \qquad U = \varphi(y_0, z_0), \\ &Q = \varphi'_{y_0}(y_0, z_0), \qquad R = \varphi'_{z_0}(y_0, z_0); \end{aligned}\right.$$

où Y, Z, U, Q, R désignent des fonctions connues de x, y, z, u, q, r. On éliminera immédiatement y_0 et z_0 en portant leurs valeurs Y, Z dans les trois dernières équations, ce qui donnera

$$(15) \qquad U = \varphi(Y, Z), \qquad Q = \varphi'_Y(Y, Z), \qquad R = \varphi'_Z(Y, Z);$$

après quoi, il suffira de substituer, dans la première de celles-ci, les valeurs de q, r tirées des deux dernières, pour avoir, entre x, y, z et u, l'intégrale cherchée de l'équation (12). Mais cette élimination de q, r entre les trois relations (15) devra évidemment être recommencée pour chaque forme de la fonction arbitraire φ, avec laquelle changeront les deux dérivées φ' et, par suite, les expressions de q, r résultant des deux dernières équations (15).

426*. — Forme plus simple de l'intégrale, quand l'équation est linéaire par rapport aux dérivées de la fonction inconnue.

Heureusement, les fonctions Y, Z, U ne contiennent que x, y, z, u, et l'élimination de q, r devient inutile, quand l'équation proposée (12) est *linéaire par rapport aux dérivées partielles p, q, r de la fonction inconnue,* c'est-à-dire se trouve de la forme

$$(16) \qquad Kp + Lq + Mr - N = 0, \qquad \text{ou} \qquad Kp + Lq + Mr = N,$$

K, L, M, N désignant des fonctions données de x, y, z, u. Alors les dérivées de son premier membre en p, q, r sont respectivement K, L, M, et la somme $p\frac{df}{dp} + q\frac{df}{dq} + r\frac{df}{dr}$ égale N, d'après (16). Donc la proportion multiple (13), réduite à ses rapports contenant dx, dy, dz, du, devient

$$(17) \qquad \frac{dx}{K} = \frac{dy}{L} = \frac{dz}{M} = \frac{du}{N};$$

et elle équivaut à un système d'équations différentielles simultanées, en x, y, z, u, sans que q ni r y paraissent. Par suite, si l'on peut en obtenir les intégrales $Y = y_0$, $Z = z_0$, $U = u_0$, il suffira de porter, dans la relation $u_0 = \varphi(y_0, z_0)$, les valeurs U, Y, Z de u_0, y_0, z_0 en fonction de x, y, z et u, pour avoir l'intégrale générale cherchée $U = \varphi(Y, Z)$.

On voit qu'alors les dérivées partielles de la fonction arbitraire φ n'auront pas à figurer, dans le résultat, à côté de la fonction φ elle-même.

Concevons, pour plus de généralité, qu'on mette les intégrales du système (17), affectées de constantes arbitraires quelconques c_1, c_2,

c_3, sous la forme

$$(18)\quad \psi_1(x, y, z, u) = c_1, \qquad \psi_2(x, y, z, u) = c_2, \qquad \psi_3(x, y, z, u) = c_3.$$

Comme les constantes précédemment considérées y_0, z_0, u_0, valeurs initiales de y, z, u, seront certaines fonctions de c_1, c_2, c_3, la relation arbitraire $u_0 = \varphi(y_0, z_0)$, établie entre les premières constantes, en deviendra évidemment, par élimination de u_0, y_0, z_0, une autre, non moins arbitraire, entre c_1, c_2, c_3; et, en substituant, dans celle-ci, à c_1, c_2, c_3 leurs valeurs (18), on aura, pour intégrale générale,

$$(19)\qquad \psi_3 = \text{une fonction arbitraire de } \psi_1, \psi_2.$$

C'est, du reste, ce que l'on peut reconnaître directement. Les deux premières (18) sont, en effet, deux certaines relations entre x, y, z et u, ou, par suite, entre x, y et z (vu que u est censé lui-même fonction de x, y, z). Elles définissent donc le mode suivant lequel on fait changer y et z en fonction de x, ou suivant lequel on fait varier simultanément x, y et z. Or, alors, la troisième (18) signifie que ce mode de variation de x, y, z implique, avec les fonctions u dont il s'agit, la constance de $\psi_3(x, y, z, u)$. Prises ensemble et appliquées à la question considérée, les trois relations (18) expriment ainsi que ψ_3 ne peut pas varier dès que ψ_1 et ψ_2 restent invariables. En d'autres termes, l'équation aux dérivées partielles (16), dont on a tenu compte, dans (17), en égalant le dernier rapport $\dfrac{du}{\mathrm{N}}$ aux précédents, impose à la fonction u la condition unique de vérifier la relation (19); et encore ne l'y astreint-elle, bien entendu, que dans la mesure où ce système (17) ne peut pas être satisfait en dehors des relations (18).

427*. — De quelques cas où l'on sait ramener l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à celle d'équations différentielles; systèmes de Jacobi, linéaires par rapport aux dérivées.

Quand on donne plusieurs équations aux dérivées partielles, entre des variables indépendantes x, y, z, ..., des fonctions inconnues u, v, ... (en même nombre que ces équations), et leurs dérivées premières, supposées même, pour plus de simplicité, n'y entrer que séparément, savoir, seules, celles de u, dans la première équation, celles de v, dans la deuxième, etc., le système ne peut généralement plus s'intégrer par réduction à des équations différentielles, du moins tant que l'on prend dx, dy, dz, ... proportionnels aux dérivées partielles des premiers membres par rapport aux dérivées premières en x, y,

z, ... des diverses fonctions inconnues; car ces dérivées respectives des premiers membres ne sauraient généralement avoir entre elles les mêmes rapports, dans toutes les équations. Considérons, par exemple, un cas des plus simples, celui de deux équations du premier ordre, contenant uniquement, la première, x, y, u et les deux dérivées partielles p, q de u, la seconde, x, y, v et les deux dérivées partielles analogues de v. Les modes de variation de x et y qui conviendront pour les intégrer chacune à part ne seront d'accord tous les deux que si les *caractéristiques* des deux surfaces ayant respectivement u et v pour ordonnées admettent les mêmes projections sur le plan des xy; et, par conséquent, l'intégration des deux équations *à la fois,* au moyen d'un ensemble *unique* d'équations différentielles formé d'après la manière connue, ne sera possible qu'exceptionnellement.

Les systèmes les plus simples où s'opère la réduction dont il s'agit, signalés par Jacobi, ont, en se bornant, pour fixer les idées, au cas de trois variables indépendantes x, y, z et de deux fonctions inconnues u, v, la forme suivante, linéaire par rapport aux dérivées de u, v,

$$(20)\qquad X\frac{du}{dx}+Y\frac{du}{dy}+Z\frac{du}{dz}=U,\qquad X\frac{dv}{dx}+Y\frac{dv}{dy}+Z\frac{dv}{dz}=V,$$

X, Y, Z, U, V désignant des fonctions données quelconques de x, y, z, u, v. Les dérivées des premiers membres par rapport aux dérivées soit de u, soit de v, sont X, Y, Z. Il y a donc lieu de faire varier simultanément x, y, z de manière que les changements dx, dy, dz soient proportionnels à X, Y, Z. Les accroissements correspondants de u et de v le seront évidemment eux-mêmes à $\frac{du}{dx}X+\frac{du}{dy}Y+\frac{du}{dz}Z$, et à $\frac{dv}{dx}X+\ldots$, c'est-à-dire, d'après (20), à U et à V; en sorte qu'il viendra la suite de rapports égaux

$$(21)\qquad \frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=\frac{du}{U}=\frac{dv}{V}.$$

C'est un système d'équations différentielles en y, z, u et v, dont l'intégration déterminera ces quatre fonctions de x et de leurs valeurs pour $x=x_0$, ou *initiales*, y_0, z_0, u_0, v_0. Or u_0, v_0 égaleront deux fonctions arbitraires données, $\varphi(y_0, z_0)$, $\psi(y_0, z_0)$, de y et z. Si donc, en intégrant le système (21), nous introduisons, par exemple, comme constantes, ces valeurs initiales, ou que, E, F, G, H désignant des fonctions déterminées de x, y, z, u, v, nous obtenions les intégrales

générales de (21) sous la forme

(22) $$E = y_0, \quad F = z_0, \quad G = u_0, \quad H = v_0,$$

celles des deux équations proposées (21), fournies par l'élimination immédiate de y_0, z_0, u_0, v_0 entre (22) et $u_0 = \varphi(y_0, z_0)$, $v_0 = \psi(y_0, z_0)$, seront

(23) $$G = \varphi(E, F), \quad H = \psi(E, F).$$

428*. — Exemples de l'intégration d'équations du premier ordre, linéaires par rapport aux dérivées de la fonction inconnue.

Donnons maintenant quelques exemples de l'intégration d'équations du premier ordre, en commençant par celles qui sont linéaires relativement aux dérivées.

Le premier et le plus simple, d'une utilité fréquente, sera

(24) $$p - aq = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} - a\frac{du}{dy} = 0.$$

Les coefficients des deux dérivées p, q étant 1 et $-a$, on prendra dx et dy proportionnels à ces deux constantes; et, vu la valeur zéro du second membre de (24), le système (17) deviendra

(25) $$dx = \frac{dy}{-a} = \frac{du}{0}; \quad \text{ou} \quad dy + a\,dx = 0, \quad du = 0.$$

Il vient, par une intégration immédiate (en choisissant finalement $x_0 = 0$),

$$y + ax = \text{const.} = y_0, \quad u = \text{const.} = u_0;$$

d'où, à cause de $u_0 = \varphi(y_0)$,

(26) $$u = \varphi(y + ax).$$

Effectivement, cette expression $\varphi(y + ax)$ de u, donnant $p = a\varphi'$, $q = \varphi'$, satisfait à (24) et, de plus, pour $x = 0$, se réduit bien à la fonction arbitraire voulue $\varphi(y)$.

L'équation (24) se complique un peu quand son second membre devient une fonction quelconque f de x et de y, ou que l'on a

(27) $$\frac{du}{dx} - a\frac{du}{dy} = f(x, y).$$

Alors le système (25) est remplacé par celui-ci,

(28) $$dx = \frac{dy}{-a} = \frac{du}{f(x, y)}; \quad \text{ou} \quad dy + a\,dx = 0, \quad du = f(x, y)\,dx;$$

et, l'avant-dernière équation donnant encore $y + ax = y_0$, ce qui change la dernière, par l'élimination de y, en

$$du = f(x, y_0 - ax)\,dx,$$

il résulte d'une intégration immédiate, effectuée à partir de $x = 0$ et de $u = u_0 = \varphi(y_0)$,

$$(29) \qquad u - \varphi(y_0) = \int_0^x f(x, y_0 - ax)\,dx.$$

Changeons enfin, sous le signe $\int$, le nom de la variable d'intégration x, en y mettant, par exemple, ξ au lieu de x, afin de pouvoir remplacer ensuite, sans crainte de confusion, y_0 par sa valeur $y + ax$: nous aurons l'expression cherchée de u,

$$(30) \qquad u = \varphi(y + ax) + \int_0^x f(\xi, y + ax - a\xi)\,d\xi.$$

On remarquera que son dernier terme est la solution particulière de (27) pour laquelle $\varphi(y + ax) = 0$; de sorte que cette expression générale (30) de u égale la somme d'une solution particulière de l'équation (27) proposée, ou avec second membre, et de la solution générale $\varphi(y + ax)$ de la même équation prise sans second membre, ou réduite à (24). Ce fait, qu'on généraliserait aisément, provient, comme dans les équations différentielles linéaires, de ce que l'équation (27) est effectivement *linéaire,* c'est-à-dire ne contient u ni dans son second membre, ni dans les coefficients des dérivées de u qui figurent au premier.

Soit actuellement, comme troisième exemple, l'équation, que j'emprunte à la théorie des régimes graduellement variés des cours d'eau [1],

$$(31) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{\alpha' y}{\alpha}\frac{du}{dy} + \frac{\beta' z}{\beta}\frac{du}{dz} = 0,$$

où α, β sont deux fonctions quelconques données de x seul et α', β' leurs dérivées premières. Le système (17) est, ici,

$$(32) \qquad dx = \frac{\alpha\,dy}{\alpha' y} = \frac{\beta\,dz}{\beta' z} = \frac{du}{0},$$

c'est-à-dire, en égalant au premier membre chacun des suivants, et

---

(1) *Voir* mon *Essai sur la théorie des eaux courantes,* §§ XI et XL, pp. 97 et 509.

observant que $\alpha' dx$, $\beta' dx$ sont respectivement $d\alpha$, $d\beta$,

$$(33)\qquad \alpha\, dy - y\, d\alpha = 0, \qquad \beta\, dz - z\, d\beta = 0, \qquad du = 0.$$

Les deux premières, qui définissent la manière dont on fait varier simultanément x, y et z, reviennent à poser $d\frac{y}{\alpha} = 0$, $d\frac{z}{\beta} = 0$, ou à laisser constants les deux rapports $\frac{y}{\alpha}$, $\frac{z}{\beta}$; et la dernière, $du = 0$, exprime que u ne peut plus dès lors varier lui-même. Il dépend donc uniquement de ces deux rapports, et l'on a, φ désignant une fonction arbitraire,

$$(34)\qquad u = \varphi\left(\frac{y}{\alpha}, \frac{z}{\beta}\right).$$

Un quatrième exemple nous sera fourni par le théorème d'Euler, relatif aux fonctions homogènes. D'après ce théorème (t. I, p. 124*), une telle fonction u de x, y, z, et dont le degré d'homogénéité est m, vérifie toujours l'équation aux dérivées partielles

$$(35)\qquad x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} = mu.$$

Mais on peut se demander si les fonctions homogènes sont les seules qui y satisfassent. A cet effet, intégrons l'équation (35). Le système (17) sera

$$(36)\qquad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{mu},$$

c'est-à-dire, par la comparaison du premier rapport à chacun des suivants :

$$(37)\quad d\frac{y}{x} = 0, \qquad d\frac{z}{x} = 0, \qquad x^m\, du - umx^{m-1}\, dx = 0 \quad \text{ou} \quad d\frac{u}{x^m} = 0.$$

Or ces relations, à part celle où figure u, définissent la manière dont on fait varier x, y, z et expriment que toutes les variables y conservent leurs rapports mutuels. Donc la dernière, montrant que le quotient $\frac{u}{x^m}$ est alors constant, prouve que l'équation proposée (35) impose au quotient $\frac{u}{x^m}$ l'obligation de ne varier qu'avec les rapports mutuels de x, y, z. D'après la définition même des fonctions homogènes (t. I, p. 122*), cela signifie justement que u est la fonction homogène de x, y, z la plus générale du $m^{\text{ième}}$ degré, ou a l'expression

$$(38)\qquad u = x^m\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Enfin, comme dernier exemple d'une équation linéaire par rapport aux dérivées de u, traitons un cas simple, où la marche à suivre est évidente indépendamment de la théorie qui précède (p. 333*) et se trouve conforme à ses indications, de manière à en contrôler la justesse. C'est le cas où l'équation ne contient qu'une seule des dérivées p, q, r, savoir, par exemple, la dérivée p en x, et où on l'a résolue par rapport à cette dérivée. Soit donc

$$(39)\qquad p \quad \text{ou} \quad \frac{du}{dx} = f(x, y, z, u)$$

la relation proposée. Il est clair qu'en y laissant y et z fixes, ce sera une simple équation différentielle, dont nous pourrons écrire l'intégrale, sous forme normale, $F(x, y, z, u) = c$. Mais c y désigne une quantité constante en ce sens seulement, que l'équation (39) l'astreint, en général, à ne pas changer avec x, tout en la laissant libre de recevoir des valeurs différentes *quelconques* pour des groupes différents de valeurs de y et z. Donc on satisfait à (39), de la manière la plus générale possible (aux solutions singulières près), en prenant $c =$ une fonction arbitraire φ de y et z, c'est-à-dire en posant

$$(40)\qquad F(x, y, z, u) = \varphi(y, z).$$

Or c'est précisément ce que donne, appliquée à (39), la méthode générale ; car le système (17) y devient

$$(41)\quad dx = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{0} = \frac{du}{f(x, y, z, u)};\quad \text{ou}\quad dy = 0,\quad dz = 0,\quad du - f\,dx = 0;$$

et il a pour intégrales $y = c_1$, $z = c_2$, $F(x, y, z, u) = c$ ou $= c_3$: d'où résulte bien, d'après (18) et (19), l'intégrale générale (40).

429*. — Exemple d'une équation non linéaire : surfaces développables, ou enveloppes d'une série de plans ; enveloppe d'une suite de surfaces, etc.

Prenons, pour exemple d'une équation non linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, la relation simple $q = f(p)$, ou

$$(42)\qquad q - f(p) = 0,$$

dans laquelle f désignera une fonction donnée quelconque, et p, q les deux dérivées partielles en x et y de l'ordonnée u d'une surface. Les dérivées du premier membre de (42) en p, q, y, u étant respectivement $-f'(p)$, 1, 0, 0, le système (11) [p. 330*] des équations dif-

férentielles à intégrer sera, vu l'égalité de q à $f(p)$,

$$(43)\qquad \frac{dx}{-f'(p)} = dy = \frac{du}{-pf'(p)+f(p)} = \frac{dq}{0},$$

où il faudra se représenter p remplacé par sa valeur déduite de (42). Or ce système devient, par la comparaison, au premier membre, de chacun des suivants :

$$(44)\quad dy = -\frac{dx}{f'(p)},\quad du = p\,dx - \frac{f(p)}{f'(p)}\,dx = p\,dx + f(p)\,dy,\quad dq = 0.$$

La dernière montre que la dérivée q et, par suite, d'après (42), la dérivée p, restent invariables le long des caractéristiques suivies. Celles-ci ont donc pour équation $p =$ const., ou $q =$ const.; et, alors, les deux premières relations (44) sont immédiatement intégrables. La seconde, écrite $du - p\,dx - f(p)\,dy = 0$, ou même (à cause de $dp = 0$)

$$(45)\qquad d[u - px - f(p)y] = 0,$$

signifie que, dans les surfaces proposées, l'expression

$$u - px - f(p)y$$

se maintient constante en même temps que p, ou *ne peut changer qu'en fonction de* p. Appelons donc $\varphi(p)$ une fonction (indéterminée jusqu'à présent), et il viendra $u - px - f(p)y = \varphi(p)$, c'est-à-dire

$$(46)\qquad u = px + f(p)y + \varphi(p).$$

Or cette expression générale de u, différentiée en x, sans faire varier y, mais bien p en tant qu'il dépend de x, donne immédiatement

$$p = p + [x + f'(p)y + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx},$$

et, par suite, grâce à des réductions évidentes,

$$(47)\qquad 0 = x + f'(p)y + \varphi'(p),$$

relation impliquant celle-ci, $x + f'(p)y =$ une fonction de p, moyennant laquelle la première équation (44), savoir $dx + f'(p)\,dy = 0$, ou $d[x + f'(p)y] = 0$, qui restait à intégrer le long des caractéristiques $p =$ const., se trouve identiquement satisfaite.

L'intégrale générale, en x, y et u, de (42) s'obtiendra donc par l'élimination de p entre les deux équations (46) et (47), dont la seconde, résolue par rapport à p, fournira la valeur de p, en x et y, à substituer dans la première. La fonction $\varphi(p)$ devra évidemment être

arbitraire, pour qu'on puisse se donner à volonté, pour $x = x_0$, l'expression de u en y. D'ailleurs, l'élimination de p ne sera possible, conformément à une indication de la fin du n° 425* (p. 333*), qu'en spécifiant cette fonction arbitraire φ.

Il est facile de voir la signification géométrique des formules (46) et (47), qui, en y attribuant à p la valeur constante propre à chaque caractéristique, sont les deux équations finies de celle-ci en x, y, u. Et, d'abord, les coordonnées x, y, u n'y figurent qu'au premier degré : ainsi, les caractéristiques se réduisent à des lignes droites et la surface est *réglée*. De plus, comme le second membre de (47) a été obtenu en prenant la dérivée, par rapport à p, de celui de (46), il suffit de multiplier (47) par une constante infiniment petite dp, puis de l'ajouter à (46), pour avoir, au lieu de (47), une relation ne différant de (46) qu'en ce que le *paramètre* p y sera devenu $p + dp$. La caractéristique se trouvera donc exprimée par les équations, équivalentes à (46) et (47),

$$(48) \qquad \begin{cases} u = px + f(p)y + \varphi(p), \\ u = (p + dp)x + f(p + dp)y + \varphi(p + dp), \end{cases}$$

qui représentent deux surfaces consécutives de la famille de plans, ayant c pour paramètre,

$$(49) \qquad u = cx + f(c)y + \varphi(c),$$

savoir, les deux plans pour lesquels $c = p$ et $c = p + dp$. Ainsi les caractéristiques, génératrices rectilignes de la surface considérée, sont les intersections successives de la série continue de plans définie par (49), dont la surface lieu de ces intersections est dès lors l'enveloppe. Par conséquent, *l'équation proposée* (42) *définit les surfaces développables enveloppant les familles de plans qu'exprime la formule* (49).

Réciproquement, l'enveloppe de toute famille de plans qui forme une suite continue *simple*, ou dont l'équation ne contient *qu'un seul paramètre*, satisfait à une équation aux dérivées partielles de la forme $q = f(p)$.

Soit, en effet, $u = cx + c_1 y + c_2$ la relation définissant un plan quelconque de cette famille : les coefficients c, c_1, c_2 ne pourront qu'y être trois fonctions du paramètre donné, en sorte que, si l'on adopte le premier, c, pour nouveau paramètre, c_1 et c_2 deviendront deux certaines fonctions f et φ de c. La famille de plans ayant ainsi une équation comme (49), l'intersection de deux consécutifs sera évidemment exprimée par deux relations de la forme (48), avec c et

$c + dc$ au lieu de p et $p + dp$, ou par deux autres équivalentes, comme (46) et (47), savoir

$$(50) \qquad u = cx + f(c)y + \varphi(c), \qquad 0 = x + f'(c)y + \varphi'(c);$$

de sorte que l'équation de l'enveloppe s'obtiendra en remplaçant, dans la première (50), c'est-à-dire dans l'expression donnée (49) de l'ordonnée u de la famille, le paramètre c par sa valeur en x et y, tirée de la seconde équation (50), ou formée en égalant à zéro la dérivée, par rapport à c, de cette expression de u.

Ainsi, et remarquons-le en passant, quand on a une *série continue* de surfaces, c'est-à-dire une famille ayant son équation de la forme $u = \psi(x, y, c)$, son enveloppe, lieu des lignes d'intersection successives de ces surfaces, est représentée, pareillement à ce qui arrivait pour l'enveloppe d'une famille de courbes planes (t. I, p. 179*), par l'équation même de la famille; mais où le paramètre c, au lieu d'être constant, reçoit la valeur variable annulant la dérivée $\psi'_c(x, y, c)$, qui lui est relative, de l'ordonnée u. Par suite, les changements infiniment petits de u sur l'enveloppe, savoir

$$\psi'_x\, dx + \psi'_y\, dy + \psi'_c\left(\frac{dc}{dx}\, dx + \frac{dc}{dy}\, dy\right),$$

se réduisent à $\psi'_x\, dx + \psi'_y\, dy$, ou sont les mêmes, sauf erreurs négligeables du second ordre, que si l'on cheminait, à partir du point (x, y, u) de départ, sur l'*enveloppée* tangente en ce point à l'enveloppe ; ce qui exprime évidemment le contact, en (x, y, u), des deux surfaces. Par exemple, des cheminements parallèles aux plans des zx et des zy donneront indifféremment, dans les deux surfaces, $p = \psi'_x$, $q = \psi'_y$, ou y prouveront l'égalité de chaque dérivée première de l'ordonnée. Donc, et remarquons-le encore, *il en est du plan tangent, dans les enveloppes d'une série simple de surfaces, comme de la tangente dans les courbes enveloppes : ce plan est commun à l'enveloppe et à l'enveloppée en tous les points où celle-ci rencontre l'enveloppée suivante.*

Or il résulte de là, pour en revenir à notre famille de plans, que les deux dérivées partielles p, q de u seront, en chaque point de l'enveloppe exprimée par les deux équations (50), les mêmes que dans le plan enveloppé (49), où c a sa valeur relative à ce point. Il viendra donc, en différentiant (49) soit en x, soit en y, sans faire varier c, $p = c$, $q = f(c)$ et, par suite, $q = f(p)$; ce qui est bien l'équation proposée (42), si l'on a soin d'y prendre la fonction f identique à ce

qu'elle est dans la formule donnée, $u = cx + f(c)y + \varphi(c)$, exprimant la famille.

430*. — Intégrales complètes et solution singulière d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Imaginons que l'on mette une constante quelconque C, à la place de $\varphi(c)$, dans (49). La valeur de u ainsi formée, à deux constantes arbitraires distinctes c et C,

$$u = cx + f(c)y + C, \tag{51}$$

vérifiera évidemment l'équation proposée (42) sans que c et C aient besoin d'y varier, puisqu'elle donnera $p = c$ et $q = f(c)$, d'où $q = f(p)$. D'ailleurs, cette solution particulière (51) de (42) aurait pu, sans calcul, être prévue; car il suffisait, pour l'obtenir, de chercher des plans $u = cx + c_1 y + C$, dans lesquels on aurait $q = f(p)$ ou $c_1 = f(c)$.

On conçoit donc qu'il soit, souvent, plus facile de trouver à une équation donnée aux dérivées partielles du premier ordre une solution particulière, pourvue même de plusieurs constantes arbitraires, que d'en former l'intégrale générale. Or Lagrange a appelé *intégrale complète* une telle solution particulière, quand elle contient, comme (51), des constantes arbitraires (distinctes) *en même nombre n que les variables indépendantes x, y, ...*; et il a pu en déduire, comme il suit, l'intégrale générale.

Prenons l'une des n constantes égale à une fonction arbitraire φ des $n-1$ autres [C, par exemple, égal à $\varphi(c)$]; puis faisons varier ces $n-1$ autres constantes de manière à annuler la dérivée complète, par rapport à chacune d'elles en particulier, de l'expression obtenue de u, en procédant ainsi comme quand, dans notre exemple, nous avons posé la seconde équation (50), par annulation de la dérivée, relative à c, de la valeur (49) de u. Alors toutes les dérivées p, q, ... de u en x, y, ... seront évidemment les mêmes, dans l'expression de u modifiée de la sorte, où varient sans cesse les constantes arbitraires, que dans l'intégrale complète, spécifiée pour les valeurs actuelles considérées de x, y, ... et aussi des constantes (qui n'y changent pas). Donc cette expression de u modifiée vérifiera, tout comme l'intégrale complète, l'équation aux dérivées partielles proposée, entre x, y, ..., u, p, q, ...; et, *contenant une fonction arbitraire φ de $n-1$ variables*, elle sera l'*intégrale générale* cherchée, ainsi qu'on l'a vu par l'exemple précédent des surfaces développables.

L'idée de la *variation des constantes* n'a donc pas seulement conduit Lagrange à étendre, aux équations différentielles linéaires avec seconds membres, les solutions générales des équations analogues sans seconds membres, mais elle lui a aussi permis de déduire, *d'une intégrale complète, l'intégrale générale* d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Et l'on voit que *l'intégrale générale est, en quelque sorte, l'enveloppe de toutes les solutions particulières que fournit une intégrale complète quand on y suppose l'une des constantes arbitraires égale à une fonction arbitraire des autres.*

Actuellement, *si*, x, y, ... étant quelconques, *on peut* donner, dans l'expression de u, à *toutes* les constantes arbitraires de l'intégrale complète, des valeurs qui annulent la dérivée partielle de u par rapport à chacune d'elles, il est clair que les dérivées de u en x, y, ... seront encore les mêmes, avec cette nouvelle manière de faire varier les constantes en fonction de x, y, ..., que dans la solution particulière où elles ont actuellement pareilles valeurs, mais ne changent pas. Donc l'expression de u ainsi composée sera une nouvelle intégrale ou solution, sans fonction arbitraire ni constante arbitraire, de l'équation aux dérivées partielles proposée. Elle se trouvera formée évidemment par les valeurs de u qui, dans les solutions particulières déduites de l'intégrale complète, sont communes à l'une d'elles prise au hasard, et à *toutes* ses voisines obtenues en faisant varier infiniment peu les constantes dans des rapports quelconques; elle constituera comme le lieu de jonction, l'*enveloppe* de toutes les intégrales particulières successives, et, par suite, de toutes les séries possibles de leurs intersections deux à deux, séries qui, créées en rendant l'une des constantes fonction des autres, composent l'intégrale générale. Cette *enveloppe d'enveloppes* étant, en général, d'une tout autre forme analytique que les enveloppes précédentes, expressions de l'intégrale générale, ne sera pas d'ordinaire comprise dans celles-ci et formera, par conséquent, une *solution singulière* de l'équation aux dérivées partielles proposée.

Dans le cas particulier de deux variables indépendantes, x et y, où l'intégrale complète exprime une famille de surfaces $u = F(x, y, c, C)$ à deux paramètres indépendants, on voit que cette solution singulière, résultat de l'élimination de c et C entre les trois équations

$$(52) \qquad u = F, \qquad 0 = \frac{dF}{dc}, \qquad 0 = \frac{dF}{dC},$$

représentera une surface tangente, à la fois, à toutes les surfaces de la famille et à toutes leurs enveloppes exprimées par les deux équa-

tions

$$(53)\qquad u = F, \qquad 0 = \frac{dF}{dc} + \frac{dF}{dC}\frac{dC}{dc},$$

ou obtenues en prenant C égal à une fonction arbitraire $\varphi(c)$ de l'autre constante c (t. I, p. 228*) : elle sera bien leur enveloppe générale.

C'est ainsi qu'une surface courbe quelconque $u = f(x, y)$ constitue (t. I, p. 225*) l'enveloppe de ses plans tangents, dont l'équation

$$(54)\qquad u = f(c, C) + f'_c(c, C)(x - c) + f'_C(c, C)(y - C)$$

a la forme $u = F(x, y, c, C)$, et aussi l'enveloppe de toutes les surfaces développables auxquelles donne lieu une série quelconque de ces plans lorsqu'on y établit une relation entre C et c, de manière à ne leur laisser qu'un paramètre distinct c. Donc, ces surfaces-enveloppes et la proposée $u = f(x, y)$ vérifieront l'équation aux dérivées partielles en x, y, u, p, q que donne l'élimination de c, C entre l'équation (54) de la famille de plans et ses deux dérivées partielles $p = f'_c(c, C)$, $q = f'_C(c, C)$.

QUARANTE-TROISIÈME LEÇON.

SUITE DE L'INTÉGRATION, EN TERMES FINIS, DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES : ÉQUATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

431*. — Équations aux dérivées partielles du second ordre ; méthode de Monge pour l'intégration de certaines d'entre elles.

Au delà du premier ordre, il est rare que l'on sache intégrer, du moins sous forme finie, une équation aux dérivées partielles, même quand il y a seulement deux variables indépendantes, x, y, une seule fonction inconnue, u, et que l'équation est du second ordre, ou contient uniquement, avec x, y, u et les dérivées partielles premières p, q de u, ses trois dérivées secondes r, s, t.

Le procédé le plus simple, et paraissant le plus fécond, que l'on possède pour ramener, dans certains cas, une telle intégration à celle d'équations différentielles ordinaires ou, du moins, de différentielles totales, est dû à Monge. Il consiste à remplacer, dans la relation proposée, les deux dérivées partielles secondes directes r, t par leurs valeurs déduites des deux formules évidentes

$$(55) \qquad dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

c'est-à-dire à y mettre respectivement, pour r et t, les valeurs $\frac{dp - s\,dy}{dx}$, $\frac{dq - s\,dx}{dy}$, où dp, dq sont des différentielles totales, puis à choisir le rapport arbitraire $\frac{dy}{dx}$ suivant lequel on fait, à partir de valeurs quelconques, varier à la fois x et y, de manière à éliminer de l'équation la troisième dérivée du second ordre, s, la seule qui y figure encore. Cette élimination de s est ordinairement possible quand, une fois r et t disparus, l'équation contient un seul terme en s, dont il suffit d'égaler à zéro le coefficient.

On a ainsi trois relations entre x, y, u, p, q et leurs différentielles, savoir : 1° celle qui résultera de l'annulation du terme en s; 2° l'équation elle-même après l'évanouissement de ce terme; 3° enfin, la formule

évidente $du = p\,dx + q\,dy$ qui définit p et q. Or, si x, par exemple, est resté la variable indépendante, les inconnues paraissant dans ces trois équations seront les quatre fonctions y, u, p, q ; de sorte qu'il manquera une équation différentielle pour qu'on puisse déterminer, de proche en proche, leurs accroissements successifs correspondant à ceux de x.

Mais il peut arriver, malgré l'état incomplet du système (et c'est ce qui a justement lieu dans un certain nombre des exemples les plus importants), que les trois équations différentielles posées entraînent l'existence de deux intégrales *distinctes*, de la forme

$$(56)\qquad \begin{cases} \psi_1(x, y, u, p, q) = \text{une const. arbitraire } c_1, \\ \psi_2(x, y, u, p, q) = \text{une autre const. arbitraire } c_2. \end{cases}$$

Alors on obtient une sorte d'intégrale générale *première* de l'équation proposée, c'est-à-dire une relation entre x, y, u, p et q, en écrivant que l'expression ψ_2 égale une fonction arbitraire Φ de l'expression ψ_1.

En effet, u et, par suite, p, q étant des fonctions de x et de y, la première équation (56) relie généralement y à x et définit le mode choisi de variation de y, c'est-à-dire les *caractéristiques* suivies, sur la surface dont x, y, u seraient les coordonnées. Par suite, l'invariabilité, d'après la seconde (56), de la fonction ψ_2 résulte, en vertu de l'équation aux dérivées partielles proposée, de cette manière même de faire varier y. Or cela revient bien à dire que l'équation proposée astreint la fonction u à rendre l'expression $\psi_2(x, y, u, p, q)$ variable seulement le long de lignes où varie l'expression $\psi_1(x, y, u, p, q)$ elle-même, c'est-à-dire à rendre $\psi_2(x, y, u, p, q)$ égal à une fonction Φ de la quantité unique $\psi_1(x, y, u, p, q)$. D'ailleurs, la fonction Φ dont il s'agit sera arbitraire : car l'équation proposée, étant du second ordre, laisse disponibles (p. 327*), sur un plan parallèle aux z tel que le plan $x = x_0$, *deux données distinctes* en chaque point, savoir, par exemple, généralement, les *pentes* $q = \varphi'(y)$ et $p = \varphi_1(y)$, où φ', φ_1 sont deux fonctions arbitraires; de manière qu'on puisse, sur toute la ligne d'intersection de la surface par le plan considéré, choisir *indépendamment l'une de l'autre* les deux fonctions ψ_1, ψ_2, et faire dès lors correspondre aux diverses valeurs de ψ_1 telles valeurs que l'on veut de ψ_2.

On a donné le nom d'*intégrale intermédiaire* à l'équation intégrale première ainsi obtenue

$$(57)\qquad \psi_2(x, y, u, p, q) = \Phi[\psi_1(x, y, u, p, q)].$$

Comme elle est elle-même une équation aux dérivées partielles du *premier ordre*, on essayera de l'intégrer par les procédés exposés dans la

Leçon précédente (pp. 330* et 333*), en s'aidant parfois du rapprochement ou de l'emploi simultané de plusieurs intégrales intermédiaires, quand il existera plusieurs systèmes de caractéristiques, ou que l'équation en $\frac{dy}{dx}$ obtenue admettra plus d'une racine propre à donner deux intégrales dans le genre de (56).

Ce procédé d'intégration, *par formation d'intégrales intermédiaires,* présente, on le voit, quelque analogie lointaine avec celui des facteurs intégrants qui permet de déduire, de même, d'une équation différentielle, ses *intégrales premières*. Malheureusement, il ne peut réussir que dans des cas assez rares, à cause, par exemple, de la forme spéciale que doit avoir une équation du second ordre pour admettre une intégrale intermédiaire.

En effet, cherchons, en éliminant la fonction arbitraire Φ, de (57), par différentiation, à quelle sorte d'équations du second ordre correspond toute relation analogue à (57). Il suffira, pour cela, de différentier les membres de (57) soit en x, soit en y, puis de diviser l'une par l'autre les deux formules obtenues, afin d'éliminer des seconds membres la fonction $\Phi'[\psi_1(x, y, u, p, q)]$, la seule dont la forme n'y soit pas censée spécifiée, et qui y paraîtra comme facteur commun. Nous aurons

$$\frac{\left(\frac{d\psi_2}{dx}+\frac{d\psi_2}{du}p\right)+\frac{d\psi_2}{dp}r+\frac{d\psi_2}{dq}s}{\left(\frac{d\psi_2}{dy}+\frac{d\psi_2}{du}q\right)+\frac{d\psi_2}{dp}s+\frac{d\psi_2}{dq}t}=\frac{\left(\frac{d\psi_1}{dx}+\frac{d\psi_1}{du}p\right)+\frac{d\psi_1}{dp}r+\frac{d\psi_1}{dq}s}{\left(\frac{d\psi_1}{dy}+\frac{d\psi_1}{du}q\right)+\frac{d\psi_1}{dp}s+\frac{d\psi_1}{dq}t},$$

proportion où j'ai mis entre parenthèses, pour les grouper ensemble, les parties qui contiennent uniquement, comme les dérivées partielles de ψ_2 et ψ_1, les variables x, y, u, p et q. Or, en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens, puis transposant tous les termes dans un membre, et, enfin, réduisant, de manière à mettre en évidence les dérivées secondes r, s, t, il vient une relation de la forme

$$(58) \qquad A+Br+Cs+Dt+E(rt-s^2)=0,$$

où les coefficients A, B, C, D, E désignent des fonctions connues de x, y, u, p, q. Ainsi le procédé de Monge n'aboutira que pour certaines équations comprises dans le type (58).

Il est bon de jeter un coup d'œil sur le cas particulier où l'on aurait $B=0$, $D=0$, $E=0$, c'est-à-dire où l'équation, ne contenant ni r, ni t, échapperait à la transformation indiquée et ne pourrait être débarrassée du terme en s par la simple annulation du coefficient C,

indépendant du rapport $\frac{dy}{dx}$. Alors une légère modification de forme serait nécessaire pour rendre la méthode encore applicable *dans son esprit*, qui consiste à éliminer de l'équation, par les formules (55), deux des trois dérivées secondes r, s, t, de manière à y laisser subsister *la troisième*, si c'est possible, *dans un terme unique, ayant son coefficient fonction du rapport* $\frac{dy}{dx}$ *et susceptible d'être annulé grâce à un choix convenable de ce rapport*. On éliminera donc s de l'équation $A + Cs = 0$, au moyen de l'une des deux formules (55); après quoi l'on annulera, dans le résultat, le coefficient de la dérivée seconde r ou t ainsi introduite, de même qu'on annulait le terme en s quand l'équation proposée contenait les dérivées secondes directes r et t.

432*. — Premier exemple : intégration de l'équation du second ordre qui caractérise les surfaces développables.

Des considérations géométriques nous ont permis d'établir, vers la fin du *Calcul différentiel* (t. I, p. 300*), que les surfaces développables étaient caractérisées par l'équation aux dérivées partielles du second ordre $rt - s^2 = 0$, où ne paraît aucune fonction arbitraire, alors que la relation du premier ordre $q = f(p)$, étudiée ci-dessus (p. 341*), ne les caractérise de même que grâce à un choix convenable, pour chacune d'elles, de la fonction arbitraire f. La démonstration analytique de cette propriété de l'équation $rt - s^2 = 0$ nous servira de premier exemple d'intégration par la méthode de Monge.

Et d'abord, il est facile de reconnaître que toute surface où existe entre q et p une relation comme $q = f(p)$, c'est-à-dire toute surface développable, satisfait à l'équation $rt - s^2 = 0$. Car l'élimination, dans $q = f(p)$, de la fonction arbitraire f, par le procédé suivi tout à l'heure pour déduire (58) de la formule générale (57) qui comprend $q = f(p)$, donne $s = f'(p)r$, $t = f'(p)s$; d'où

$$rt - s^2 = 0. \tag{59}$$

Il nous reste, en intégrant cette dernière équation, à démontrer qu'elle convient exclusivement aux surfaces développables, ou qu'elle entraîne une relation de la forme $q = f(p)$. En effet, remplaçons-y r, t par leurs valeurs tirées de (55), où seulement, afin d'éviter toute confusion, nous mettrons $d_c p$ et $d_c q$, au lieu de dp, dq qui y sont bien des différentielles *complètes*. Il viendra

$$\frac{d_c p}{dy}\frac{d_c q}{dx} - s\left(\frac{d_c p}{dy} + \frac{d_c q}{dx}\right) = 0. \tag{60}$$

Pour annuler le terme en s, il suffira de cheminer, sur la surface, le long des lignes où l'on aura $\frac{d_c p}{dy} + \frac{d_c q}{dx} = 0$, relation établissant bien un certain rapport entre dy et dx [vu que p et q sont des fonctions de x et y]; et, alors, l'équation (60) donnera $\frac{d_c p}{dy}\frac{d_c q}{dx} = 0$. Ainsi, les deux quotients $\frac{d_c p}{dy}$, $\frac{d_c q}{dx}$ auront à la fois pour somme et pour produit zéro, ce qui exige évidemment qu'ils soient nuls tous les deux. Or, si nous prenons une variable indépendante changeant effectivement le long des lignes suivies, comme le fait toujours *une* au moins des deux coordonnées x, y, et que x, par exemple, désigne cette variable, le rapport $\frac{d_c p}{dy}$, écrit $\frac{d_c p}{dx}\frac{dx}{dy}$, aura son second facteur différent de zéro et, par suite, son premier facteur nécessairement nul.

Ainsi, l'on devra poser, le long des caractéristiques,

$$(61) \qquad \frac{d_c p}{dx} = 0, \qquad \frac{d_c q}{dx} = 0;$$

de sorte que p et q, à la fois, y resteront invariables. Et, comme il est clair qu'une des deux conditions $p =$ const., $q =$ const. suffit pour définir, sur toute surface courbe, une famille de lignes, la surface en question sera bien telle, que q, par exemple, n'y varie qu'avec p, ou égale une certaine fonction $f(p)$. En d'autres termes, l'équation (59) a pour *intégrale intermédiaire* $q = f(p)$. Nous avons vu d'ailleurs, dans la Leçon précédente (p. 340*), comment l'emploi des mêmes caractéristiques $p =$ const. permet d'intégrer, à son tour, cette équation du premier ordre.

433*. — Deuxième exemple : équations aux dérivées partielles du second ordre immédiatement réductibles à des équations différentielles.

Comme deuxième exemple, considérons certaines équations du second ordre dont la réduction à des équations différentielles ordinaires soit évidente, afin de constater que le procédé de Monge s'y trouve d'accord avec la méthode naturelle ou directe et en est, par suite, confirmé.

Les plus simples de ces équations sont celles où ne figurent que les dérivées, p, r, prises exclusivement par rapport à l'une des deux variables, x par exemple. En y isolant r, nous pourrons les écrire

$$(62) \qquad r = f(x, y, u, p),$$

ou encore, si nous y regardons provisoirement y comme invariable,

en faisant changer seulement x,

$$u'' = f(x, y, u, u'). \tag{63}$$

C'est évidemment une équation simplement différentielle du second ordre : je supposerai qu'on en ait obtenu une intégrale première, $F(x, y, u, u') = c$. Il est clair que la quantité c, s'y trouvant, pour *chaque* valeur de y, une constante *arbitraire*, sera en réalité une *fonction arbitraire* de la forme $\Phi(y)$; en sorte que l'*intégrale première* $F = c$ de l'équation *différentielle* deviendra, pour l'*équation aux dérivées partielles* (62), l'*intégrale intermédiaire*

$$F(x, y, u, p) = \Phi(y). \tag{64}$$

C'est une équation du premier ordre réductible au type (39) [p. 339*] et, par conséquent, intégrable elle-même à la manière d'une équation différentielle.

Or la méthode de Monge aurait bien conduit à l'intégrale intermédiaire (64); car, en remplaçant, dans (62), r par $\frac{dp - s\,dy}{dx}$, il vient, vu l'annulation séparée du terme en s introduit,

$$dy = 0, \qquad dp = f(x, y, u, p)\,dx,$$

et, d'ailleurs,

$$du = p\,dx + q\,dy = p\,dx,$$

équations qui entraînent évidemment les deux intégrales

$$y = \text{une const. } c_1, \qquad F(x, y, u, p) = c \quad \text{ou} \quad = c_2;$$

d'où, à cause de $c_2 = \Phi(c_1)$ [p. 347*], l'intégrale intermédiaire (64).

Un autre type du second ordre, immédiatement réductible à des équations différentielles, est celui des relations ne contenant que x, y, une dérivée première de u, q par exemple, et la dérivée seconde oblique s. Résolues par rapport à celle-ci, elles ont la forme

$$s = f(x, y, q) \qquad \text{ou} \qquad \frac{dq}{dx} = f(x, y, q). \tag{65}$$

Ce sont donc, tant qu'on n'y fait pas varier y, des équations différentielles du premier ordre en x et q.

Soit $F(x, y, q) = c$ leur intégrale générale, et l'on aura évidemment, pour *intégrale intermédiaire* de (65),

$$F(x, y, q) = \Phi(y), \tag{66}$$

équation du premier ordre rentrant encore, sauf un échange de rôles

entre x et y, dans le type (39) [p. 339*], immédiatement réductible à une équation différentielle ordinaire.

Or la méthode de Monge, légèrement modifiée dans sa forme comme il a été indiqué à la fin du n° 431* (p. 349*), donnera, en remplaçant, dans (65), s par sa valeur tirée de la seconde formule (55), $dq = s\,dx + t\,dy$, et puis annulant le terme en t introduit :

$$dy = 0, \qquad \frac{dq}{dx} = f(x, y, q);$$

d'où $y = c_1$, $F(x, y, q) = c = c_2$ et, par suite, $F(x, y, q) = \Phi(y)$, comme il le fallait.

La même méthode conduit encore, suivant qu'on élimine s par la deuxième ou par la première formule (55), à poser $dy = 0$ et $s = \frac{d_c q}{dx}$, ou $dx = 0$ et $s = \frac{d_c p}{dy}$, dans l'intégration de l'équation *linéaire*, ayant mêmes termes du second ordre que la précédente (65),

$$(67) \qquad s + Mp + Nq + Pu = Q,$$

qui manque des termes en r, t, et où les coefficients M, N, P désignent, comme le second membre Q, des fonctions quelconques de x et de y. Mais alors, dans le premier cas (c'est-à-dire quand on prend $dy = 0$), l'équation (67) devient identiquement, par son association avec $dy = 0$, et, par suite, avec $du = p\,dx$ ou $p = \frac{d_c u}{dx}$,

$$(68) \qquad \frac{d_c}{dx}(q + Mu) + N(q + Mu) + \left(P - \frac{dM}{dx} - NM\right) u = Q;$$

et elle ne peut, comme $dy = 0$, *s'intégrer à part* que si le terme en u s'y annule, c'est-à-dire si l'on a identiquement $P = \frac{dM}{dx} + NM$.

Quand ce *premier cas d'intégrabilité* de l'équation (67) se présente, il suffit de poser $q + Mu = v$ dans (68) pour que celle-ci devienne, en x et v, l'équation linéaire $v' + Nv = Q$, dont l'intégrale générale, mise (p. 187) sous la forme $vF(x, y) + F_1(x, y) = c$ ou $= c_2$, donnera comme intégrale intermédiaire de (67),

$$(q + Mu)F(x, y) + F_1(x, y) = \Phi(y)$$

ou

$$\frac{du}{dy} + Mu = \frac{\Phi(y) - F_1(x, y)}{F(x, y)},$$

équation aux dérivées partielles encore linéaire et immédiatement

réductible à une simple équation différentielle linéaire en y et u.

En prenant, au contraire, $dx = 0$, et par suite, dans (67), $s = \frac{d_c p}{dy}$, $q = \frac{d_c u}{dy}$, on aurait un *second cas* analogue d'*intégrabilité*, si P avait la valeur $\frac{dN}{dy} + MN$, qui annule, dans la transformée, le terme en u.

Une équation particulièrement utile, empruntée aux types (65) et (67), est

$$s = f(x, y), \tag{69}$$

où f désigne une fonction donnée. Alors, faisant d'abord $dy = 0$, $s = \frac{d_c q}{dx}$, puis multipliant (69) par dx, intégrant et appelant $\Phi'(y)$ la fonction arbitraire de y introduite, il vient $q = \Phi'(y) + \int f(x, y)\,dx$. Reste à intégrer celle-ci. Dans ce but, prenons $dx = 0$ $\left(\text{d'où } q = \frac{d_c u}{dy}\right)$, et intégrons après avoir multiplié par dy. Si $\varphi(x)$ désigne la fonction arbitraire de x qui s'introduit, nous aurons enfin, comme expression la plus générale possible de la fonction u définie par (69),

$$u = \varphi(x) + \Phi(y) + \int dy \int f(x, y)\,dx. \tag{70}$$

134*. — Aperçu des transformations d'Euler, de Laplace et de Legendre.

Il peut être bon de connaître une transformation par laquelle Euler a réduit à la forme $s + f(x, y, u, p, q) = 0$, parfois intégrable comme on vient de voir, la plus générale des équations du second ordre linéaires par rapport aux dérivées secondes de u, avec coefficients (pour ces dérivées) fonctions quelconques des deux variables indépendantes, que j'appellerai ici X et Y. Divisées par le coefficient du premier terme, ces équations peuvent s'écrire, F y désignant une fonction donnée quelconque de X, Y, u et des dérivées premières de u,

$$\frac{d^2 u}{dX^2} - (\alpha + \beta)\frac{d^2 u}{dX\,dY} + \alpha\beta\frac{d^2 u}{dY^2} = F\left(X, Y, u, \frac{du}{dX}, \frac{du}{dY}\right), \tag{71}$$

si l'on suppose les coefficients des second et troisième termes mis sous les formes respectives de la somme, changée de signe, et du produit de deux fonctions connues α, β de X et de Y, fonctions dont j'admettrai la réalité ; ce qui impliquera que l'on se restreigne aux cas où elle est effective. La transformation d'Euler consiste : 1° à échanger X et Y, tout en gardant la même fonction u, contre de nouvelles variables x

et y, liées à X et à Y par deux relations d'abord indéterminées, mais qui donnent toujours les formules symboliques

$$(72)\qquad \frac{d}{dX} = \frac{dx}{dX}\frac{d}{dx} + \frac{dy}{dX}\frac{d}{dy}, \qquad \frac{d}{dY} = \frac{dx}{dY}\frac{d}{dx} + \frac{dy}{dY}\frac{d}{dy};$$

2° puis, constatant que l'équation (71) gardera la même forme générale, où seulement figureront désormais les dérivées premières et secondes p, q, r, s, t de u en x et y, à choisir ces nouvelles variables x et y de manière que les coefficients totaux de r et t soient identiquement nuls. Alors l'équation, divisée par le coefficient de s, se trouvera bien réduite à la forme voulue.

Pour arriver, presque sans calcul, aux formules reliant ainsi x et y à X et à Y, observons que, dans l'hypothèse de α et β constants, le premier membre de (71) s'écrirait identiquement

$$(73)\qquad \left(\frac{d}{dX} - \alpha\frac{d}{dY}\right)\left(\frac{d}{dX} - \beta\frac{d}{dY}\right)u.$$

Or, même avec α et β variables, le développement de cette expression symbolique (73) ne comprend, en sus du premier membre de (71), que les deux termes $\left(-\frac{d\beta}{dX} + \alpha\frac{d\beta}{dY}\right)\frac{du}{dY}$, dont l'addition aux deux membres de (71) n'altère pas la forme générale du second.

On peut donc admettre que le premier membre de (71) ait été échangé contre (73) et, alors, pour qu'il ne contienne pas, après sa transformation, d'autre dérivée seconde que la dérivée oblique s, il suffira évidemment de choisir x et y de manière à réduire les deux différences symboliques $\frac{d}{dX} - \alpha\frac{d}{dY}$, $\frac{d}{dX} - \beta\frac{d}{dY}$, calculées par (72), l'une, la première par exemple, au terme en $\frac{d}{dy}$, et, l'autre, au terme en $\frac{d}{dx}$. De là résultent immédiatement les deux conditions, nécessaires et suffisantes,

$$(74)\qquad \frac{dx}{dX} = \alpha\frac{dx}{dY}, \qquad \frac{dy}{dX} = \beta\frac{dy}{dY},$$

qui signifient que les expressions cherchées de x et y sont respectivement les premiers membres des intégrales générales, mises sous la forme normale $\varphi =$ const., des deux équations différentielles

$$(75)\qquad dY + \alpha\, dX = 0, \qquad dY + \beta\, dX = 0.$$

En effet, si l'on appelle x, pour la première, et y, pour la seconde,

les fonctions correspondantes φ de X et de Y, les équations (75) admettront les facteurs intégrants respectifs $\frac{dx}{dY}$, $\frac{dy}{dY}$; et les produits $\alpha\frac{dx}{dY}$, $\beta\frac{dy}{dY}$, qui multiplieront dX, dans (75), après emploi de ces facteurs, y exprimeront les dérivées $\frac{dx}{dX}$, $\frac{dy}{dX}$; de sorte que les relations (74) se trouveront bien satisfaites.

Il suffira donc de savoir intégrer les deux équations différentielles (75), pour avoir de nouvelles variables x, y propres à mettre l'expression (73) sous la forme $K\frac{d}{dy}\left(L\frac{du}{dx}\right) = KLs + K\frac{dL}{dy}p$, où K, L seront deux certaines fonctions de X, Y et, par suite, de x, y. Comme, d'ailleurs, vu les formules (72), les deux dérivées premières $\frac{du}{d(X, Y)}$ deviendront des fonctions linéaires de p, q, l'équation transformée de (71), divisée par KL, prendra bien, en transposant les termes du second membre, la forme voulue $s + f(x, y, u, p, q) = 0$. On voit même que, si l'équation (71) est entièrement linéaire, c'est-à-dire du premier degré par rapport à $\frac{du}{dX}$, $\frac{du}{dY}$, u, comme par rapport aux dérivées secondes de u, sa transformée le sera également et aura la forme (67).

Nous n'avons, il est vrai, reconnu à celle-ci (67) que deux cas directs d'intégrabilité, se présentant respectivement suivant que l'une ou l'autre des deux expressions $P - MN - \frac{dM}{dx}$ et $P - MN - \frac{dN}{dy}$ est réduite à zéro. Mais Laplace a déduit de ces deux cas une infinité d'autres, en procédant comme il suit.

Supposons, par exemple, que le premier cas ne se trouve pas réalisé, ou que l'équation (67), en faisant, pour abréger, $P - MN - \frac{dM}{dx} = P_1$, soit, d'après (68),

$$(76)\qquad \frac{dv}{dx} + Nv + P_1 u = Q, \quad \text{avec} \quad v = q + Mu = \left(\frac{d}{dy} + M\right)u, \quad \text{et} \qquad P_1$$

Puisque P_1 n'est pas nul, on peut, de la première (76), tirer u, pour en substituer la valeur dans la seconde (76). Alors celle-ci, devenue

$$(77)\qquad \left(\frac{d}{dy} + M\right)\left(-\frac{1}{P_1}\frac{dv}{dx} - \frac{N}{P_1}v + \frac{Q}{P_1}\right) = v,$$

sera visiblement, tous calculs faits, de la forme de la proposée (67), mais avec v, au lieu de u, pour fonction inconnue. Il se pourra donc

qu'elle rentre elle-même dans l'un des deux cas directs d'intégrabilité et permette d'obtenir v par l'intégration de deux équations différentielles linéaires; après quoi l'intégration de la troisième équation linéaire $q + Mu = v$, ou $\frac{du}{dy} + Mu = v$, donnera u. Sinon, on appliquera à la nouvelle équation du second ordre, en v, la même transformation, de Laplace, qu'à l'équation proposée (67); et ainsi de suite à l'infini, tant que la dernière équation du second ordre obtenue ne rentrera dans aucun des deux cas directs d'intégrabilité.

Comme la proposée conduit à deux transformées en v différentes, suivant que l'on pose $v = q + Mu$ ou $v = p + Nu$, on pourrait croire que la transformation de ces transformées en donnera quatre nouvelles, et ainsi de suite; ce qui multiplierait de plus en plus les chances d'intégrabilité. Mais un calcul détaillé montre qu'il n'en est pas ainsi, vu qu'une des nouvelles transformations pour chaque équation immédiatement issue de (67), savoir, la transformation autre que celle qui l'a fournie, ne fait que ramener, au fond, l'équation primitive (67) sous la forme, peu différente, obtenue en remplaçant dans (67) u par une fonction linéaire (à coefficients variables) de la nouvelle inconnue. Or une telle substitution *linéaire* ne change rien aux deux expressions $P - MN - \frac{dM}{dx}$, $P - MN - \frac{dN}{dy}$, non plus qu'à leurs analogues (aisément exprimables au moyen de ces deux premières ou de leurs dérivées) dans les équations qui s'en déduisent successivement; de sorte que la possibilité d'arriver à une de ces expressions dont la valeur soit identiquement nulle, et d'intégrer par quadratures, est exactement la même avec l'équation ainsi modifiée qu'avec (67). Par suite, toutes les transformées successives obtenues ne constitueront qu'une série linéaire, se prolongeant indéfiniment, par un des deux procédés, en deçà, et, par l'autre, au delà, de l'équation (67) d'où l'on sera parti.

Enfin, une transformation importante où l'on change à la fois variables et fonctions, due à Legendre, permet de rendre linéaires et, par conséquent, susceptibles de toutes les réductions précédentes, les équations de laforme

$$(78) \qquad Ar + Bs + Ct + (Du + Ex + Fy + G)(rt - s^2) = 0,$$

où l'on suppose les coefficients A, B, C, D, E, F, G fonctions quelconques des deux dérivées premières p, q de u. Elle consiste à prendre justement pour nouvelles variables ces deux dérivées p, q, et, pour nouvelle fonction, la quantité $U = px + qy - u$. Comme il en résulte, pour la

différentielle totale de U, la formule

$$dU = (p\,dx + x\,dp) + (q\,dy + y\,dq) - (p\,dx + q\,dy) = x\,dp + y\,dq,$$

ou, par suite, en faisant successivement $dq = 0$ et $dp = 0$,

(79) $$x = \frac{dU}{dp}, \qquad y = \frac{dU}{dq},$$

les nouvelles dérivées partielles premières, que nous appellerons P, Q, de la nouvelle fonction inconnue, ne seront autre chose que les anciennes variables x, y. Et il viendra, en somme, pour transformer u, x, y dans (78), vu d'ailleurs que $u = px + qy - U$,

(80) $$x = P, \qquad y = Q, \qquad u = pP + qQ - U.$$

Il nous reste à exprimer r, s, t, c'est-à-dire $\frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy}$ ou $\frac{dq}{dx}, \frac{dq}{dy}$. A cet effet, appelant R, S, T les nouvelles dérivées secondes de U (en p, q), savoir $\frac{dP}{dp}, \frac{dP}{dq}$ ou $\frac{dQ}{dp}, \frac{dQ}{dq}$, différentions, par exemple, en x, les deux équations $x = P$, $y = Q$, dont les seconds membres, dépendant de p et q qui dépendent eux-mêmes de x et y, seront des fonctions composées de x et y. Il viendra

(81) $$1 = Rr + Ss, \quad 0 = Sr + Ts; \quad \text{d'où} \quad \frac{r}{T} = \frac{s}{-S} = \frac{(Rr + Ss) \text{ ou } 1}{RT - S^2}.$$

On en déduit évidemment les valeurs cherchées de r, s; et d'autres analogues, pour s, t, s'obtiendront par la différentiation en y des mêmes équations $x = P$, $y = Q$. Donc r, s, t seront données par la formule triple

(82) $$(r, s, t) = \frac{(T, -S, R)}{RT - S^2}; \qquad \text{d'où} \qquad rt - s^2 = \frac{1}{RT - S^2}.$$

Or ces valeurs de $r, s, t, rt - s^2$, avec les précédentes (80) de u, x, y, transforment sans autre calcul l'équation proposée (78), multipliée par $RT - S^2$, en celle-ci,

(83) $$AT - BS + CR + (Dp + E)P + (Dq + F)Q - DU + G = 0,$$

qui est bien linéaire, puisque les coefficients y sont des fonctions explicites des nouvelles variables indépendantes seules p, q.

On remarquera que, si l'équation (78) contenait de plus, dans son premier membre, un terme H fonction de p, q, sa transformée (83) acquerrait, encore au premier membre, le terme $H(RT - S^2)$, et ne

serait plus linéaire, bien qu'on pût essayer de lui appliquer la méthode de Monge, comme, du reste, à la proposée.

435*. — Intégration de l'équation de d'Alembert ou des cordes vibrantes, et d'une autre équation plus générale, qui régit les phénomènes de propagation d'ondes dans un milieu en mouvement.

La relation très simple du second ordre, à deux variables indépendantes X, Y et à coefficients constants,

$$\frac{d^2 u}{dX^2} - a^2 \frac{d^2 u}{dY^2} = 0, \tag{84}$$

s'appelle *équation des cordes vibrantes,* ou encore *équation de d'Alembert,* du nom du géomètre qui, le premier, en 1747, l'a intégrée et a, par ce résultat d'une grande importance en Mécanique et en Physique, fondé pour ainsi dire la théorie des équations aux dérivées partielles.

La relation (84) présente, en effet, un intérêt capital; car elle régit les phénomènes les plus élémentaires de *propagation* des petits mouvements, comme sont la progression du son dans une colonne d'air cylindrique ou le long d'une corde homogène tendue, le transport apparent des ondes liquides de longueur assez grande, à la surface et à l'intérieur de l'eau en repos d'un canal découvert, etc. Dans tous ces cas, X désigne le temps, Y une coordonnée, mesurée le long de la direction suivant laquelle se fait la propagation, et u la quantité physique considérée (déplacement vibratoire, vitesse effective imprimée à la matière lors du passage de l'onde, etc.), dont la valeur se transmet graduellement d'une particule du milieu aux suivantes, dans les sens des Y soit positifs, soit négatifs.

Quand le milieu au sein duquel s'opère la transmission est lui-même animé d'un mouvement de transport dans l'un de ces sens, comme il arrive, par exemple, à un courant liquide propageant des ondes, l'équation prend la forme plus générale

$$\frac{d^2 u}{dX^2} - (\alpha + \beta) \frac{d^2 u}{dX\,dY} + \alpha\beta \frac{d^2 u}{dY^2} = 0, \tag{85}$$

où α et β désignent deux constantes réelles données, dont α sera la plus grande, et qui, dans (84), étaient respectivement $\alpha = a$, $\beta = -a$. En outre, lorsqu'on tient compte de petits termes correctifs, négligés dans un premier calcul, l'équation (84) ou (85) acquiert presque tou-

jours un second membre, que l'on peut, en procédant par approximations successives comme dans d'autres cas (pp. 211, 227, 317*, etc.), supposer donné explicitement en fonction de X et Y seuls. En définitive, on aura, sous la forme la plus générale que nous considérerons,

$$(86) \qquad \frac{d^2 u}{dX^2} - (\alpha + \beta) \frac{d^2 u}{dX\,dY} + \alpha\beta \frac{d^2 u}{dY^2} = F(X, Y).$$

Cette équation se présentera également dans quelques questions de Géométrie et même de Mécanique où X désignera, non plus le temps, mais, comme Y, une coordonnée.

On peut lui appliquer directement le procédé de Monge. Mais il me semble préférable de la ramener à la forme (67) [p. 352], par la transformation d'Euler. Comme α et β sont deux constantes, le premier membre de (86) équivaut à (73) [p. 354*] et les équations (75), immédiatement intégrables, donnent

$$(87) \qquad \begin{cases} x = Y + \alpha X, \qquad y = Y + \beta X; \\ \text{d'où} \\ X = \dfrac{x - y}{\alpha - \beta}, \qquad Y = \dfrac{\alpha y - \beta x}{\alpha - \beta}, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(88) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dx} = \dfrac{1}{\alpha - \beta}\left(\dfrac{d}{dX} - \beta \dfrac{d}{dY}\right), \\ \dfrac{d}{dy} = \dfrac{-1}{\alpha - \beta}\left(\dfrac{d}{dX} - \alpha \dfrac{d}{dY}\right), \\ \left(\dfrac{d}{dX} - \alpha \dfrac{d}{dY}\right)\left(\dfrac{d}{dX} - \beta \dfrac{d}{dY}\right) = -(\alpha - \beta)^2 \dfrac{d^2}{dx\,dy}. \end{cases}$$

Donc l'équation (86), divisée finalement par $-(\alpha - \beta)^2$, devient

$$(89) \qquad \frac{d^2 u}{dx\,dy} = -\frac{1}{(\alpha - \beta)^2} F\left(\frac{x - y}{\alpha - \beta}, \frac{\alpha y - \beta x}{\alpha - \beta}\right).$$

Elle est alors de la forme extrêmement simple (69) [p. 353*] et donne, d'après (70), avec deux fonctions arbitraires $\varphi(x)$, $\Phi(y)$,

$$(90) \quad u = \varphi(x) + \Phi(y) - \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \int dy \int F\left(\frac{x - y}{\alpha - \beta}, \frac{\alpha y - \beta x}{\alpha - \beta}\right) dx.$$

Il ne reste plus qu'à y substituer à x et à y leurs valeurs $Y + \alpha X$ et $Y + \beta X$, puis à déterminer les fonctions arbitraires φ, Φ d'après des conditions données dans les divers cas.

436*. — Analogie de l'équation des cordes vibrantes et, en général, des équations linéaires aux dérivées partielles, avec les équations différentielles linéaires, au point de vue des principes de superposition et de proportionnalité : cas où il y a égalité des racines de l'équation caractéristique.

On voit, en faisant $\varphi = 0$ et $\Phi = 0$, que le dernier terme de (90) constitue à lui seul une solution particulière de l'équation linéaire proposée (86) ou (89); et, d'ailleurs, les deux termes précédents $\varphi(x)$, $\Phi(y)$ formeraient toute l'expression de u si l'on posait $F = 0$. Donc, conformément à une remarque déjà présentée à propos de l'équation du premier ordre (27) [p. 337*], et dont la généralisation est évidente, *la solution générale d'une équation linéaire ou d'un système linéaire d'équations, aux dérivées partielles, s'obtient en superposant à l'une quelconque de leurs solutions particulières l'intégrale générale de la même équation ou du même système, modifiés par l'annulation des seconds membres.*

Réduisant ainsi l'équation (86) à (85), substituons en même temps à x et à y leurs valeurs (87), dans l'expression $\varphi(x) + \Phi(y)$ de u. Nous aurons, comme intégrale générale de (85),

$$u = \varphi(Y + \alpha X) + \Phi(Y + \beta X). \tag{91}$$

Comme on peut poser, séparément, soit $\Phi = 0$, soit $\varphi = 0$, chacun des termes φ, Φ vérifie à lui seul l'équation (85). Ces termes sont, en effet, de la forme $f(Y + rX)$, r désignant l'une ou l'autre des deux racines α, β de l'équation

$$r^2 - (\alpha + \beta) r + \alpha\beta = 0. \tag{92}$$

Or, vu la nature binôme de la variable $Y + rX$ tant de cette fonction f que de ses dérivées $f', f'', \ldots$, on a identiquement, si $u = f(Y + rX)$,

$$\frac{du}{dY} = f', \qquad \frac{du}{dX} = rf', \qquad \frac{d^2 u}{dY^2} = f'', \qquad \frac{d^2 u}{dY\,dX} = rf'', \qquad \frac{d^2 u}{dX^2} = r^2 f'',$$

en sorte que, divisée par f'', l'équation (85) devient (92) et se trouve bien vérifiée.

Donc la solution générale de l'équation aux dérivées partielles (85), sans second membre et à coefficients constants, se compose, comme celle de l'équation simplement différentielle analogue

$$\frac{d^2 u}{dX^2} - (\alpha + \beta) \frac{du}{dX} + \alpha\beta U = 0, \tag{93}$$

de deux solutions réelles, *en quelque sorte simples;* mais celles-ci, au

lieu d'être proportionnelles à deux exponentielles de la forme e^{rX}, où r désigne les racines de l'*équation caractéristique* (92), sont deux fonctions arbitraires de la forme $f(Y+rX)$.

On peut regarder comme évident le fait de la formation d'une solution de l'équation aux dérivées partielles (85), ou même de tout système d'équations linéaires aux dérivées partielles et sans seconds membres, par simple addition de plusieurs solutions particulières quelconques de ces équations ou de ces systèmes, comme par introduction de facteurs arbitraires constants dans les solutions particulières; car *la démonstration des principes de superposition et de proportionnalité des intégrales, donnée plus haut* (pp. 202 et 206) *pour les équations différentielles, s'étend d'elle-même aux équations aux dérivées partielles.* Mais on ne peut pas généraliser au même degré l'analogie des deux sortes d'équations, quand leurs coefficients sont constants, au point de vue de la décomposition de la solution générale en autant de solutions simples que l'ordre de l'équation contient d'unités. Il suffirait, en effet, que les racines α, β de l'équation (92) devinssent imaginaires, pour que les deux solutions correspondantes, $\varphi(Y+\alpha X)$, $\Phi(Y+\beta X)$, n'eussent plus un sens net tant qu'on laisserait aux fonctions arbitraires φ, Φ toute leur généralité, et surtout pour que leur somme, que l'on peut supposer réelle, ne fût plus réductible à une forme réelle *finie;* alors que, au contraire, les solutions conjuguées correspondantes $ce^{\alpha X}$, $Ce^{\beta X}$ de l'équation différentielle (93) s'associeraient, comme on sait, en une solution double *réelle* de forme parfaitement finie, grâce à l'introduction d'un facteur trigonométrique.

Mais la formation de nouvelles intégrales simples d'une équation différentielle linéaire pour tenir lieu de celles qui cessent d'être distinctes, en cas de racines égales r de l'équation caractéristique, ne dépend, comme on a vu (p. 274*), que des seuls principes de superposition et de proportionnalité. Donc elle s'étendra sans difficulté aux équations aux dérivées partielles; et, par exemple, dans le cas de deux racines r égales, elle donnera, à côté de la solution déjà connue, telle que $f(Y+rX)$, une solution nouvelle de la forme

$$\frac{df(Y+rX)}{dr} = Xf'(Y+rX),$$

ou $X\Phi(Y+rX)$, produit par $\frac{1}{dr}$ de la différence de deux solutions analogues infiniment voisines $f[Y+(r+dr)X]$ et $f(Y+rX)$. Si donc on fait, dans (85), $\beta=\alpha$, l'intégrale générale deviendra

(94) (pour $\beta=\alpha$) $u=\varphi(Y+\alpha X)+X\Phi(Y+\alpha X)$.

On vérifie aisément que le dernier terme, pris à part, satisfait bien à (85), quand $\beta = \alpha$.

437*. — De la détermination des fonctions arbitraires : applications aux ondes propagées dans un sens unique, et lois de deuxième approximation de ces ondes.

Avant de généraliser dans une certaine mesure l'analogie des deux sortes d'équations linéaires sans seconds membres et à coefficients constants, les unes, différentielles, les autres, aux dérivées partielles, en ce qui concerne la réduction de leurs intégrales générales à des nombres *finis* de solutions simples, donnons un aperçu de la manière dont se détermineront les fonctions arbitraires φ, Φ, et de quelques propriétés importantes qui s'ensuivent.

Cette détermination de φ, Φ, capitale pour la théorie de la propagation des petits mouvements, s'opérera de bien des manières diverses, suivant la nature des problèmes et suivant l'étendue des milieux dans les deux sens de transmission qui sont ceux des Y tant négatifs que positifs. Bornons-nous ici au cas le plus simple, savoir, celui où le milieu comprend tout l'espace depuis $Y = -\infty$ jusqu'à $Y = \infty$ et où, pour la valeur initiale $X = 0$ du temps, qui est la variable principale, on donne partout l'état physique, défini par u et par $\frac{du}{dX}$. Ces deux quantités seront donc, à l'instant $X = 0$, deux fonctions connues de l'*abscisse* Y, fonctions que j'appellerai respectivement $(\alpha - \beta)f(Y)$ et $(\alpha - \beta)f_1(Y)$.

L'expression générale (91) de u ayant, pour dérivée en x, la somme $\alpha\varphi'(Y + \alpha X) + \beta\Phi'(Y + \beta X)$, faisons, dans celle-ci, $X = 0$, ainsi que dans (91), et il viendra

$$(95)\qquad \begin{cases} \varphi(Y) + \Phi(Y) = (\alpha - \beta)f(Y), \\ \alpha\varphi'(Y) + \beta\Phi'(Y) = (\alpha - \beta)f_1(Y). \end{cases}$$

La seconde, multipliée par dY, peut être intégrée terme à terme, de $Y = 0$ à $Y = Y$, en observant, par exemple, qu'il est permis, sans modifier l'expression (91) de u, d'ajouter implicitement à φ, pourvu qu'on la retranche de Φ, une constante quelconque c, de manière à annuler, si l'on veut, l'expression $\alpha\varphi(0) + \beta\Phi(0)$, ainsi susceptible d'éprouver la variation arbitraire $(\alpha - \beta)c$. Prenant de la sorte, au lieu de la seconde (95), l'équation

$$(96)\qquad \alpha\varphi(Y) + \beta\Phi(Y) = (\alpha - \beta)\int_0^Y f_1(Y)\,dY = (\alpha - \beta)\int_0^Y f_1(\eta)\,d\eta,$$

il suffira de la joindre à la première (95), pour qu'il en résulte aisément les valeurs suivantes des deux fonctions arbitraires φ, Φ cherchées,

$$(97)\qquad \begin{cases} \varphi(Y) = -\beta f(Y) + \int_0^Y f_1(\eta)\,d\eta, \\ \Phi(Y) = \quad \alpha f(Y) - \int_0^Y f_1(\eta)\,d\eta; \end{cases}$$

et l'expression (91) de u deviendra enfin, sous une forme entièrement déterminée,

$$(98)\qquad u = \alpha f(Y+\beta X) - \beta f(Y+\alpha X) + \int_{Y+\beta X}^{Y+\alpha X} f_1(\eta)\,d\eta.$$

Mais il est préférable, une fois φ et Φ connus, de laisser à u sa forme simple (91). Nous en tenant donc à celle-ci, et observant qu'elle représente la superposition de deux phénomènes dans chacun desquels on aurait soit $\varphi = 0$, soit $\Phi = 0$, cherchons ce qu'exprimeront à part les deux solutions partielles correspondantes $u = \Phi(Y+\beta X)$, $u = \varphi(Y+\alpha X)$.

Dans la première, où la seule variable de u et de toutes ses dérivées est $Y+\beta X$, les mêmes circonstances se produisent perpétuellement autour d'un observateur se déplaçant vers les Y positifs avec la vitesse $-\beta$, ou dont l'abscisse Y croît avec le temps X de manière que la somme $Y+\beta X$ se maintienne constante. Le phénomène représenté par cette solution en quelque sorte *simple* est donc la *propagation uniforme et intégrale d'une certaine onde vers les* Y *positifs,* avec la *célérité* (ou vitesse de transport apparent) $-\beta$, d'ordinaire positive. De même, la deuxième solution particulière, $u = \varphi(Y+\alpha X)$, exprime la *propagation uniforme et intégrale d'une autre onde vers les* Y *négatifs*, avec la célérité α, ordinairement positive aussi. *C'est* donc *la superposition de deux ondes courantes*, *c'est-à-dire de deux modes de mouvement aptes à se transmettre, mais avec des vitesses* $-\beta$, $-\alpha$ *différentes suivant le sens des abscisses positives, qui constitue le phénomène général régi par l'équation proposée* (85).

Quand, à l'époque initiale $X = 0$, l'état naturel de repos, caractérisé par des déplacements u nuls et par des vitesses $\frac{du}{dX}$ nulles aussi, existait dans tout l'espace situé d'un même côté de l'origine $Y = 0$, du côté, par exemple, des Y positifs, l'onde qui se propage de ce côté, ou qu'anime la célérité $-\beta$, se trouve, à l'époque positive quelconque X, dégagée de l'autre onde, sur toute la distance $(\alpha-\beta)X$ comprise entre les deux abscisses $Y = -\beta X$ et $Y = -\alpha X$.

En effet, f et f_1 s'annulant pour les valeurs positives de leur variable, il en est de même, d'après (97), des fonctions φ et Φ; en sorte que, si l'on considère les deux termes $\Phi(Y+\beta X)$ et $\varphi(Y+\alpha X)$, le premier est nul pour $Y > -\beta X$, et, le second, nul pour $Y > -\alpha X$, le repos existant ainsi en tous les endroits où Y dépasse $-\beta X$, et les deux ondes ne *coexistant* qu'à ceux où Y est inférieur à $-\alpha X$, pour laisser à l'onde $u = \Phi(Y+\beta X)$ seule, l'espace, indéfiniment grandissant avec X, compris entre ces deux limites.

Il suit de là que, *lorsque* X *a crû suffisamment*, la fonction u et toutes ses dérivées dépendent de la variable unique $Y+\beta X$, tant en avant de l'onde, où s'évanouissent ces quantités jusqu'à $Y=\infty$, qu'en arrière de la *tête* de l'onde, tête définie en position par la valeur de Y la plus forte n'annulant pas u, et jusqu'à une distance de cette tête aussi grande, en quelque sorte, qu'on le veut, vers les Y négatifs.

Cette considération permet de simplifier, dans l'équation aux dérivées partielles du phénomène, l'expression des petits termes négligés à une première approximation, mais dont il importe quelquefois d'évaluer l'influence, principalement quand on traite des longues ondes, de hauteur sensible, appelées *remous*, *intumescences, ondes solitaires*, etc., propagées le long des canaux et des cours d'eau. Alors les petits termes dont il s'agit accroissent l'équation (85) d'un second membre aisément réductible à la forme $\frac{dK}{dY}$, où K désigne une certaine fonction de u et de ses dérivées en Y, abstraction faite de parties insignifiantes le plus souvent ou du moins dans les cas les plus intéressants.

Or, comme ce second membre est négligeable à la première approximation, il peut, même *à la seconde*, ou sauf erreur très faible par rapport à lui-même, se calculer au moyen des précédents résultats approchés; ce qui le rend une simple fonction de $Y+\beta X$ ou de y, à la différence des termes, bien moins petits, du premier membre, dont le mode de variation devient désormais plus complexe. Et l'on voit dès lors que, la dérivée de $Y+\beta X$ en Y étant 1, le second membre $\frac{dK}{dY}$ égale $\frac{dK}{dy}$. La transformation qu'indiquent les formules (87) et (88) changera donc la nouvelle équation aux dérivées partielles du problème en celle-ci,

$$(99)\qquad -(\alpha-\beta)^2\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{dK}{dy} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dy}\left[(\alpha-\beta)^2\frac{du}{dx}+K\right]=0,$$

dont l'intégrale intermédiaire est évidemment

$$(\alpha-\beta)^2 \frac{du}{dx} + \mathrm{K} = \text{une fonct. arbitraire } \psi \text{ de } x, \tag{100}$$

c'est-à-dire, en revenant aux variables X, Y et divisant par $\alpha - \beta$,

$$\frac{du}{d\mathrm{X}} - \beta \frac{du}{d\mathrm{Y}} + \frac{\mathrm{K}}{\alpha-\beta} = \frac{\psi(\mathrm{Y}+\alpha\mathrm{X})}{\alpha-\beta}. \tag{101}$$

D'ailleurs, à l'instant initial où X s'annule, u, ses dérivées et K s'annulent aussi, par hypothèse, dans tout l'espace $\mathrm{Y} > 0$; ce qui rend la fonction ψ essentiellement nulle pour les valeurs positives de sa variable $\mathrm{Y}+\alpha\mathrm{X}$, les seules qu'il s'agisse de considérer. Donc l'équation aux dérivées partielles régissant la forme et le transport apparent de l'onde, du premier ordre seulement, par rapport à la variable principale X, sera

$$\frac{du}{d\mathrm{X}} - \beta \frac{du}{d\mathrm{Y}} + \frac{\mathrm{K}}{\alpha-\beta} = 0. \tag{102}$$

Le troisième terme, où K recevra son expression donnée en fonction de u et des dérivées de u en Y, empêche presque toujours la propagation d'être *uniforme* et *intégrale :* autrement dit, l'onde éprouve de lentes mais continuelles déformations, sauf dans des cas très particuliers où, même, sa *célérité* n'est plus tout à fait $-\beta$. Mais l'étude de ces particularités, dont les lois varieront avec la forme de K, doit être laissée à la Mécanique et à la Physique.

Observons seulement que l'équation (102) subsisterait quand même le second membre de la proposée, complété maintenant par les termes négligés ci-dessus, ou évalué pour d'autres problèmes que celui des ondes liquides dont il était question, ne prendrait la forme $\frac{d\mathrm{K}}{d\mathrm{Y}}$ qu'en y appelant K une certaine intégrale définie $\int_{\mathrm{Y}}^{\infty} \mathrm{F}\left(u, \frac{du}{d\mathrm{Y}}, \cdots\right) d\mathrm{Y}$, *initialement* nulle pour $\mathrm{Y} > 0$, et où F désignerait une fonction donnée tant de u que de ses dérivées partielles d'ordres quelconques, toujours réductibles à des dérivées en Y seul par suite de l'expression approchée $\Phi(\mathrm{Y}+\beta\mathrm{X})$ de u. En effet, cette intégrale définie serait à fort peu près de la forme $\int_{\mathrm{Y}}^{\infty} f(\mathrm{Y}+\beta\mathrm{X})\,d\mathrm{Y}$ ou, par un changement de la variable d'intégration, $\int_{\mathrm{Y}+\beta\mathrm{X}}^{\infty} f(\eta)\,d\eta$, et dépendrait encore, à une première approximation, de la variable unique $\mathrm{Y}+\beta\mathrm{X}$.

438*. — Extension, à certaines équations et à certains systèmes aux dérivées partielles, des méthodes de décomposition des intégrales en solutions simples, et d'élimination, fondées sur l'emploi des facteurs symboliques $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, ..., et qui sont générales dans le cas d'équations différentielles linéaires sans seconds membres, à coefficients constants, amenées à leur forme normale.

On a remarqué l'analogie de l'équation aux dérivées partielles (85) avec l'équation différentielle (93), au point de vue de la décomposition de leur solution générale en solutions simples ayant respectivement les deux formes $f(Y+rX)$ et ce^{rX}, où r désigne les diverses racines d'une même équation caractéristique (92). Insistons maintenant sur cette analogie, pour essayer de la généraliser.

Et, d'abord, elle a sa raison d'être dans la décomposition évidente du premier membre de l'équation (85) en

$$\left(\frac{d}{dX}-\alpha\frac{d}{dY}\right)\left(\frac{d}{dX}-\beta\frac{d}{dY}\right)u,$$

entièrement analogue à celle que comporte (p. 272*) le premier membre de l'équation différentielle, et où (α, β étant constants) chaque facteur symbolique binôme peut, à tour de rôle, s'écrire après les autres. Donc, de même que l'équation différentielle admettait toutes les solutions ce^{rX} des équations du premier ordre comprises dans le type $\left(\frac{d}{dX}-r\right)u=0$, de même aussi l'équation aux dérivées partielles cumule celles des équations du premier ordre $\frac{du}{dX}-r\frac{du}{dY}=0$, dont l'intégrale est bien $f(Y+rX)$, comme on a vu par le premier exemple traité au n° 428* (p. 336*).

Appliquons le même raisonnement à toute équation linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre, à *deux* variables indépendantes x, y, qui ait ses coefficients constants et soit *homogène quant à l'ordre des dérivées*, c'est-à-dire de la forme symbolique

$$(103)\quad \left(\frac{d^n}{dx^n}+A\frac{d^n}{dx^{n-1}dy}+B\frac{d^n}{dx^{n-2}dy^2}+\ldots+E\frac{d^n}{dx\,dy^{n-1}}+F\frac{d^n}{dy^n}\right)u=0.$$

Si l'on y traite $\frac{d}{dx}$ et $\frac{d}{dy}$ comme des quantités dont r désignerait le rapport, l'expression entre parenthèses pourra toujours se décomposer en facteurs homogènes du premier ou du second degré : car, divisée par $\frac{d^n}{dy^n}$, elle deviendra le polynôme $r^n+Ar^{n-1}+\ldots+Er+F$ et sera

le produit

$$(r-a)(r-b)\dots[(r-\alpha)^2+\beta^2]\dots,$$

$a, b, \dots, \alpha \pm \beta\sqrt{-1}, \dots$ désignant les racines de l'*équation caractéristique*

(104) $$r^n + A\,r^{n-1} + B\,r^{n-2} + \dots + E\,r + F = 0;$$

résultat d'où l'on déduira, en multipliant par $\dfrac{d^n}{dy^n}$, que la relation (103), considérée encore comme purement algébrique, sera identiquement

(105) $$\left(\frac{d}{dx} - a\,\frac{d}{dy}\right)\left(\frac{d}{dx} - b\,\frac{d}{dy}\right)\cdots\left[\left(\frac{d}{dx} - \alpha\,\frac{d}{dy}\right)^2 + \beta^2\,\frac{d^2}{dy^2}\right]\cdots u = 0.$$

Or, les expressions entre parenthèses se combinant exactement, quand elles sont symboliques ou expriment des dérivées, comme quand elles sont algébriques, l'équation aux dérivées partielles (103) aura pris elle-même la forme (105), qui montre qu'elle cumulera les solutions des équations

(106) $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} - a\,\dfrac{du}{dy} = 0, \qquad \dfrac{du}{dx} - b\,\dfrac{du}{dy} = 0, \qquad \dots, \\ \left(\dfrac{d}{dx} - \alpha\,\dfrac{d}{dy}\right)^2 u + \beta^2\,\dfrac{d^2 u}{dy^2} = 0, \qquad \dots . \end{array}\right.$$

Si donc toutes les racines r de l'équation caractéristique (104) sont réelles et inégales, on aura l'intégrale générale de (103), qui doit contenir n fonctions arbitraires, en superposant n solutions de la forme $f(y+rx)$, savoir celles des n équations du premier ordre obtenues $\dfrac{du}{dx} - a\,\dfrac{du}{dy} = 0$, ... Et l'on formera non moins aisément cette intégrale générale, d'après la réflexion de la fin du n° 436* (p. 361*), si certaines des n racines r deviennent égales.

Mais il n'en est plus de même quand l'équation en r admet des racines imaginaires, c'est-à-dire quand quelques-unes des équations (106) sont de la forme

(107) $$\left(\frac{d}{dx} - \alpha\,\frac{d}{dy}\right)^2 u + \beta^2\,\frac{d^2 u}{dy^2} = 0, \quad \text{qui devient} \quad \frac{d^2 u}{dX^2} + \frac{d^2 u}{dY^2} = 0,$$

en posant

(108) $$x = X \quad \text{et} \quad y = \beta Y - \alpha X, \quad \text{ou} \quad X = x \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{\beta}(y + \alpha x).$$

Alors, en effet, on ne connaît à cette équation d'autres solutions

sous forme finie, avec fonctions arbitraires, que celles de

$$(109)\quad \left(\frac{d}{dX} \mp \sqrt{-1}\,\frac{d}{dY}\right)u = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad u = f(Y \pm X\sqrt{-1}),$$

dont deux, associées, sont irréductibles à une forme finie réelle (p. 361*), à moins de perdre leur généralité et de devenir, par exemple, ou deux polynômes conjugués, ou deux exponentielles, etc.

Si l'équation aux dérivées partielles proposée, encore linéaire à coefficients constants, et sans second membre, contenait des dérivées qui ne fussent pas toutes du même ordre, comme, par exemple, un terme proportionnel à la fonction inconnue u, ou si, même possédant l'homogénéité par rapport à l'ordre des dérivées, elle était à plus de deux variables indépendantes, la décomposition de son premier membre en facteurs symboliques du premier ou du second degré ne serait généralement plus possible. Mais, exceptionnellement, une telle décomposition pourrait se produire, vu que des expressions de la forme $\frac{d}{dx} - a\,\frac{d}{dy} - \ldots - b\,\frac{d}{dz} - c, \ldots,$ multipliées symboliquement entre elles et suivies de u, donnent bien un développement dans le genre des premiers membres dont il s'agit : et il est clair qu'alors l'intégration générale de l'équation proposée se ramènera à celles des équations, d'ordres moindres, obtenues en égalant à zéro chacun des facteurs symboliques, suivi de u.

Par exemple, l'équation du second ordre

$$(110)\qquad \frac{d^2u}{dx^2} - \left(a\,\frac{d}{dy} + b\,\frac{d}{dz} + c\right)^2 u = 0$$

se réduit immédiatement aux deux, du premier ordre,

$$\frac{du}{dx} \mp a\,\frac{du}{dy} \mp b\,\frac{du}{dz} \mp cu = 0,$$

pour lesquelles le procédé ordinaire (n° 426*, p. 333*) donne, en prenant $x_0 = 0$,

$$ue^{\mp cx} = \varphi(y \pm ax,\, z \pm bx), \qquad \text{ou} \qquad u = e^{\pm cx}\varphi(y \pm ax,\, z \pm bx).$$

L'intégrale générale de (110) sera donc, avec deux fonctions arbitraires φ, Φ,

$$(111)\qquad u = e^{cx}\varphi(y + ax,\, z + bx) + e^{-cx}\Phi(y - ax,\, z - bx).$$

Enfin, vu toujours la manière analogue dont se combinent des facteurs algébriques et des facteurs symboliques à coefficients constants, rien n'empêchera, dans l'étude d'un système, à n fonctions inconnues

$u, v, \ldots$, d'équations aux dérivées partielles, dont $n-1$, linéaires, auront d'ailleurs leurs coefficients constants et pas de termes indépendants des fonctions inconnues ou de leurs dérivées, d'essayer la méthode d'élimination exposée au n° 407* (p. 277*) pour de tels systèmes d'équations, mais simplement différentielles. On assimilera les $n-1$ relations dont il s'agit à des équations du premier degré sans seconds membres, où des polynômes symboliques en $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \cdots$ seraient les coefficients, et $u, v, \ldots$ les inconnues.

Alors on opérera comme si l'on voulait avoir les rapports mutuels de ces dernières; et l'on en déduira, si φ désigne le quotient fictif de chacune d'elles par le déterminant partiel obtenu pour la représenter proportionnellement, des expressions de $u, v, w, \ldots$ contenant linéairement une seule fonction inconnue auxiliaire φ ou ses dérivées, fonction laissée tout à fait arbitraire par les $n-1$ équations employées. En effet, celles-ci, identiquement satisfaites, au moyen des expressions trouvées, tant que $\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \cdots$ y ont un sens algébrique, continuent évidemment à l'être quand ces fractions reprennent leur sens infinitésimal. On aura donc, en fonction d'une variable auxiliaire φ, des valeurs de $u, v, w, \ldots$ non pas toujours obligatoires ([1]), mais, du moins, *compatibles* avec ces $n-1$ relations; et en les substituant dans la $n^{\text{ième}}$ équation du système, qui peut être quelconque et même non linéaire, il viendra, en φ, l'équation aux dérivées partielles (d'un ordre généralement assez élevé pour comporter une intégrale impliquant le nombre voulu de fonctions arbitraires) à laquelle il suffira que φ satisfasse pour rendre les valeurs de $u, v, w, \ldots$ solutions tout au moins particulières du système proposé.

([1]) Car les raisonnements de la page 279*, complétés au n° 412*, qui rendent les expressions ainsi formées des fonctions inconnues, *nécessaires* dans le cas des équations différentielles (13) de la page 276*, sont propres à ce cas; et, encore, les formules générales (38), (40) [pp. 293* et 294*] des fonctions dont il s'agit, supposent-elles qu'on y emploie simultanément les n systèmes d'expressions de ces fonctions au moyen de φ, obtenus en abstrayant successivement de l'ensemble des n équations proposées (13) chacune d'elles, systèmes dont l'équivalence cesse d'être parfaite lorsque, pour une solution simple, l'hypothèse de valeurs *finies* de φ ou de la constante arbitraire annule identiquement, dans l'un d'eux, toutes les fonctions inconnues, réduisant ainsi leurs rapports mutuels à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ et obligeant de recourir, pour cette solution simple, à un autre système, plus explicite.

Soit, par exemple, le système très simple, du premier ordre,

$$(112) \qquad \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 0, \qquad \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dy} = 0.$$

La première de ces relations, assimilée à une équation algébrique dont $\frac{d}{dy}$ et $-\frac{d}{dx}$ seraient les coefficients, exprime la proportionnalité de u et v à $\frac{d}{dx}$ et à $\frac{d}{dy}$; d'où, en appelant φ la valeur commune des deux rapports, on déduira $u = \frac{d\varphi}{dx}$ et $v = \frac{d\varphi}{dy}$, comme le montrerait directement cette remarque, que la première (112) exprime la condition d'intégrabilité de $u\,dx + v\,dy$, ou signifie que u, v sont les deux dérivées partielles en x et y d'une même fonction φ, savoir $\int(u\,dx + v\,dy)$. Substituant donc ces valeurs de u, v dans la seconde (112), il viendra, pour déterminer φ, l'équation de deuxième ordre $\frac{d^2\varphi}{dx^2} \pm \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$, intégrable ou non sous forme finie suivant qu'on y prend le second terme avec son signe inférieur ou son signe supérieur.

Un exemple propre à montrer comment la méthode ne donne quelquefois que des intégrales particulières s'obtient en joignant à la première (112) l'équation du troisième ordre $\frac{d\Delta_2 u}{dx} + \frac{d\Delta_2 v}{dy} = 0$, qui diffère de l'une des secondes (112) par l'introduction, dans tout son premier membre, du facteur symbolique Δ_2, synonyme, ici, de $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}$.

La première (112) donnant identiquement, comme on a vu, $u = \frac{d\varphi}{dx}$, $v = \frac{d\varphi}{dy}$, il s'ensuit, pour φ, l'équation $\Delta_2\Delta_2\varphi = 0$, du quatrième ordre, et dont l'intégrale possède toute la généralité requise. Or, si nous choisissons, à l'inverse, pour effectuer l'élimination de u, v, la seconde équation, $\frac{d\Delta_2}{dx}u + \frac{d\Delta_2}{dy}v = 0$, d'où résultent, en appelant ici ψ la fonction auxiliaire, les valeurs

$$(113) \qquad u = \frac{d\Delta_2\psi}{dy}, \qquad v = -\frac{d\Delta_2\psi}{dx};$$

il n'en sera plus de même, quoique ces valeurs de u, v, portées dans la première (112), conduisent à l'équation $\Delta_2\Delta_2\psi = 0$, pareille à la précédente en φ, et admettant dans son intégrale un nombre suffisant de fonctions arbitraires. En effet, deux de ces fonctions seront main-

tenant sans utilité, dans u et v, à cause du facteur symbolique *commun* Δ_2, affectant leurs expressions et passé avec elles dans l'équation résultante $\Delta_2\Delta_2\psi = 0$; car il suit de cette présence de Δ_2 partout que ce n'est pas précisément de ψ, mais bien de $\Delta_2\psi$, que u, v dépendent. Posons donc $\Delta_2\psi = \Phi$, et les valeurs (113), jointes à $\Delta_2\Delta_2\psi = 0$, seront en réalité

$$(114) \qquad u = \frac{d\Phi}{dy}, \qquad v = -\frac{d\Phi}{dx}, \qquad \text{avec} \qquad \Delta_2\Phi = 0,$$

solution qui, comportant seulement deux fonctions arbitraires, n'est évidemment pas générale : elle ne le deviendrait que si la seconde relation proposée cessait d'être du troisième ordre pour se réduire à $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$.

On voit par là comment, lorsque les expressions obtenues de u, v, w, ... en fonction de φ contiendront des facteurs symboliques communs, tels que Δ_2, etc., le mode d'élimination indiqué fournira seulement des intégrales particulières. Celles-ci, que l'on aura d'ailleurs sans altération en supprimant les facteurs symboliques communs, ainsi que l'a montré notre exemple, n'en seront pas moins précieuses, quand elles répondront au but spécial poursuivi ; sans compter que l'on pourra parfois former, par leur moyen, les intégrales générales, en en superposant, par exemple, plusieurs, dans lesquelles les rôles analogues seront remplis successivement par toutes les variables $x, y, z, \ldots$ qui figureraient de la même manière dans l'ensemble des équations.

Ainsi s'obtiendront, notamment, les expressions des petits déplacements intérieurs u, v, w dans un solide élastique, isotrope et homogène, supportant en chaque point, par unité de volume, une force extérieure donnée, parallèle à un axe, celui des z par exemple. Si l'on appelle Z une fonction de x, y, z exprimant (à un coefficient constant près) cette force, k un nombre spécifique constant, et Δ_2 le symbole $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$, les équations de l'équilibre seront

$$(115) \qquad \begin{cases} \left(k\Delta_2 + \frac{d^2}{dx^2}\right)u + \frac{d^2}{dx\,dy}v + \frac{d^2}{dx\,dz}w = 0, \\ \frac{d^2}{dx\,dy}u + \left(k\Delta_2 + \frac{d^2}{dy^2}\right)v + \frac{d^2}{dy\,dz}w = 0, \\ \frac{d^2}{dx\,dz}u + \frac{d^2}{dy\,dz}v + \left(k\Delta_2 + \frac{d^2}{dz^2}\right)w = -Z. \end{cases}$$

Les deux premières, résolues à la manière d'équations algébriques linéaires en u, v, w, donnent identiquement (après réductions évidentes

et suppression du facteur commun $k\Delta_2$) u, v, w proportionnels à $-\frac{d^2}{dx\,dz}$, $-\frac{d^2}{dy\,dz}$, $(k+1)\Delta_2-\frac{d^2}{dz^2}$. Il vient donc

$$(116)\qquad u=-\frac{d^2\varphi}{dx\,dz},\qquad v=-\frac{d^2\varphi}{dy\,dz},\qquad w=(k+1)\Delta_2\varphi-\frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

valeurs de u, v, w qui, portées dans la troisième (115), conduisent, pour déterminer la fonction auxiliaire φ, à l'équation du quatrième ordre

$$(117)\qquad k(k+1)\Delta_2\Delta_2\varphi=-Z.$$

Et la superposition de trois solutions analogues à (116), mais où x, y, z échangeraient leurs rôles, ainsi que u, v, w, et dans deux desquelles figureraient au second membre de (117), à la place de Z, des forces extérieures X, Y dirigées suivant les x et les y, fournira, du moins pour un milieu élastique indéfini, la solution générale du problème de son équilibre intérieur sous l'action de forces extérieures quelconques s'exerçant sur sa masse.

Soit enfin, comme dernier exemple, à considérer les vitesses successives, u, v, w suivant les axes, produites dans un liquide aux divers points (x, y, z), par une sphère solide immergée qui s'y déplace *parallèlement aux* z d'une manière assez lente, mais d'ailleurs quelconque. On n'a besoin alors, pour exprimer u, v, w en fonction de φ, que des équations les plus simples du problème, qui sont

$$(118)\qquad \frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=0\qquad\text{et}\qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0:$$

la seconde est la condition bien connue de conservation des volumes fluides, tandis que la première résulte d'une symétrie évidente du mouvement, en vertu de laquelle la composante de vitesse $\pm\sqrt{u^2+v^2}$, parallèle aux xy, est partout dirigée dans le sens du rayon vecteur $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, émanant d'un axe mené suivant les z par le centre mobile (x_0, y_0, z_0) de la sphère, et, de plus, se trouve fonction de ce rayon vecteur, non de x ni de y individuellement.

De cette symétrie, il résulte, en effet, pour u, v, des expressions, $\pm\sqrt{u^2+v^2}\,\frac{(x-x_0,\ y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$, de la forme

$$(u, v)=f[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2](x-x_0, y-y_0)$$

quant à la manière dont x, y y figurent; ce qui donne bien aux deux

dérivées de u en y et de v en x une valeur commune, savoir, $2f'[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2](x-x_0)(y-y_0)$.

Or la première (118) conduit à prendre pour u et v les dérivées respectives en x et en y d'une même fonction ψ de x, y, z; et, ces expressions changeant la seconde (118) en $\left(\Delta_2-\frac{d^2}{dz^2}\right)\psi+\frac{d}{dz}w=0$, il y a lieu de poser ensuite $\psi=-\frac{d\varphi}{dz}$, $w=\left(\Delta_2-\frac{d^2}{dz^2}\right)\varphi$. On aura donc

$$(119)\qquad u=-\frac{d^2\varphi}{dx\,dz},\qquad v=-\frac{d^2\varphi}{dy\,dz},\qquad w=\Delta_2\varphi-\frac{d^2\varphi}{dz^2},$$

valeurs que l'on portera dans les autres équations du problème, plus compliquées, où figurera, avec u, v, w, la *pression moyenne* p du fluide en chaque point.

Et l'on formera les expressions de u, v, w qui conviennent à une translation du corps sphérique encore assez lente, mais arbitrairement variable d'un instant à l'autre pour la direction comme pour la grandeur, en superposant trois solutions de cette forme (119), dans deux desquelles x et u, y et v auront respectivement les rôles que jouent z et w dans (119).

QUARANTE-QUATRIÈME LEÇON.

PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES, SPÉCIAUX AUX PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE QUI CONCERNENT LES CORPS DE GRANDEUR FINIE : ÉTUDE D'ÉTATS VARIABLES EN FONCTION DU TEMPS.

439*. — **Idée générale des équations de la Physique mathématique.**

Les méthodes exposées dans les deux Leçons précédentes, et dont le but principal est l'intégration, *sous forme finie,* des équations aux dérivées partielles, ne sont que rarement suffisantes dans les problèmes de Physique mathématique, trop complexes pour admettre en général des solutions de cette forme. Alors il devient indispensable d'employer soit des développements en série, soit des intégrales définies, qui y réussissent assez souvent, les premiers, quand les corps dont il s'agit ont leurs dimensions finies, du moins suivant les sens où s'y déroulent les phénomènes, et, les secondes, quand ces dimensions sont, au contraire, infinies.

Occupons-nous d'abord exclusivement du premier cas. La nature des séries à y employer résulte de la forme même des équations qui régissent le phénomène dans l'hypothèse de la décomposition du corps ou du système matériel en un nombre *limité,* quoique très grand, de particules, ayant, chacune, son état physique exprimé par une ou par plusieurs fonctions du temps t. Nous savons, en effet (pp. 178 et 201), que le problème se trouve alors défini au moyen d'un système d'équations simplement différentielles, devenant même linéaires, à coefficients constants (p. 202), dans l'étude des changements assez modérés d'état aux environs de certaines manières d'être stables ou permanentes, et qu'il en résulte (pp. 203, 206, 289*) la réduction des intégrales à des sommes de solutions simples de formes très déterminées; car le temps t, variable indépendante unique, n'entre, dans chacune, que par un facteur soit exponentiel, soit trigonométrique, soit mixte, où les coefficients de t se trouvent les mêmes pour toutes les fonctions inconnues et, d'ordinaire, caractérisent la solution simple.

Mais quelques explications, moins abrégées que celles de la fin du

n° 421* (p. 323*), sont nécessaires ici, pour comprendre comment de tels systèmes d'équations différentielles, avec le temps t pour seule variable indépendante, font inévitablement place, dès qu'il s'agit d'un calcul effectif des phénomènes dans des corps de dimensions sensibles, à des équations aux dérivées partielles admettant en général quatre variables indépendantes, savoir, outre le temps t, trois coordonnées x, y, z.

Et d'abord, vu le nombre prodigieux des particules ou la difficulté de ne pas les confondre, on ne pourrait guère dégager, de tant d'équations différentielles simultanées concernant leur état physique, autre chose que les quelques lois très générales dont il vient d'être question, si l'on ne commençait par définir d'une manière précise les particules à considérer (que l'on assimile à des points), au moyen de leurs coordonnées x, y, z soit actuelles, soit relatives à un certain moment, c'est-à-dire plutôt à un état censé donné (réel ou fictif) du corps; de manière à pouvoir regarder les quantités physiques d'une même espèce, par exemple les températures des diverses particules (x, y, z), comme étant les différentes valeurs, à chaque époque t, d'une même fonction *continue* de x, y, z. Donc une seule fonction du temps et des coordonnées tiendra lieu d'une infinité de fonctions du temps ; et quelques fonctions de t, x, y, z suffiront pour exprimer la succession des états physiques de tout un corps ou ensemble de corps.

De plus, en vertu d'une loi fondamentale presque évidente, toute particule est influencée principalement, souvent même d'une manière exclusive, par les particules contiguës; en sorte que la dérivée, par rapport au temps, de chaque quantité physique relative à un point déterminé (x, y, z) d'un corps, ne dépend le plus souvent que des états actuels produits en ce point et dans le voisinage.

Or ces états physiques, considérés ainsi dans une étendue très petite autour de (x, y, z), sont ordinairement caractérisés d'une manière complète par les valeurs, en (x, y, z), des fonctions qui les définissent et de leurs dérivées partielles relatives aux coordonnées; car la série de Taylor donnerait ces mêmes fonctions dans tout le voisinage, c'est-à-dire pour toutes les particules ayant des coordonnées (ou actuelles ou primitives) très peu différentes de x, y, z, en séries procédant suivant les puissances des petits accroissements de ces coordonnées à partir de x, y, z, et qui ne varieraient, d'un état physique à l'autre, qu'avec leurs coefficients, c'est-à-dire avec les valeurs, en (x, y, z), des fonctions développées et de leurs dérivées successives par rapport à x, y, z. En conséquence, la dérivée, relative à t, des diverses quantités physiques

ne dépendra que des valeurs actuelles de ces quantités et de leurs dérivées en x, y, z, ainsi que de la nature des corps étudiés. C'est bien dire que les équations du phénomène seront aux dérivées partielles, avec quatre variables indépendantes, savoir : 1° le temps t, auquel correspondront ses phases successives, et qui, dans le cas d'un *état initial* donné, sera la *variable principale* (p. 323*); 2° les coordonnées x, y, z, caractéristiques des diverses régions servant, en quelque sorte, de théâtre aux faits étudiés.

Les phénomènes de pesanteur sont presque les seuls où la matière située à des distances perceptibles de celle que l'on considère influe d'une manière immédiate sur le mouvement de celle-ci; ce qu'elle fait en modifiant la dérivée, par rapport au temps, de sa vitesse suivant le sens de la verticale. Mais cette dérivée ne se trouve ainsi changée que d'une quantité à fort peu près ou constante, ou fonction donnée du temps, en chaque point (x, y, z), et les équations de mouvement n'en sont, par suite, augmentées que d'un terme de valeur connue. Ainsi les conclusions précédentes s'appliquent même à de tels phénomènes.

Quand il ne s'agit que de petits changements d'état, les équations aux dérivées partielles deviennent linéaires par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées partielles, pour la même raison, exposée plus haut (p. 201), que dans le cas où l'on préférait avoir, à la place, des équations différentielles simultanées; et leurs coefficients, déjà indépendants du temps (p. 202), le sont même des coordonnées s'il est question d'une *matière homogène*, ou si, en d'autres termes, une même distribution actuelle d'états physiques, dans une petite étendue autour d'un point, entraîne, en ce point, quel qu'il soit *à l'intérieur* du corps, les mêmes changements instantanés élémentaires.

Alors les particules de la surface, ou appartenant à ce qu'on appelle la *couche superficielle* du corps, se trouvent seules (à cause des discontinuités ou des très rapides et exceptionnelles variations de nature et d'état qui s'y produisent) régies par des équations spéciales, dites conditions *aux limites* ou relations *définies*, qui expriment leurs doubles rapports avec l'extérieur et avec le dedans. Et l'on appelle, par contre, *équations indéfinies*, celles qui, s'appliquant aux particules intérieures, conviennent pour toutes les valeurs de x, y, z, vu la continuité admise de l'état physique du corps : la manière même dont on forme ces équations en Mécanique ou en Physique mathématique, par la mise en compte des influences s'exerçant simultanément à travers les *faces opposées* d'une particule, y introduit des dérivées en x, y, z d'un ordre plus élevé, d'une unité, que celles qui entrent généralement dans les conditions spéciales à la surface.

440*. — Sur leur réduction à des systèmes d'une infinité d'équations différentielles, formées pour un réseau de points régulièrement alignés en files parallèles aux axes.

Pour nous faire simplement une idée de la signification d'un tel ensemble de relations, les unes indéfinies, les autres, définies, et de la manière dont elles peuvent déterminer les problèmes, essayons de les ramener à des équations différentielles simultanées, non pas précisément aux équations d'où nous sommes partis et qui enchaînaient les états successifs de l'inextricable amas de particules composant le corps, mais à d'autres bien plus simples, régissant, dans ce corps devenu en quelque sorte continu, l'état physique de points choisis régulièrement espacés les uns des autres, et d'ailleurs extrêmement voisins, entre lesquels la loi de continuité permettra d'interpoler l'état de tout le milieu.

Nous supposerons donc ces points, dans leur état ou initial, ou actuel, rangés par files parallèles aux axes, et présentant de l'un à l'autre, suivant les x, les y et les z, trois espacements uniformes très petits h, k, l (que nous ferons tendre finalement vers zéro); de sorte que les coordonnées ou initiales, ou actuelles, de l'un quelconque d'entre eux étant x, y, z, celles des plus voisins soient x ou $x \pm h$, y ou $y \pm k$, z ou $z \pm l$. Si, pour plus de simplicité, nous admettons qu'il s'agisse d'un état physique exprimé au moyen d'une seule fonction de point, u, et que celle-ci soit régie par une équation aux dérivées partielles donnant $\frac{du}{dt}$, ou $\frac{d^2u}{dt^2}$, linéairement en fonction de u et de ses dérivées tant premières que secondes relatives à x, y, z, le but proposé sera d'exprimer $\frac{du}{dt}$ ou $\frac{d^2u}{dt^2}$, pour chaque point (x, y, z) du réseau à trois dimensions considéré, au moyen des valeurs actuelles de u en (x, y, z) et aux points du réseau voisins $(x \pm h, y, z)$, $(x, y \pm k, z)$, $(x, y, z \pm l)$, etc. Or on y parviendra simplement, avec des erreurs relatives de l'ordre de h^2, k^2, l^2, hk, ... seulement, en remplaçant dans l'équation aux dérivées partielles proposée, spécifiée pour un point quelconque (x, y, z) du réseau, les dérivées de u en x, y, z par leurs expressions très approchées, rapports de différences finies relatives à $\Delta x = h$, $\Delta y = k$, $\Delta z = l$, ou à $\Delta x = 2h$, $\Delta y = 2k$, $\Delta z = 2l$, ..., dans les numérateurs desquels on aura soin d'introduire autant de valeurs de la fonction prises *au delà* de celle qui correspond à (x, y, z), que de valeurs prises *en deçà*, conformément aux indications du n° 96* (t. I,

p. 132*). Par exemple, u_{-1}, u, u_1 désignant les trois valeurs de la fonction en $(x-h, y, z)$, (x, y, z) et $(x+h, y, z)$, on aura très sensiblement

$$(1) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{u_1 - u_{-1}}{2h}, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u_1 - 2u + u_{-1}}{h^2}, \qquad \ldots$$

Il est clair qu'en opérant de la sorte pour tous les points *intérieurs* du réseau, c'est-à-dire pour tous les points (x, y, z) en ayant d'autres autour d'eux, on formera une équation propre à définir, pour ces points, avec une erreur relative aussi faible qu'on le voudra, $\frac{du}{dt}$ ou $\frac{d^2u}{dt^2}$, en fonction linéaire de la valeur correspondante de u et des valeurs de u aux points du réseau environnants; d'où résultera, en tout, un système d'équations différentielles linéaires avec t pour variable indépendante unique, mais avec un nombre de fonctions inconnues égal au nombre *total* de points du réseau, alors que celui des équations sera le nombre des points *intérieurs* seuls.

Voilà justement pourquoi une condition spéciale à la surface limite, c'est-à-dire une équation pour chaque point *superficiel,* devra s'adjoindre à l'équation indéfinie, si l'on veut que la suite des valeurs de u, à partir d'un *état initial* donné concernant, par exemple, l'époque $t=0$, se trouve déterminée dans toute l'étendue du réseau, c'est-à-dire du corps. D'ordinaire, cette condition spéciale sera une relation entre t, x, y, z, u et, de plus, les dérivées premières de u, qui deviendront simplement ici, à fort peu près, les rapports à $\pm h$, $\pm k$ ou $\pm l$, de la différence existant entre u au point superficiel considéré du réseau et u au point intérieur le plus proche situé sur la même file parallèle aux x, aux y, ou aux z. Une telle relation permettra donc d'éliminer du système d'équations différentielles les valeurs de u relatives à la surface; ce qui réduira bien le nombre des fonctions inconnues à celui des équations différentielles en t, ou des points intérieurs.

La même transformation montre que, si l'équation indéfinie était du quatrième ordre en x, y, z ou qu'il fallût, pour y exprimer sensiblement les dérivées de u en x, y, z au moyen de différences finies, employer, outre la valeur de u au point considéré, *deux* valeurs de u *au delà* et *deux en deçà,* il y aurait, non pas seulement la couche la plus superficielle des points du réseau, mais encore la couche située immédiatement au-dessous, dont les changements élémentaires d'état ne se trouveraient pas déterminés par l'équation indéfinie. Donc *il faudrait*, non plus une seule condition à la surface, mais *deux, par*

fonction inconnue, pour achever la mise en équation du problème ou compléter l'enchaînement des états physiques à partir d'un état initial donné. Ce cas, assez rare, a lieu dans l'étude de la flexion des tiges et plaques élastiques, où se présentent, en effet, deux conditions distinctes aux limites.

Toutefois, comme une petite erreur relative subsiste dans chacune des équations différentielles en nombre immense ainsi extraites d'une équation aux dérivées partielles donnée, ou que les valeurs de la fonction *continue* u de x, y, z, t, aux divers points (x, y, z) du réseau, ne les vérifient qu'à très peu près, il n'est pas *a priori* certain que ces valeurs restent presque identiques à des fonctions de t déterminées *uniquement,* à partir d'un même état initial, au moyen de ce système d'équations différentielles *regardées comme rigoureuses,* vu surtout l'excessive grandeur, comparable à $\frac{1}{h^2}$, $\frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{l^2}$, des coefficients qui y affectent les fonctions inconnues [d'après les seconds membres de la deuxième (1) et des relations analogues].

On peut, en effet, remarquer, sur la solution générale $u = ce^{\alpha t}$ de la simple équation linéaire $\frac{du}{dt} - \alpha u = 0$, quand α désigne un coefficient constant énorme, combien cette grandeur des coefficients rend sujettes à une variation rapide les fonctions inconnues. Aussi y aura-t-il une condition, évidemment nécessaire et suffisante, que devront vérifier les fonctions u satisfaisant aux équations différentielles formées, pour que leur ensemble puisse être censé définir une fonction continue u de x, y, z, t et constitue l'intégrale demandée de l'équation aux dérivées partielles : ce sera que, pour des points (x, y, z) du réseau très voisins, elles restent elles-mêmes très voisines et présentent ainsi *constamment,* de l'une à l'autre, des différences finies propres à devenir, à la limite, des différentielles en x, y, z. Autrement dit, *pour que le système d'une infinité d'équations différentielles en t, formé au moyen d'une équation indéfinie aux dérivées partielles en x, y, z, t et de conditions définies ou relatives à la surface d'un corps, soit l'équivalent de cette équation et de ces conditions, il faut qu'il ait été composé de manière à assurer par lui-même la conservation, à toute époque t, de la continuité ou variation graduelle de la fonction inconnue entre points du réseau voisins;* ce que fait implicitement l'équation aux dérivées partielles, où la présence de dérivées en x, y, z oblige d'admettre l'existence de ces dérivées.

Sans doute, il est probable que nos équations différentielles, formées

en employant des valeurs comme (1), *ou de deuxième approximation* (t. I, p. 133*), des dérivées en x, y, z, satisfont à cette condition de continuité [1]. Mais une étude approfondie, qui manque encore à la science, serait nécessaire pour s'en assurer. Jusqu'à ce que cette étude ait été faite, l'intuitive conversion, expliquée ici, d'une ou de plusieurs équations aux dérivées partielles en un système d'une infinité d'équa-

---

[1] Il est facile de reconnaître que des expressions *de première approximation seulement,* obtenues, pour les dérivées dont il s'agit, en ne prenant, par exemple, que les valeurs de u relatives au point considéré et à d'autres situés tous *au delà* (ou ayant leurs coordonnées plus grandes), seraient *généralement* insuffisantes, *dans les équations indéfinies,* faute de sauvegarder la graduelle variation de u entre endroits voisins. Cela est évident au point de vue physique. Car, par exemple, dans l'équation (84) [p. 358*] des cordes vibrantes, écrite $\frac{d^2u}{dt^2} - a^2\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, de telles expressions ne feront dépendre les variations de u avec le temps, en un point quelconque $x = c$, que des états physiques produits, à l'époque $t = 0$, *aux points dont les abscisses x excèdent c*; conséquence revenant à nier toute propagation du mouvement *vers les x positifs.* L'intervention de valeurs, comme u_{-1}, prises *en deçà* de celle, u, que l'on considère, est donc aussi nécessaire, dans l'expression des dérivées en x, y, z par des rapports de différences finies, que celle de valeurs prises au delà, comme u_1; et, cela, afin d'exprimer autant l'influence, sur la particule située en (x, y, z), des particules *précédentes,* que celle des *suivantes.*

La manière dont se produirait alors la discontinuité de u entre points voisins se voit très simplement sur l'équation du premier ordre $\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx} = 0$, quand on croit pouvoir ainsi la remplacer, pour chaque point $x = x$, par l'équation différentielle $\frac{du}{dt} + \frac{u_1 - u}{h} = 0$. Soit, en effet, à l'époque $t = 0$, u nul depuis $x = c + h$ jusqu'à $x = \infty$, mais extrêmement peu différent de zéro au point $x = c$. Pour $t > 0$, les équations différentielles substituées de la sorte à l'équation aux dérivées partielles donneront identiquement, de proche en proche, $u = 0$, en tous les points $x = c + h$, $x = c + 2h$, ... Mais, au point même $x = c$, où la valeur initiale u_0 de u différera de zéro, l'équation différentielle, réduite à $\frac{du}{dt} - \frac{u}{h} = 0$ *par l'annulation de u_1*, donnera $u = u_0 e^{\frac{t}{h}}$, valeur croissante, à partir de $t = 0$, avec une rapidité *infinie,* quand l'intervalle h de deux points consécutifs devient *infiniment petit.* Donc, au bout d'un temps très court, la *graduelle* variation de u aura cessé d'exister entre $x = c$ et $x = c + h$, toutes les fois du moins que la valeur initiale u_0 de u, pour $x = c$, sera comparable à une puissance h^m de h, c'est-à-dire, d'un ordre assignable de petitesse par rapport à la distance, h, de ce point $x = c$, d'avec la région, commençant à $x = c + h$, où u_0 s'annule. Une telle rupture de la continuité, pour $x = c$, était inévitable, puisque l'intégrale générale $u = f(x - t)$ de l'équation aux dérivées partielles proposée exprime une propagation des valeurs de u vers les x positifs, incompatible avec la forme approchée que l'on a choisie des équations différentielles.

tions différentielles, précieuse pour indiquer le nombre des relations définies (ou à la surface) indispensables à la détermination des problèmes, ne fournira, à cet égard, qu'une forte induction et aura besoin d'être complétée, pour chaque catégorie de problèmes, par une démonstration spéciale.

441*. — Démonstration, par des procédés spéciaux, de la détermination des problèmes de Physique mathématique.

Ces procédés spéciaux, dont le détail appartient aux diverses branches de la Physique mathématique, présentent cependant quelques particularités communes, qu'il est bon de signaler ici. Ils consistent, u, v, w, ... désignant les fonctions inconnues de x, y, z, t, à remplacer, dans les équations des problèmes, les résultats u, v, w, ... que fournit une première solution supposée, par des sommes de la forme $u+u_1$, $v+v_1$, $w+w_1$, ..., où u_1, v_1, w_1, ... désignent ainsi ce qu'il faudrait ajouter à ces premiers résultats pour vérifier les équations, si l'on pouvait le faire autrement que dans l'hypothèse $u_1=0$, $v_1=0$, $w_1=0$, ..., et à démontrer alors, par des intégrations embrassant toute l'étendue du système matériel dans lesquelles joue un grand rôle la réduction à des intégrales aux limites exposée au n° 313* (p. 93*), que les équations transformées en u_1, v_1, w_1, ... donnent $u_1=0$, $v_1=0$, $w_1=0$, ... Le succès de ces méthodes tient essentiellement à ce que les coefficients des équations proposées ont soit les signes, soit (entre eux) les rapports, nécessaires pour que les expressions amenées sous les symboles $\int$ se trouvent exactement décomposables en parties toutes de même signe, en carrés par exemple, dont l'annulation résulte de celle de leur somme. Or, bien que ces signes et ces rapports mutuels des coefficients résultent toujours de propriétés physiques évidentes (telles que sera, dans l'étude des petites oscillations, la stabilité même de l'état permanent autour duquel elles se produiront), néanmoins leur existence n'est généralement pas indispensable à la détermination des problèmes ; en sorte que les méthodes dont il s'agit, excellentes au point de vue physique, présentent l'inconvénient d'être moins générales ou moins étendues que le résultat mis en évidence par elles.

Comme exemple simple, soit à déterminer, dans toute l'étendue ϖ d'un corps, une seule fonction φ de x, y, z, t, régie par l'équation indéfinie du second ordre $\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\Delta_2\varphi=0$, avec cette condition, spéciale à la surface σ du corps, que, à l'approche de l'un quelconque $d\sigma$ de ses

éléments, la dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ de φ le long d'un chemin dn aboutissant normalement à $d\sigma$ et ayant pour cosinus directeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, admette une expression de la forme

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{dn} = -k^2\varphi - \mathrm{K}^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{une fonction donnée de } x, y, z, t,$$

où k^2, K^2 désignent des fonctions positives et données, d'ailleurs quelconques, de x, y, z, t. Enfin, l'état initial consiste en ce que, pour $t=0$, φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ soient des fonctions arbitraires connues de x, y, z.

Substituons $\varphi + \varphi_1$ à φ; et il viendra, en φ_1, les relations

$$(3) \quad (\text{dans toute l'étendue } \varpi) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \Delta_2\varphi_1 = 0 \\ \text{ou} \\ \dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \dfrac{d^2\varphi_1}{dx^2} - \dfrac{d^2\varphi_1}{dy^2} - \dfrac{d^2\varphi_1}{dz^2} = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad \left(\begin{array}{c}\text{à la surface}\\ \sigma \text{ de } \varpi\end{array}\right) \quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dn} \quad \text{ou} \quad \dfrac{d\varphi_1}{dx}\cos\alpha + \dfrac{d\varphi_1}{dy}\cos\beta + \dfrac{d\varphi_1}{dz}\cos\gamma \\ \qquad\qquad = -k^2\varphi_1 - \mathrm{K}^2\dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2}, \end{cases}$$

$$(5) \qquad (\text{pour } t=0) \quad \varphi_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = 0.$$

Multiplions la seconde (3) par $\varphi_1\,d\varpi$ et intégrons chacun des quatre termes du premier membre dans toute l'étendue ϖ, après avoir transformé les trois derniers en substituant, par exemple, à $-\varphi_1\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}$, l'expression équivalente $-\frac{d}{dx}\left(\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi_1}{dx}\right)^2$, dont la première partie, multipliée par $d\varpi$ et intégrée, comportera l'emploi d'une des formules (22) du n° 313* (p. 93*). Les trois intégrales ainsi réduites à des sommes prises sur la surface σ auront pour total

$$-\int_\sigma \varphi_1\left(\frac{d\varphi_1}{dx}\cos\alpha + \frac{d\varphi_1}{dy}\cos\beta + \frac{d\varphi_1}{dz}\cos\gamma\right)d\sigma$$

ou, d'après (4), $\int_\sigma\left(k^2\varphi_1^2 + \mathrm{K}^2\varphi_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}\right)d\sigma$; et il viendra enfin, en nous rappelant que $\frac{d\varphi_1^2}{dx^2} + \frac{d\varphi_1^2}{dy^2} + \frac{d\varphi_1^2}{dz^2}$ est le carré du paramètre différentiel

du premier ordre $\Delta_1 \varphi_1$,

$$(6) \quad \int_{\varpi}\left[\varphi_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + (\Delta_1\varphi_1)^2\right] d\varpi + \int_{\sigma}\left[\mathrm{K}^2\varphi_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + k^2\varphi_1^2\right] d\sigma = 0.$$

Or, dans le premier membre, tous les éléments des intégrales sont essentiellement positifs, du moins à l'instant où, t s'éloignant de zéro pour devenir soit positif, soit négatif, φ_1 et $\frac{d\varphi_1}{dt}$ cesseraient de garder leurs valeurs zéro relatives, en vertu de (5), à l'époque où t s'annule. A un tel moment, en effet, la quantité naissante $\frac{d\varphi_1}{dt}$ prendrait, pour t croissant, même signe que sa dérivée $\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$ et, pour t décroissant, signe contraire; de sorte que, φ_1 se comportant de même par rapport à sa dérivée $\frac{d\varphi_1}{dt}$, les deux facteurs du produit $\varphi_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$ auraient même signe. Donc alors le premier membre de (6) dépasserait le second membre zéro, ce qui est impossible. Ainsi, le premier membre de (6) est nul; d'où il suit bien que les relations (3), (4), (5), impliquant (6), donnent identiquement $\varphi_1 = 0$: ce qu'il fallait démontrer.

Si l'équation indéfinie, contenant, ainsi que la relation (2), la dérivée première de φ en t au lieu de la dérivée seconde, devenait $\frac{d\varphi}{dt} - \Delta_2\varphi = 0$, cas où l'état initial ne comprendrait que les valeurs de φ pour $t = 0$, et si, plus généralement, le premier membre de l'équation indéfinie se composait, à part le terme triple $-\Delta_2\varphi$, de deux termes proportionnels respectivement aux deux dérivées première et deuxième de φ en t *avec des coefficients positifs,* que, d'ailleurs, le second membre de la relation définie (2) s'accrût d'un terme en $\frac{d\varphi}{dt}$, *affecté d'un coefficient négatif* comme $-\mathrm{K}^2$, la démonstration précédente subsisterait sans changement, *à condition de ne l'employer que pour les valeurs de t positives.* Donc le système d'équations ainsi posé déterminerait pleinement une suite d'états physiques exprimés par la fonction φ et *succédant* à un état initial arbitrairement donné.

Les mêmes procédés s'appliquent aux états permanents, pour lesquels les fonctions inconnues $u, v, w, \ldots$ deviennent indépendantes de t, et ils servent à démontrer jusqu'à quel point les conditions posées les déterminent, savoir, presque toujours, d'une manière complète. C'est bien ce qu'indiquait déjà, à un point de vue général, la conversion des relations données, tant indéfinies que définies, en une infinité d'équations différentielles linéaires, devenues maintenant, par l'annu-

lation des dérivées de u, v, w, ... en t, un système d'équations algébriques du premier degré en nombre égal à celui des inconnues, ou comportant d'ordinaire une solution parfaitement définie. Et l'on pourrait induire aussi la même détermination, de ce fait que, dans l'hypothèse simple d'un corps présentant un état permanent fonction seulement de x, entre deux limites x_0, x_1, les équations indéfinies se réduisent à de simples équations différentielles en x, dont l'intégrale se spécifie par autant de conditions que l'indique leur ordre, généralement identique à celui même, en x, y, z, des équations aux dérivées partielles du problème général. Donc, s'il y a, par exemple, une seule équation indéfinie et, par conséquent, une seule inconnue, une condition à chacune des deux limites x_0, x_1 du corps suffira quand cette équation sera du second ordre en x, tandis qu'il en faudrait deux si elle était du quatrième ordre, etc.

Mais les procédés spéciaux de démonstration indiqués ici sont bien plus précis, comme on le voit aisément sur les fonctions φ dont il vient d'être question [1]. Proposons-nous, en effet, de déterminer l'une quelconque d'entre elles, sous la condition de ne pas dépendre du temps t, par l'équation indéfinie correspondante, que cette condition réduit, dans tous les cas considérés ci-dessus, à $\Delta_2 \varphi = 0$, et par la relation définie (2), où nous supposerons k^2, avec le dernier terme, indépendants de t, et où le terme en K^2 sera nul à cause de son facteur $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, comme le serait le terme en $\frac{d\varphi}{dt}$ si cette relation en contenait un. Il viendra, après avoir remplacé φ par $\varphi + \varphi_1$, les équations $\Delta_2 \varphi_1 = 0$, dans toute l'étendue ϖ, et $\frac{d\varphi_1}{dn} = -k^2 \varphi_1$ à la surface σ, relations évidemment comprises dans (3) et (4), où il suffit de supposer φ_1 indépendant de t pour les en extraire. Par suite, la formule (6) se trouvera maintenant réduite à $\int_\varpi (\Delta_1 \varphi_1)^2 d\varpi + \int_\sigma k^2 \varphi_1^2 d\sigma = 0$.

Il en résultera l'annulation nécessaire de $\Delta_1 \varphi_1$, c'est-à-dire la constance de la fonction φ_1, dans tout l'espace ϖ; et, si le coefficient donné k^2 n'est pas nul sur toute la surface, on devra même poser $\varphi_1 = 0$, ou

---

[1] On peut en dire autant de certaines démonstrations directes non plus de l'*unité*, mais de l'*existence* même de la solution qu'admettent ces sortes de problèmes d'état permanent. Nous en donnerons une idée dans la L^e Leçon, en étudiant les minima des intégrales définies. En effet, la solution dont il s'agit rend minima certaines sommes d'intégrales définies comme celles qui figurent ici dans (6), (7), etc.

annuler la valeur constante de φ_1, sans quoi le terme en $\int_\sigma$ serait supérieur à zéro. Donc il n'y a qu'un état permanent φ possible à moins que k ne s'annule identiquement, cas où tous les états permanents possibles sont exprimés par $\varphi +$ une constante arbitraire.

Dans certaines circonstances, il n'est même pas besoin, pour déterminer la forme d'une fonction de point φ, d'adjoindre à l'équation indéfinie des conditions précises aux limites, c'est-à-dire des conditions représentées par des égalités à termes finis : des données assez vagues y suffisent parfois. Si, par exemple, la fonction φ, continue dans tout l'espace, ainsi que ses dérivées premières, satisfait à l'équation $\Delta_2\varphi = n^2\varphi$, où n^2 est une fonction positive quelconque de x, y, z, il suffira que φ ne grandisse pas indéfiniment aux distances infinies de l'origine, c'est-à-dire ne dépasse *nulle part* une valeur absolue finie M (en appelant ainsi la plus forte qu'elle atteigne ou vers laquelle elle tende), pour se réduire partout à une constante, et même à zéro si n^2 ne s'annule pas identiquement, ou que l'équation indéfinie soit bien $\Delta_2\varphi = n^2\varphi$ et non $\Delta_2\varphi = 0$.

C'est évident quand φ dépend d'une seule coordonnée, x, et que n a une valeur constante : car l'équation indéfinie, alors de l'une des deux formes $\varphi'' = 0$, $\varphi'' = n^2\varphi$, donne pour φ soit une fonction linéaire de x, soit la somme de deux termes respectivement proportionnels à e^{nx} et à e^{-nx}, infinis, l'un, pour $x = \infty$, l'autre, pour $x = -\infty$, si leurs coefficients ne sont pas nuls; en sorte qu'il ne peut y subsister qu'un terme ou constant, ou nul, lorsque φ ne doit nulle part dépasser une valeur absolue finie M.

Pour reconnaître qu'il en est de même avec n variable et sans avoir besoin de supposer *a priori* φ indépendant de y et z, multiplions par $\varphi d\varpi$ l'équation $\Delta_2\varphi = n^2\varphi$, puis intégrons le résultat dans tout l'espace ϖ qu'entoure une sphère $\sigma = 4\pi r^2$ décrite, d'un rayon quelconque r, autour d'un point également quelconque. En traitant l'intégrale $\int_\varpi \varphi\Delta_2\varphi\, d\varpi$ comme $\int_\varpi \varphi_1\Delta_2\varphi_1\, d\varpi$ tout à l'heure, et observant qu'une normale dn, menée à un élément quelconque $d\sigma$ de la surface vers l'extérieur de ϖ, est ici le prolongement dr d'un rayon r de la sphère, il viendra aisément

$$(7) \qquad \int_\sigma \varphi \frac{d\varphi}{dr}\, d\sigma = \int_\varpi (\Delta_1\varphi)^2\, d\varpi + \int_\varpi n^2\varphi^2\, d\varpi > 0.$$

Or cette relation, où $\varphi \dfrac{d\varphi}{dr} = \dfrac{1}{2}\dfrac{d\,\varphi^2}{dr}$, montrant que le premier membre

est positif, exige évidemment que l'on ait $\int_\sigma \frac{d.\varphi^2}{dr} d\sigma > 0$, ou $\int_\sigma \frac{d.\varphi^2}{dr} \frac{d\sigma}{\sigma} > 0$, ou enfin

$$(8) \qquad \frac{d}{dr} \int_\sigma \varphi^2 \frac{d\sigma}{\sigma} > 0,$$

si l'on considère des sphères concentriques de rayons croissants, avec éléments $d\sigma$ (normaux aux mêmes droites r prolongées) proportionnels aux surfaces totales σ, en sorte que $\frac{d}{dr}\left(\frac{d\sigma}{\sigma}\right) = 0$.

Donc la valeur moyenne de φ^2 sur chaque sphère σ, ou à chaque distance r tout autour d'un même point quelconque, croît avec cette distance, *si toutefois elle est variable.* Et comme on peut choisir pour centre un point où la valeur absolue de φ soit, pour ainsi dire, infiniment peu au-dessous de la limite supérieure assignée M, de manière à rendre, tout autour, un accroissement sensible de φ^2 impossible, la valeur moyenne $\int_\sigma \varphi^2 \frac{d\sigma}{\sigma}$ se trouvera astreinte à y égaler constamment M^2, sauf écarts infiniment petits; d'où résultera l'impossibilité, pour φ^2, d'être, sur aucune partie sensible de σ, notablement au-dessous de M^2, puisque aucun excédent $\varphi^2 - M^2$ ne pourrait, sur d'autres parties de σ, compenser un tel déficit $M^2 - \varphi^2$ appréciable. On aura donc partout $\varphi^2 = \text{const.}$, ou $\varphi = \text{const.}$; et, si n^2 n'est pas nul, l'équation $\Delta_2\varphi = n^2\varphi$, réduite ainsi à $0 = n^2\varphi$, donnera même $\varphi = 0$.

Par exemple encore, si une fonction φ de x, y, z, satisfaisant à la même équation $\Delta_2\varphi = n^2\varphi$, est continue, avec ses dérivées premières, dans tout un angle solide ou espace conique quelconque (ce qui comprend le cas de l'espace limité d'un côté par un plan et indéfini dans les autres sens), que, de plus, cette fonction tende vers zéro aux distances r infinies du sommet de la surface conique (ou d'un point du plan), il suffira qu'une condition spéciale à cette surface donne, suivant tout chemin infiniment petit dn y aboutissant normalement de l'intérieur, l'inégalité $\varphi \frac{d\varphi}{dn} \leqq 0$, ou $\frac{d.\varphi^2}{dn} \leqq 0$, pour qu'il en résulte nécessairement $\varphi = 0$ partout. En effet, l'équation $\Delta_2\varphi = n^2\varphi$, multipliée par $\varphi\, d\varpi$ et intégrée, de la même manière que tout à l'heure, dans tout un secteur sphérique ϖ, de rayon quelconque r, limité latéralement à la surface conique, donnera, en appelant σ' la portion interceptée de cette surface et σ la portion analogue de la sphère,

$$(9) \qquad \int_\sigma \varphi \frac{d\varphi}{dr} d\sigma + \int_{\sigma'} \varphi \frac{d\varphi}{dn} d\sigma' = \int_\varpi (\Delta_1\varphi)^2 d\varpi + \int_\varpi n^2\varphi^2 d\varpi > 0.$$

Par suite, chaque élément de l'intégrale $\int_{\sigma'}$ étant, par hypothèse, ou négatif ou nul, il vient $\int_\sigma \varphi \frac{d\varphi}{dr} d\sigma > 0$; d'où résultera, comme ci-dessus, la relation (8). Ainsi, la fonction essentiellement positive $\int_\sigma \varphi^2 \frac{d\sigma}{\sigma}$ grandira avec r ou, du moins, ne décroîtra pas; et, comme on la suppose astreinte à s'annuler pour r infini, elle ne pourra qu'être nulle identiquement.

442*. — Résolution générale des problèmes concernant l'état variable des corps, par la superposition d'une infinité de solutions simples, affectées, chacune, d'une constante arbitraire.

Quant à l'intégration des équations aux dérivées partielles régissant les états ou variables, ou permanents, d'un corps de dimensions finies, on ne sait, en général, l'effectuer qu'en séries d'une certaine forme, comme vont l'indiquer quelques aperçus, relatifs d'abord aux états variables.

Supposons donc que les fonctions u, v, w, ... à déterminer ne dépendent pas seulement des coordonnées x, y, z, mais aussi du temps t; et commençons par considérer non pas, tout de suite, les équations aux dérivées partielles du problème, mais des équations différentielles linéaires, en nombre immense, revenant au même à la limite où u, v, w, ... deviennent continus en x, y, z, soit celles qui régissent les particules effectives du corps et que l'on a condensées dans les équations aux dérivées partielles, soit, au contraire, les équations différentielles plus simples déduites de celles-ci et relatives à des réseaux de points rangés par files parallèles aux x, y, z. Dans les deux cas, les intégrales des équations différentielles linéaires en t, c'est-à-dire les valeurs de u, v, w, ... pour les particules ou les points dont il s'agit, seront, d'après les démonstrations des n°s 407* à 412* (pp. 276* à 297*) et comme il a été rappelé au commencement de cette Leçon (p. 374*), des sommes de solutions simples ou doubles d'une forme déterminée.

Par exemple, si l'on étudie les petits mouvements des particules d'un corps élastique autour de leurs situations d'équilibre stable, cas où les seules dérivées en t figurant dans les relations sont du second ordre, les expressions des déplacements u, v, w éprouvés suivant les axes, et même, du moins dans les cas usuels, celle de la fonction auxiliaire φ de x, y, z, t à laquelle le procédé d'élimination du n° 438* (p. 369*) ramènera leur calcul, se composeront uniquement de solutions *doubles*

(p. 286*), produits respectifs d'une fonction commune, en t, de la forme $C\cos(\beta t - c)$, par des coefficients λ, μ, ... propres aux fonctions inconnues de t, savoir u, v, w, φ spécifiées pour les divers points matériels (x, y, z) dont on s'occupe; et ces coefficients, ainsi que la constante corrélative β, dépendront de la nature du système, non de son état initial (relatif à $t=0$), qui influera seulement sur C et c. Nous avons vu d'ailleurs (p. 287*) qu'il était plus simple de décomposer l'intégrale générale en deux, correspondant, l'une, aux déplacements initiaux effectifs, mais avec vitesses initiales nulles, l'autre, aux vitesses initiales effectives avec déplacements initiaux nuls, et que ces deux intégrales particulières se formaient séparément par superposition de solutions non plus doubles, mais simples, produits de λ, μ, ... par $C\cos\beta t$, pour la première, et par $\frac{C}{\beta}\sin\beta t$ pour la seconde.

Nous avons reconnu aussi (p. 288*) que, lorsque, au lieu des petits mouvements d'un corps élastique, où les équations en u, v, w et, par suite, en φ, contiennent uniquement, par rapport au temps, des dérivées paires comme $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, il est question d'états physiques (tels que la température d'un solide) obéissant aux mêmes relations modifiées par les changements de $\frac{d^2(u, v, w)}{dt^2}$ en $\frac{d(u, v, w)}{dt}$ et de $\frac{d^{2n}\varphi}{dt^{2n}}$ en $\frac{d^n\varphi}{dt^n}$, l'intégrale générale se compose des mêmes solutions simples, où, seulement, $Ce^{-\beta^2 t}$ tient la place soit de $C\cos\beta t$, soit de $\frac{C}{\beta}\sin\beta t$.

Or il est naturel d'admettre que l'hypothèse d'un rapprochement de plus en plus grand des particules (x, y, z) avec graduelle variation, de l'une à l'autre, de leur état physique, qui donne à la limite les équations aux dérivées partielles proposées au lieu d'équations différentielles, amène aussi la même continuité en x, y, z dans les solutions simples ou doubles de ces dernières, c'est-à-dire, par exemple, la graduelle variation, entre particules voisines, des coefficients λ, μ, ..., par lesquels se distingue chaque fonction u, v, w, φ aux *divers* endroits. Ou, du moins, il est naturel que les solutions simples dans lesquelles ces coefficients λ, μ, ..., relatifs à une même fonction u, ou v, ou w, ou φ, différeraient notablement pour des points très voisins, soient annihilées par un coefficient C insensible, dans l'expression des états physiques dont on s'occupe. Pour qu'elles eussent réellement à figurer, il faudrait, sans doute, considérer des phénomènes d'une rapidité de variation analogue à la leur, tels que doivent être, par exemple, les détails des imperceptibles mouvements calorifiques dans un solide à très basse température (seul cas où l'on puisse avec

vraisemblance supposer réductibles à la forme linéaire les équations de ces mouvements et leur appliquer les intégrales en question). On ne conçoit pas, en effet, que de telles solutions simples, affectées d'ondulations ou d'inégalités dans les plus imperceptibles espaces, concourent, pour une part appréciable, à représenter des fonctions u, v, w, φ d'une nature toute différente, c'est-à-dire bien continues en x, y, z et sensiblement identiques pour une multitude de particules adjacentes.

Ainsi, l'on est conduit à admettre, d'une part, que les coefficients comme λ, μ, ... deviennent, dans l'expression de chaque fonction inconnue u, v, w ou φ, de t, x, y et z, une fonction continue, U, V, W ou Φ, de x, y et z, du moins tant qu'il s'agit de solutions simples utilisables pour l'intégration des équations aux dérivées partielles données; et, en deuxième lieu, que les constantes arbitraires C ou $\frac{C}{\beta}$, propres, en affectant les diverses solutions simples, à faire reproduire par leur ensemble un état initial *continu* en x, y, z, tendent assez vite vers zéro, quand on arrive aux solutions simples où varient très rapidement U, V, W, Φ, pour que les expressions totales de u, v, w, φ, de formes comme

$$(10)\quad (u, v, w, \varphi) = \sum (\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}, \Phi)\left(\mathrm{C}\cos\beta t,\ \text{ou}\ \frac{\mathrm{C}}{\beta}\sin\beta t,\ \text{ou}\ \mathrm{C}e^{-\beta^2 t}\right),$$

n'aient qu'un nombre restreint de termes *influents,* supposés rangés par ordre de rapidité croissante des variations de U, V, W, Φ. On conçoit d'ailleurs que le nombre de ces termes possibles, savoir, de tous ceux où U, V, W, Φ constituent bien des fonctions continues de x, y, z, soit illimité; car, à mesure que l'on multiplie le nombre des particules, ou celui des équations différentielles linéaires simultanées, pour faire tendre l'ensemble de ces dernières vers les équations proposées aux dérivées partielles, le nombre des solutions simples, ainsi que des racines $\pm\beta\sqrt{-1}$ de l'équation caractéristique, toutes dépourvues de partie réelle et ordinairement inégales (p. 285*), grandît à proportion.

Et comme les relations en φ, d'un ordre généralement plus élevé, soit par rapport à t, soit par rapport aux coordonnées, que ceux des relations en u, v, w, pourront donner pour β plusieurs séries distinctes de valeurs, correspondant, par exemple, à des vibrations de directions diverses, les unes longitudinales, les autres transversales, les premières ou les secondes tantôt suivant un seul sens, tantôt même suivant deux sens rectangulaires, bien irréductibles entre eux, etc., on sera ainsi conduit à développer la solution cherchée ou complète en un nombre fini de séries convergentes présentant la forme des seconds

membres de (10). Ces séries auront donc pour termes respectifs tout autant de *solutions simples,* affectées, chacune, non plus d'une fonction arbitraire, comme celles, *en nombre fini,* que nous appelions de ce nom dans la dernière Leçon (p. 361*), mais seulement d'une *constante arbitraire* C. On conçoit qu'une infinité de telles constantes C puissent rendre la solution partielle correspondant à chaque série, aussi indéterminée initialement que l'étaient, grâce à la fonction arbitraire dont elles se trouvaient affectées, les solutions *dites simples* de la dernière Leçon. Par suite, dans chacune de ces séries, la valeur de φ écrite (suivant la nature du problème) sous l'une des deux formes

$$\varphi = \Sigma\, C\Phi \cos\beta t, \qquad \varphi = \Sigma\, C\Phi e^{-\beta^2 t}, \tag{11}$$

et celle de $\frac{d\varphi}{dt}$ quand φ est

$$\varphi = \sum C\Phi\,\frac{\sin\beta t}{\beta}, \tag{12}$$

seront susceptibles, pour $t=0$, ou alors qu'elles se réduiront à $\Sigma\, C\Phi$, de coïncider avec la fonction arbitraire de x, y, z définissant l'état initial, censé connu, caractéristique de la solution particulière dont il s'agira.

443*. — Formation directe des solutions simples ; détermination de leurs coefficients respectifs, d'après l'état initial donné.

Effectivement, si nous substituons, à u, v, w, φ, des expressions de la forme $(U, V, W, \Phi)C\cos(\beta t - c)$, quand les équations linéaires aux dérivées partielles proposées, soit indéfinies, soit aux limites, ne contiennent que des dérivées d'ordres pairs $2n$ en t, et des expressions de la forme $(U, V, W, \Phi)Ce^{-\beta^2 t}$, quand ces dérivées sont remplacées par celles des ordres moitié moins élevés n, le facteur $C\cos(\beta t - c)$ ou $Ce^{-\beta^2 t}$ se retrouvera inaltéré dans tous les termes non affectés de pareilles dérivées en t, termes où ce seront U, V, W, Φ qui supporteront les différentiations en x, y, z ; et il reparaîtra encore, mais multiplié par $(-\beta^2)^n$, dans les autres termes, où, d'ailleurs, U, V, W, Φ ne seront pas différentiés, si ces termes contiennent des dérivées prises uniquement par rapport à t. Donc, après la suppression du facteur commun, t ne figurera nulle part dans les équations obtenues ; et celles-ci formeront, soit en U, V, W, soit seulement en Φ dont U, V, W dépendent, un système propre à déterminer ces quantités, et où les diverses solutions soit doubles, soit simples, que l'on veut obtenir se distingueront en général par tout autant de valeurs du carré β^2.

Il importe, sans entrer ici dans les détails, de voir que ce carré β^2 est déjà (par sa racine ou par lui-même) une sorte de mesure de la

rapidité de variation, avec le temps, de la solution double ou simple, dans laquelle t entre, en effet, par l'un des deux facteurs $\cos(\beta t - c)$, $e^{-\beta^2 t}$. Or on conçoit que la rapidité de variation, dans l'espace ou avec x, y, z, de U, V, W, Φ, se trouve en rapport avec cette rapidité de variation dans le temps et soit mesurée encore par β^2 ou par β : ce que montrent bien les équations indéfinies, où les termes contenant des dérivées, le plus souvent $2n^{\text{ièmes}}$, de U, V, W, Φ en x, y, z seront naturellement de l'ordre des termes contenant les produits de U, V, W, Φ par $(-\beta^2)^n$; en sorte que les rapports des dérivées $2n^{\text{ièmes}}$, d'ordinaire, aux fonctions, se trouveront mesurés par $(-\beta^2)^n$, comme il arrive justement quand ceux des dérivées premières, aux mêmes fonctions, le sont par β.

Donc la superposition de toutes les solutions simples obtenues donnera bien des séries réductibles aux formes (11) ou (12); et, de plus, les fonctions U, V, W, Φ variant d'une manière de moins en moins graduelle quand β grandit, il faudra ordonner ces séries, afin qu'elles convergent (d'après une induction précédente), suivant les valeurs absolues croissantes de β. Ces valeurs seront en nombre indéfini, et l'équation en β, pour admettre ainsi une infinité de racines, devra être transcendante. D'ailleurs, constituant la limite d'une équation caractéristique en β qui n'admettait que des racines réelles et, d'ordinaire, inégales, elle conservera naturellement les mêmes propriétés.

C'est bien, en effet, ce qui a lieu, comme il résulte de formules, appartenant au domaine propre de la Physique mathématique, pour la démonstration desquelles on recourt à la réduction, déjà employée au numéro 441* (p. 382*), de certaines intégrales prises dans toute l'étendue ϖ du corps, à d'autres qui ont pour champ ses limites. Il suffira ici de dire que, Φ et Φ' désignant deux quelconques des fonctions Φ, savoir, celles qui correspondent à deux racines β et β' de l'équation transcendante distinctes (en valeur absolue), et, de plus, $\rho(x, y, z)$ étant une certaine fonction de point essentiellement positive définie par la nature du corps, les équations dont il s'agit en comprennent toujours une dans le genre de $\int_\varpi \Phi\Phi'\rho\, d\varpi = 0$.

Il en résulte d'abord l'impossibilité de racines imaginaires β, β', auxquelles, en les choisissant conjuguées, correspondraient des expressions Φ, Φ' de la forme $\chi \pm \psi\sqrt{-1}$, c'est-à-dire conjuguées aussi, et dont le produit $\Phi\Phi'$ serait $\chi^2 + \psi^2$, c'est-à-dire essentiellement positif, contrairement à ce qu'implique l'équation $\int_\varpi \Phi\Phi'\rho\, d\varpi = 0$.

Mais on en déduit surtout la *séparation* et le calcul, par la méthode de Fourier (p. 161*), des coefficients arbitraires C, dans les relations d'état initial

$$(13) \qquad \Sigma \mathrm{C}\Phi = \text{des fonctions données } f(x, y, z).$$

Car celles-ci, multipliées par $\Phi\rho\, d\varpi$, puis intégrées dans toute l'étendue ϖ, ne conservent au premier membre que leur terme affecté de l'expression Φ entrant dans le multiplicateur choisi; et il vient

$$(14) \quad \mathrm{C}\int_\varpi \Phi^2 \rho\, d\varpi = \int_\varpi f(x, y, z)\Phi\rho\, d\varpi, \quad \text{ou} \quad \mathrm{C} = \frac{\int_\varpi f(x, y, z)\Phi\rho\, d\varpi}{\int_\varpi \Phi^2\rho\, d\varpi}.$$

Ainsi, une seule valeur est possible pour chaque coefficient C; et c'est d'une manière parfaitement unique ou déterminée, que l'état initial se décomposera en états initiaux fictifs répondant aux diverses solutions simples.

Enfin, tout en laissant les détails aux diverses branches de la Physique mathématique, ajoutons que, dans les cas relativement simples où les intégrations ont chance d'aboutir, les fonctions Φ sont les produits de facteurs dépendant, chacun, d'une seule coordonnée ou rectiligne, ou polaire, etc.

Pour fixer les idées, supposons que l'on ait comme équation en φ

$$(15) \qquad \text{soit} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Delta_2\varphi, \qquad \text{soit} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Delta_2\varphi,$$

et que, par suite, la substitution des valeurs simples $\varphi = \Phi\cos(\beta t - c)$, $\varphi = \Phi e^{-\beta^2 t}$ ait donné

$$(16) \qquad \Delta_2\Phi + \beta^2\Phi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\Delta_2\Phi}{\Phi} = -\beta^2.$$

Alors, s'il s'agit, par exemple, de corps rectangulaires, auxquels sont bien appropriées les coordonnées rectilignes x, y, z, on posera

$$(17) \qquad \Phi = \mathrm{XYZ},$$

en appelant X, Y, Z trois fonctions respectives de x seul, de y seul et de z seul, dont les dérivées secondes s'écriront X″, Y″, Z″. On aura donc

$$\Delta_2\Phi = \mathrm{YZX''} + \mathrm{ZXY''} + \mathrm{XYZ''};$$

et la relation (16) deviendra

$$(18) \qquad \frac{\mathrm{X''}}{\mathrm{X}} + \frac{\mathrm{Y''}}{\mathrm{Y}} + \frac{\mathrm{Z''}}{\mathrm{Z}} = -\beta^2.$$

Or on y satisfait en appelant l^2, m^2, n^2 trois constantes positives, à déterminer respectivement par les conditions relatives aux faces $(x, y, z) =$ const. du corps, et en faisant, avec $\beta^2 = l^2 + m^2 + n^2$,

$$(19) \qquad \frac{X''}{X} = -l^2, \qquad \frac{Y''}{Y} = -m^2, \qquad \frac{Z''}{Z} = -n^2,$$

équations simplement différentielles du second ordre qui donnent pour X, Y, Z des expressions de la forme

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} (X, Y, Z) = {} & (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \sin(lx, my, nz) \\ & + (\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1) \cos(lx, my, nz). \end{aligned} \right.$$

Si les coordonnées définitives à choisir devaient être moins simples que x, y, z et, par suite, quelqu'un au moins des facteurs à introduire dans Φ, plus compliqué qu'un simple sinus ou cosinus, il pourrait être bon de simplifier d'abord la forme de (16), en adoptant une nouvelle unité de longueur β fois plus petite, afin que, la valeur numérique de toutes les distances étant désormais β fois plus grande, les dérivées secondes en x, y, z de la fonction Φ de point et, par suite, son paramètre $\Delta_2\Phi$, devinssent β^2 fois moindres. La primitive valeur, figurant dans (16), de $\Delta_2\Phi$, aurait donc pour nouvelle expression $\beta^2\Delta_2\Phi$; et la relation (16) se réduirait à $\Delta_2\Phi = -\Phi$. Alors, pour un corps cylindrique de révolution autour de l'axe des z et une fonction Φ indépendante de z (ce qui constitue l'exemple le plus simple après celui d'un corps rectangulaire), l'adoption de coordonnées polaires r, θ conduirait à poser $\Phi = J(r)f(\theta)$ et, comme on a vu au n° 418* (p. 309*), d'une part, à faire $f(\theta)$ égal au cosinus ou au sinus d'une fonction linéaire de θ, d'autre part, à prendre pour $J(r)$ une fonction cylindrique.

Mais bornons-nous à un corps rectangulaire. Dans les cas les plus simples, sinon toujours les plus utiles, les conditions à la surface réduiront les expressions (20) de X, Y, Z, moyennant un choix convenable de l'origine des coordonnées, aux termes qui contiennent soit des sinus, soit des cosinus, et assigneront même comme valeurs, à l, m, n, la suite des multiples ou naturels ou impairs de trois constantes. Les sommes $\Sigma C\Phi$ seront donc les séries trigonométriques étudiées au n° 344* (p. 174*), suivant lesquelles on pourra, d'après les démonstrations de ce numéro ou des numéros précédents, développer dans toute l'étendue du corps les fonctions arbitraires $f(x, y, z)$ exprimant l'état initial.

Ainsi sera établie directement, pour ces cas les moins complexes, la possibilité de décomposer un tel état initial arbitraire en états initiaux

correspondant aux diverses solutions simples, et de telle manière qu'il y ait convergence, ou que les solutions simples à changements très rapides, caractérisées par les grandes valeurs de β, ne figurent que dans une proportion insignifiante, c'est-à-dire avec des coefficients C extrêmement faibles.

444*. — Difficultés subsistant encore dans cette question, et inconvénients de la solution indiquée.

Malheureusement, il n'est pas beaucoup de cas, en dehors de ceux-là, où ait pu encore réussir la vérification générale de la convergence, vers $f(x, y, z)$, des séries $\Sigma C\Phi$, dans lesquelles les coefficients C reçoivent les expressions données par la formule (14). C'est, il faut l'avouer, une lacune grave de la théorie, quoique les considérations synthétiques exposées tout à l'heure (p. 389*), confirmées d'ailleurs par certains exemples de calculs en partie numériques et en partie graphiques (mais toujours très laborieux) des développements dont il s'agit, dans un petit nombre de problèmes usuels où quelques résultats pouvaient être contrôlés autrement [1], mettent à peu près hors de doute la convergence effective de ces séries et leur égalité à $f(x, y, z)$.

Une démonstration rigoureuse de la parfaite légitimité de leur emploi devrait aussi avoir égard aux difficultés dont il a été question dans le n° 343* (p. 171*), qui proviennent de la variation de plus en plus rapide des termes éloignés, et de l'absence, en résultant assez souvent, de dérivées secondes en x, y, z pour les expressions développées (11) et (12) de φ. Des transformations de ces séries propres à les *uni-*

---

[1] On peut voir notamment, au LIXe Cahier (1890) du *Journal de l'École Polytechnique,* dans le Mémoire intitulé *Courbes représentatives des lois du choc longitudinal et du choc transversal des barres prismatiques, dressées par feu de Saint-Venant, publiées par M. Flamant,* la comparaison qu'a faite M. Flamant, pour le choc longitudinal, entre les résultats respectivement fournis, dans cette question, par l'intégration en série de solutions simples et par l'intégration finie. Le défaut, dont il sera parlé ci-après, de convergence des séries quand on doit les différentier une ou surtout plusieurs fois, y apparaît d'ailleurs, ainsi que dans le problème du choc transversal et dans d'autres de Mécanique physique, dès qu'il s'agit d'évaluer non les déplacements absolus, mais les *déformations,* mesurées proportionnellement par leurs dérivées ou premières, ou secondes, en x. Toutefois, l'absence complète de convergence ne s'y produit que dans les dérivées mêmes des déformations; ce qui l'entraîne pour toutes celles d'entre elles, et pour les dérivées secondes des déplacements relatives au temps t, que contiennent les équations indéfinies.

formiser, c'est-à-dire à les priver de leurs inégalités ou ondulations infiniment petites, mais infiniment rapides, seraient sans doute nécessaires, pour leur faire acquérir les dérivées que possèdent incontestablement les fonctions φ considérées en elles-mêmes ou non développées. A cet effet, l'on pourrait, par exemple, mais malheureusement au prix d'une complication assez grande, remplacer chaque terme des séries par sa valeur moyenne dans une très petite étendue constante de part et d'autre des valeurs actuelles ou considérées x, y, z des variables; substitution sans influence appréciable sur les termes sensibles, mais évidemment propre à effacer d'autant plus l'influence des inégalités affectant les petits termes très éloignés, que leurs périodes deviennent plus courtes.

Jusqu'à ce qu'on ait réussi à opérer assez simplement de telles transformations, il faudra, du moins quand les dérivées manquant aux séries (11) et (12) seront précisément celles que contiendront ou impliqueront les équations du problème, regarder les sommes Σ comme limitées à un nombre restreint de leurs termes, sans quoi leurs dérivées à considérer n'auraient pas de sens; et, alors, il sera convenu que l'on adopte, non pas précisément l'état initial donné, que représentent les fonctions $f(x, y, z)$, mais un autre extrêmement peu différent, représenté par les sommes $\Sigma C\Phi$, bornées aux termes dont il s'agit, dans lesquels les coefficients auront, à volonté, soit les valeurs (14), soit d'autres choisies de manière que la fonction $\Sigma C\Phi$ devienne, par exemple, identique à $f(x, y, z)$, en des points *repères* (x, y, z) régulièremeut distribués dans le corps et dont le nombre égalera celui même des coefficients C introduits. L'état initial *fictif* $\Sigma C\Phi$ ainsi formé sera, de toute manière, déduit par une sorte d'interpolation de l'état initial vrai; et il faudra s'assurer qu'il n'en diffère nulle part sensiblement. L'approximation sur cet état initial se trouvera, naturellement, d'autant plus grande, qu'on aura pris plus de coefficients C ou plus de points repères; et l'application de la solution approchée obtenue ainsi, au véritable phénomène que l'on a en vue, où l'état initial était représenté par la fonction $f(x, y, z)$, se fera en vertu du principe physique de graduelle variation, qui implique, sauf dans des cas singuliers, la quasi-identité des phénomènes, quand les circonstances qui les amènent sont presque identiques.

Ces difficultés, jointes à la longueur du calcul numérique des séries (11) et (12), devront en général faire préférer au procédé actuel les méthodes d'intégration sous forme finie, même plus compliquées en principe, exposées antérieurement (pp. 346* à 373*), dans les cas malheureusement rares qui en comporteront l'application.

145*. — Ses avantages, dans les cas où quelques-unes des solutions simples ont une influence prédominante; régularisation de certains phénomènes par extinction des termes à variation rapide.

L'inconvénient d'une variation non graduelle, ou affectée d'inégalités à trop courte période, dans les termes des séries (11) et (12) infiniment éloignés qui correspondent aux très grandes valeurs de β, devient insignifiant, pour les époques t positives, quand il s'agit de la seconde formule (11), où ces termes se trouvent multipliés par des exponentielles $e^{-\beta^2 t}$ évanouissantes dès que t dépasse zéro. Et si même le temps t devient assez grand, si, de plus, l'état initial n'a pas été choisi précisément de manière à annihiler le coefficient C du premier terme, la série $\Sigma C \Phi e^{-\beta^2 t}$ tout entière se réduira sensiblement à ce premier terme, que j'écrirai $C_0 \Phi_0 e^{-\beta_0^2 t}$, où figure la valeur de β la moins forte; car on voit que les termes suivants, en y supposant les facteurs $C\Phi$ aussi sensibles que dans le premier, seront, *comparativement à celui-ci*, des infiniment petits d'ordres $\beta^2 - \beta_0^2$ de plus en plus élevés, à raison des seconds facteurs $e^{-\beta^2 t}$ ou $(e^{-t})^{\beta^2}$. La fonction φ admettra donc l'expression asymptotique très simple $\varphi = C_0 \Phi_0 e^{-\beta_0^2 t}$, où, quand le temps grandit, les valeurs de φ décroissent sans cesse en conservant partout des rapports invariables, qui dépendent de la forme et de la nature du corps, mais nullement de l'état initial. Ainsi, *le phénomène se régularisera,* par l'évanouissement des termes autres que celui dont les variations d'un point à l'autre sont le plus lentes, ou, en quelque sorte, grâce à la neutralisation mutuelle des inégalités de l'état initial, de ses éléments discordants, affectés de multiples changements de signe, comme on le voit, pour les grandes valeurs de $\beta = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$, sur les expressions (20) des facteurs X, Y, Z de Φ.

Ce mode de régularisation par extinction des inégalités à courte période, que Fourier a découvert en étudiant la température des corps soumis à un refroidissement continu dans un milieu uniformément froid, s'applique sans doute à bien d'autres phénomènes, parmi lesquels il convient de remarquer la réduction à des ondes simples (*houle* et *clapotis*), sous l'influence des frottements, de l'agitation compliquée produite par le vent à la superficie des masses liquides.

Quand il s'agit, non plus de la deuxième formule (11), mais de la première (11) ou de (12), dont les seconds membres sont composés de termes périodiques par rapport à t, il n'y a pas, en général, de simplification analogue. Toutefois, le premier terme de la série, que l'on peut écrire $C_0 \Phi_0 \left(\cos \beta_0 t \text{ ou } \frac{\sin \beta_0 t}{\beta_0} \right)$, est fréquemment encore le

plus sensible et donne alors à lui seul une idée approximative de la fonction φ : il exprime, en Acoustique, le *son fondamental* du corps, c'est-à-dire le son dont la période de vibration $\frac{2\pi}{\beta}$ est la plus longue que puisse admettre dans le corps un mouvement simple, du moins de l'espèce proposée (longitudinal ou *tangentiel*, transversal ou *normal*, *tournant*, etc.).

D'ailleurs, ce qu'il importe surtout de connaître n'est, souvent, pas tant le mouvement même de la masse considérée que celui qu'il provoque ou *excite* dans d'autres corps et, spécialement, dans les diverses parties sensibles des organes par lesquels nous le percevons. Or, vu la petitesse des déplacements dont il s'agit et la forme linéaire qui en résulte pour leurs équations, les mouvements pendulaires ou simples exprimés par les divers termes des séries, en provoquent, dans chaque organe élémentaire, d'autres de même nature, qui s'y règlent d'après les lois de périodicité composée indiquées au n° 398 (p. 222), c'est-à-dire en se combinant par simple superposition, mais avec des amplitudes acquises d'autant plus grandes, comparativement à leurs valeurs dans les séries, qu'il y a moins de différence entre la période propre de vibration de l'instrument ou de l'organe et celle du mouvement excitateur simple considéré. Chacun des instruments ou des organes partiels mis en vibration pourra donc rendre sensible, en l'amplifiant beaucoup à l'exclusion des autres, un seul des termes notables de la série (11) ou (12) considérée, celui dont la période coïncidera, ou à fort peu près, avec la sienne, comme il arrive, par exemple, dans le cas des sons composés, où l'ouïe, grâce sans doute à l'ébranlement de tout autant de fibres organiques, distinctes, de l'oreille interne, parvient à discerner, outre le son fondamental du corps vibrant, les principaux *harmoniques* qui l'accompagnent.

Une telle circonstance confère, on le voit, une sorte d'existence propre, dans les *effets* produits, aux divers termes des séries (11) ou (12) et, par suite, une certaine valeur objective aux modes de développement employés, d'ailleurs si peu avantageux à d'autres points de vue.

446*. — Exemple d'états variables exprimés par des séries : corde vibrante fixée aux deux bouts, et refroidissement d'une barre par ses extrémités, maintenues à la température zéro.

Les deux exemples les plus simples que l'on puisse donner des théories précédentes sont, d'une part, celui d'une corde mince, de longueur a, tendue le long de l'axe des x entre ses deux extrémités fixes $x = 0$, $x = a$, et, qui, abandonnée à elle-même sans vitesse après avoir, pour

$t=0$, reçu dans le plan des xy une forme arbitraire légèrement courbe, vibre transversalement ou éprouve de petits déplacements suivant les y; d'autre part, l'exemple d'une barre conductrice, s'étendant encore de $x=0$ à $x=a$ et latéralement imperméable à la chaleur, lorsque, après avoir été initialement portée à des températures quelconques, elle se refroidit par ses deux bouts supposés sans cesse maintenus à la température zéro.

En appelant φ, dans ces questions, la fonction inconnue, déplacement ou température, à l'époque t, d'un tronçon infiniment court défini par son abscisse x, et en supposant choisie l'unité de temps propre à simplifier le plus possible les formules, l'équation indéfinie sera la première ou la seconde (15) [p. 392*], avec $\Delta_2\varphi$ égal simplement à $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$; car les variables x, y, z se réduiront à la coordonnée unique x. Et l'on aura, par suite, d'après les relations (16) à (20),

$$\Phi = X = \mathcal{A}\sin\beta x + \mathcal{A}_1\cos\beta x. \tag{21}$$

Quant aux conditions, de fixité ou de constance, spéciales aux deux limites $x=0$, $x=a$, elles reviendront évidemment à poser : 1° $\Phi=0$ (pour $x=0$) ou $\mathcal{A}_1=0$; 2° $\Phi=0$ (pour $x=a$) ou $\mathcal{A}\sin\beta a=0$, ce qui, vu l'impossibilité d'annuler $\mathcal{A}$ sans faire disparaître la solution simple, montre que l'équation transcendante en β sera $\sin\beta a=0$ et aura ses racines données par la formule générale $\beta=\frac{i\pi}{a}$, où i désigne successivement chacun des entiers non négatifs 0, 1, 2, 3, ... On satisfera donc à toutes les conditions que doit vérifier Φ en prenant $\Phi=\sin\frac{i\pi x}{a}$.

Enfin, les données d'état initial étant que

$$(\text{pour } t=0)\quad \varphi = \text{une fonction } f(x) \text{ donnée arbitrairement de } x=0 \text{ à } x=a.$$

avec la condition d'une dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$ (ou *vitesse*) nulle à l'époque $t=0$ dans le cas de la corde, il faudra s'en tenir à la solution (11) [p. 390*], où l'on déterminera les coefficients C de manière que $\Sigma\,C\Phi=f(x)$, ou que

$$\sum C\sin\frac{i\pi x}{a}=f(x),\qquad \text{depuis } x=0 \text{ jusqu'à } x=a. \tag{22}$$

Or la formule trigonométrique de Lagrange (43) [p. 167*] montre qu'il sera nécessaire et suffisant, pour cela, de poser

$$C=\frac{2}{a}\int_0^a f(\xi)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\,d\xi, \tag{23}$$

conformément à la règle indiquée par la formule (14) ci-dessus [p. 392*], où ρ égale ici 1, règle qu'on avait d'ailleurs suivie [p. 161*], pour obtenir la série de Fourier et, par suite, celle de Lagrange.

Dans le problème de la corde vibrante, la fonction ainsi trouvée φ est périodique en t, car les arcs βt y sont tous multiples du premier d'entre eux. De plus, elle ne contient x et t que par des produits, $2\sin\beta x\cos\beta t$, transformables en $\sin\beta(x+t)+\sin\beta(x-t)$, ou tous de la forme $F(x+t)+F(x-t)$; de sorte que la fonction φ elle-même admettra cette forme.

On le reconnaîtrait d'ailleurs directement, au moyen de l'intégrale en termes finis

$$\varphi = F_1(x+t)+F_2(x-t)$$

de l'équation aux dérivées partielles du problème, en utilisant la condition $\frac{d\varphi}{dt}=0$, ou $F'_1(x+t)-F'_2(x-t)=0$, pour $t=0$ (1); et l'autre condition d'état initial, $\varphi=f(x)$ pour $t=0$, complétée par les deux relations aux limites $\varphi=0$ (pour $x=0$ et $x=a$), déterminerait de plus, sans l'emploi d'aucune série, la fonction F, dont la valeur est simplement $\frac{1}{2}f$ entre les limites zéro et a de la variable, où f se trouve donnée. Le résultat obtenu, aisé à prévoir synthétiquement, consiste en ce que la corde proposée se comporte comme la portion, comprise entre les deux abscisses $x=0$ et $x=a$, d'une corde s'étendant de $x=-\infty$ à $x=\infty$ et qui, régie par la même équation indéfinie (15), aurait reçu initialement, sans vitesse, une forme symétrique par rapport aux deux points $x=0$ et $x=a$ de l'axe des x. En effet, aucune raison n'empêchant la même symétrie de subsister sans fin, les deux extrémités $x=0$, $x=a$ de la portion que l'on veut considérer se maintiendraient, d'elles-mêmes, fixes comme si la corde tout entière

---

(1) En effet, cette condition $F'_1(x)-F'_2(x)=0$ revient à poser

$$F_1(x)-F_2(x)=\text{une constante } 2c,$$

c'est-à-dire

$$F_1(x)-c=F_2(x)+c=\text{une même fonction } F(x),$$

ou

$$F_1(x)=F(x)+c,\qquad F_2(x)=F(x)-c.$$

L'expression générale $F_1(x+t)+F_2(x-t)$ de φ devient donc

$$\varphi=F(x+t)+F(x-t),$$

comme, du reste, on le déduirait directement de l'équation (98) de la dernière Leçon (p. 363*), où nos notations actuelles donneraient

$$\alpha=1,\qquad \beta=-1,\qquad f_1=0,\qquad f=F.$$

s'y terminait. La fonction f et, par suite, la fonction moitié moindre F, se déduiront ainsi, pour toutes les valeurs réelles de leur variable, de la partie de f directement donnée entre les limites $x = 0$, $x = a$.

Mais il n'y a pas lieu ici d'insister sur cette solution finie, surtout dans la présente Leçon, qui a pour but principal les solutions en série. Revenant donc aux expressions (11) de φ, particularisées pour $\Phi = \sin \beta x$ et $\beta = \frac{i\pi}{a}$, supposons, par exemple, la fonction $f(x)$ entière du second degré, ou, par suite, proportionnelle à $x(a-x)$, à cause des facteurs x, $a-x$, qu'elle doit admettre pour s'annuler aux deux extrémités $x = 0$, $x = a$; et, afin de simplifier autant que possible les formules, supposons choisie une unité de longueur telle, que l'on ait $a = \pi$. En mettant alors $f(x)$ sous la forme

$$k\frac{\pi}{8}(\pi x - x^2),$$

avec k constant, on pourra, au lieu de faire le calcul, d'ailleurs facile, du second membre de (23), utiliser le développement déjà obtenu (55) [p. 172*] de la fonction $\frac{\pi}{8}(\pi x - x^2)$ et prendre, par conséquent, C égal au produit de k soit par zéro, soit par $\frac{1}{i^3}$, suivant que i sera pair ou impair. Il viendra donc, en particulier, pour exprimer les formes successives de la corde vibrante, de longueur π, primitivement courbée suivant la parabole $y = k\frac{\pi}{8}x(\pi - x)$,

$$(24)\quad y \quad \text{ou} \quad \varphi = k\left(\frac{\sin x \cos t}{1^3} + \frac{\sin 3x \cos 3t}{3^3} + \frac{\sin 5x \cos 5t}{5^3} + \ldots\right).$$

La rapidité avec laquelle décroissent les inverses de 1^3, 3^3, 5^3, ..., dont le second n'est déjà plus que la 27e partie du premier, assure évidemment la prépondérance au premier terme de la série, c'est-à-dire au *son fondamental* de la corde.

Quand $f(\pi - x) = f(x)$, comme dans ce cas, ou que la fonction $f(x)$ prend la même valeur à égale distance des deux extrémités, il peut y avoir avantage à transporter l'origine au milieu de la droite qui joint celles-ci. Alors l'expression (21) de Φ se réduit, par raison de symétrie, au terme pair en $\cos \beta x$; et la condition $\Phi = 0$ aux deux extrémités $x = \pm\frac{\pi}{2}$, devenue $\cos\frac{\beta\pi}{2} = 0$, donne pour racines β la suite des nombres impairs 1, 3, 5, ... On peut donc, en attribuant

à β ces valeurs, prendre simplement $\Phi = \cos\beta x$; ce qui donne, pour la série trigonométrique à employer, la seconde (45) de la page 168*.

Si, par exemple, la corde a été initialement pincée en son milieu, ou disposée suivant les deux côtés égaux d'un triangle isoscèle très aplati, construit sur la figure d'équilibre comme base, l'équation de sa moitié comprise entre les abscisses $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ sera

$$y = k\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

pourvu que k désigne une constante convenablement choisie; et la formule (54) de la p. 172* donnera simplement $k\sum\frac{\cos\beta x}{\beta^2}$ pour la série $\Sigma C\Phi$. Par suite, l'expression des déplacements φ ou des ordonnées y de la corde à toute époque sera

$$(25)\quad y \quad \text{ou} \quad \varphi = k\left(\frac{\cos x\cos t}{1^2} + \frac{\cos 3x\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5x\cos 5t}{5^2} + \ldots\right).$$

Les dérivées secondes en x ou en t du second membre, indispensables à considérer puisqu'elles figurent dans l'équation indéfinie du mouvement, ne constitueront pas des séries convergentes, ni, par suite, déterminées. Il faudra donc, à cause des difficultés signalées précédemment (p. 395*), restreindre ce second membre à un nombre fini de ses termes, d'autant plus grand qu'on voudra reproduire pour $t = 0$, avec plus d'exactitude, l'état initial. On gagnera d'ailleurs, à cette limitation, d'éviter la discontinuité, relative à $x = 0$, qu'entraînerait inévitablement le point anguleux attribué à la forme initiale de la courbe.

QUARANTE-CINQUIÈME LEÇON.

SUITE DE L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE POUR LES CORPS DE DIMENSIONS FINIES : ÉTUDE D'ÉTATS PERMANENTS.

447*. — **Extension des méthodes précédentes aux problèmes d'état permanent, quand une des coordonnées peut y jouer le rôle de variable principale : exemple relatif aux températures stationnaires d'un prisme.**

Passons maintenant à l'étude des états permanents ou stationnaires, régis par les mêmes équations indéfinies et les mêmes relations aux surfaces limites que les états variables, mais avec ces deux restrictions que le temps t n'y figure pas explicitement et que, de plus, l'état initial ait été choisi de manière à pouvoir se conserver sans fin. La recherche d'un tel état initial duquel résulte, en vertu des équations du phénomène, l'annulation de toutes les dérivées, par rapport à t, des fonctions inconnues, voilà justement ce qui constitue le problème posé.

S'il y a, par exemple, une seule fonction inconnue, φ, vérifiant, dans tout le corps ou tout l'espace proposé, l'une ou l'autre des équations aux dérivées partielles (15) [p. 392*], et, en chaque point (x, y, z) de la surface limite de cet espace, une relation spéciale comme, par exemple, l'égalité de φ à une fonction arbitraire des deux coordonnées indépendantes de la surface, les équations de l'état permanent, reconnues plus haut (p. 385*) suffisantes pour le déterminer, seront, d'une part, la relation indéfinie $\Delta_2 \varphi = 0$, d'autre part, la condition donnée propre à chaque face du corps, et telle que $\varphi =$ une fonction connue f de deux coordonnées variables sur la face considérée. C'est précisément le cas de la température intérieure φ d'un corps, astreint à présenter certaines températures superficielles depuis un temps assez long pour que son état calorifique soit devenu partout stationnaire.

La solution générale d'un pareil problème se décompose en solutions simples assez analogues à celles, (10) [p. 389*], de l'état variable, quand on peut faire jouer à l'une des coordonnées, z par exemple, le rôle de variable principale qu'avait alors le temps t. C'est ce qui arri-

vera pour un prisme droit de hauteur L, reposant sur le plan des xy par sa base inférieure, si ses faces latérales, ainsi que sa base supérieure $z = L$, sont maintenues à la température zéro, la première base $z = 0$, seule, affectant en ses divers points (x, y) des températures arbitraires données $f(x, y)$. A cause du rôle spécial qu'aura z, mettons à part, dans $\Delta_2\varphi$, le terme $\frac{d^2\varphi}{dz^2}$; et appelons désormais $\Delta_2\varphi$ le paramètre différentiel du second ordre de φ pris seulement dans des plans parallèles aux xy, ou réduit à la somme des deux dérivées secondes directes de φ en x et y. Alors l'équation indéfinie, rendue aussi analogue que possible à celles, (15), d'états variables, s'écrira

$$-\frac{d^2\varphi}{dz^2} = \Delta_2\varphi. \tag{26}$$

Cherchons à y satisfaire, comme aux équations (15), avec des solutions simples proportionnelles au produit d'une fonction de la variable principale seule, c'est-à-dire ici de z, par une fonction Φ des autres variables qui vérifie encore l'équation (16) [p. 392*], mais où $\Delta_2\Phi$ serait, bien entendu, réduit aux deux dérivées secondes de Φ en x et y. Il viendra, en posant dans (26) $\varphi = \Phi Z$, ou en appelant Z le facteur cherché fonction de z, puis divisant par Φ et tenant compte de (16),

$$-\frac{d^2 Z}{dz^2} = \frac{\Delta_2\Phi}{\Phi} Z = -\beta^2 Z, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2 Z}{dz^2} - \beta^2 Z = 0,$$

équation dont l'intégrale générale, toujours composée de deux termes respectivement proportionnels à $e^{-\beta z}$ et à $e^{\beta z}$, s'écrira plus utilement, avec trois constantes arbitraires $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, c,

$$Z = \mathfrak{C}\,\text{sih}(c \pm \beta z) + \mathfrak{C}_1\,\text{coh}(c \pm \beta z). \tag{27}$$

Disposons de ces constantes c, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_1$, de manière à faire vérifier par la solution simple quelque condition aux limites. Comme on doit avoir $\varphi = 0$ à la limite $z = L$, et que le facteur Φ, indépendant de z, ne pourra pas s'y annuler, c'est le facteur Z qui devra s'y réduire à zéro, au moyen des hypothèses $\mathfrak{C}_1 = 0$, $c = \beta L$, donnant

$$Z = \mathfrak{C}\,\text{sih}(\beta L - \beta z),$$

si l'on prend en outre $\pm\beta z$ avec le signe inférieur. Et pour que, à la limite opposée $z = 0$, ce facteur Z soit aussi simple que possible, c'est-à-dire se réduise à 1 comme le font pour $t = 0$, dans (11) [p. 390*], les facteurs analogues $\cos\beta t$, $e^{-\beta^2 t}$, il faudra poser $\mathfrak{C} = \frac{1}{\text{sih}\,\beta L}$.

En résumé, les solutions simples, affectées d'ailleurs d'un coefficient arbitraire C, seront $C\Phi\frac{\operatorname{sih}(\beta L-\beta z)}{\operatorname{sih}\beta L}$. Et elles vérifieront, de plus, la condition définie $\varphi=0$ sur la surface latérale, si l'on choisit le nombre β, avec la fonction Φ, ici dépendante de x et y seulement, comme on le ferait, d'après les explications de la fin du n° 443* [p. 393*], pour le calcul d'états variables produits sur tout l'espace plan qu'occupe la base $z=0$ du prisme ou cylindre proposé, dans l'hypothèse de la relation spéciale simple $\varphi=0$ aux limites de cet espace.

Enfin, la solution générale, ainsi analogue à (11) [p. 390*], ou de la forme

$$\varphi=\Sigma C\Phi Z=\sum C\Phi\frac{\operatorname{sih}(\beta L-\beta z)}{\operatorname{sih}\beta L}, \tag{28}$$

se réduit, pour $z=0$, à $\Sigma C\Phi$, comme les valeurs (11) pour $t=0$; et elle vérifiera la condition correspondante, devenue $\Sigma C\Phi=f(x,y)$, c'est-à-dire toute pareille à celles d'*état initial* des cas où le temps t était la variable principale, pourvu que l'on détermine encore les coefficients C par la formule (14) [p. 392*], comme on le ferait dans le calcul d'états variables représentés par (11), mais fonctions seulement de x, y, t et consécutifs à l'état initial $\varphi=f(x,y)$.

Par exemple, quand la base du prisme est rectangulaire, avec ses côtés suivant les quatre droites $x=0$, $x=a$ et $y=0$, $y=b$, les formules (17), (18), (19), (20) [pp. 392* et 393*], où X, Y, Z sont ici réduits à X et à Y, donnent, en y déterminant l, m et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$ de manière à annuler Φ sur le contour $xy(a-x)(b-y)=0$,

$$\Phi=\sin\frac{i\pi x}{a}\sin\frac{j\pi y}{b},\qquad\text{avec}\qquad \beta=\pi\sqrt{\frac{i^2}{a^2}+\frac{j^2}{b^2}}, \tag{29}$$

i, j recevant successivement les valeurs entières 1, 2, 3, 4, ... combinées de toutes les manières possibles. Et, une fois ces expressions de Φ, β substituées dans (28), la formule (14) [p. 392*] prise avec $\rho=1$, ou la série trigonométrique composée (62) [p. 174*], réduite aux variables x, y, ξ, η, conduiront finalement à poser, pour que $\Sigma C\Phi=f(x,y)$,

$$C=\frac{4}{ab}\int_{\xi=0}^{\xi=a}\int_{\eta=0}^{\eta=b}f(\xi,\eta)\sin\frac{i\pi\xi}{a}\sin\frac{j\pi\eta}{b}\,d\xi\,d\eta. \tag{30}$$

On mettrait dans (29), au lieu de $\sin\frac{i\pi x}{a}$ ou de $\sin\frac{j\pi y}{b}$, le facteur $\cos\frac{i\pi x}{a}$ ou $\cos\frac{j\pi y}{b}$ (avec i, j nuls ou entiers positifs), si la condition

relative à deux faces latérales opposées $x = 0$, $x = a$, ou $y = 0$, $y = b$, consistait dans l'annulation non plus de φ, mais de sa dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ dans le sens normal, dérivée où figurerait le facteur

$$\sin\left(\frac{i\pi x}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{j\pi y}{b}\right)$$

précisément nul sur la face considérée : la formule trigonométrique à employer serait alors une série double, déduite de celle (44) d'Euler [p. 167*] ou de sa combinaison avec celle, (43), de Lagrange, comme la série triple (62) [p. 174*] l'a été de cette dernière. Et si, sur deux faces opposées $x = 0$, $x = a$, ou $y = 0$, $y = b$, l'on devait avoir, à l'une, $\varphi = 0$, à l'autre, $\frac{d\varphi}{dn} = 0$, le facteur $\cos\frac{i\pi x}{a}$, ou $\cos\frac{j\pi y}{b}$, serait, à son tour, remplacé par l'un des facteurs $(\sin \text{ ou } \cos)\frac{(2i+1)\pi x}{2a}$, $(\sin \text{ ou } \cos)\frac{(2j+1)\pi y}{2b}$, nuls à une limite et dont la dérivée l'est à l'autre : ce qui conduirait à employer aussi les séries trigonométriques (45) [p. 168*], procédant par sinus ou cosinus des multiples impairs d'un arc, et à les combiner, en séries doubles, soit entre elles, soit avec les précédentes (43), (44).

Il se pourrait encore que la condition relative à la base $z = L$ consistât dans l'annulation non de φ, mais de sa dérivée $\frac{d\varphi}{dz}$ suivant le sens normal. Alors, dans $\varphi = \Sigma C\Phi Z$, on prendrait

$$(31) \qquad Z = \frac{\operatorname{coh}(\beta L - \beta z)}{\operatorname{coh}\beta L}, \quad \text{au lieu de} \quad Z = \frac{\operatorname{sih}(\beta L - \beta z)}{\operatorname{sih}\beta L},$$

afin que la dérivée de Z contînt le facteur $\operatorname{sih}(\beta L - \beta z)$, nul pour $z = L$: Φ, C continueraient d'ailleurs à avoir les mêmes expressions que dans les cas précédents. Et si la fonction $f(x, y)$ donnée exprimait, sur la première base $z = 0$, non plus φ, mais la dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$, ou $-\frac{d\varphi}{dz}$, dans le sens normal, on poserait, suivant les cas,

$$(32) \qquad Z = \frac{\operatorname{sih}(\beta L - \beta z)}{\beta \operatorname{coh}\beta L}, \qquad Z = \frac{\operatorname{coh}(\beta L - \beta z)}{\beta \operatorname{sih}\beta L},$$

afin que, $-\frac{dZ}{dz}$ se réduisant à l'unité pour $z = 0$, la condition d'*état initial* (relative à la valeur nulle de z) ne cessât pas d'être

$$\Sigma C\Phi = f(x, y)$$

et de conduire aux mêmes expressions de C que précédemment.

Enfin, quand le corps est un parallélépipède sur les six faces du-

quel φ ou sa dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ (suivant le sens normal) égalent respectivement six fonctions connues des coordonnées, on forme l'expression générale de φ en superposant six solutions partielles, dans chacune desquelles cinq de ces fonctions sont supposées nulles, tandis que la sixième seule, relative à l'une quelconque des faces prises à tour de rôle pour première base, reçoit ses valeurs effectives données.

Il est d'autres cas plus complexes, celui, par exemple, où la condition spéciale à chacune des six faces d'un parallélépipède rectangle consiste en une relation linéaire, à coefficients constants mais avec un terme fonction arbitraire des coordonnées, entre φ et sa dérivée dans le sens normal. Alors on emprunte encore les expressions de X, Y, Z aux formes (20), (27); et la relation $\beta^2 = l^2 + m^2$ subsiste toujours. Mais les valeurs soit de l, soit de m, déterminées de manière à vérifier les conditions relatives respectivement aux faces $x =$ const., $y =$ const., en y annulant les fonctions arbitraires, ne sont plus commensurables entre elles; et les formules trigonométriques déduites de celle de Fourier, ou propres à exprimer des fonctions périodiques, deviennent insuffisantes, quoique la séparation et le calcul des coefficients continuent à se faire par la formule (14) [p. 392*].

Certaines simplifications peuvent cependant se produire dans ce cas, comme d'ailleurs dans les cas précédents. Par exemple, s'il y a symétrie des conditions à la surface et, par suite, de la fonction φ de point, par rapport aux trois plans diamétraux menés parallèlement aux faces, l'adoption d'axes coordonnés coïncidant avec les intersections de ces trois plans changera φ en une fonction paire tant de x, que de y et de z. Cela permettra de se borner à la partie du corps comprise dans l'angle des coordonnées positives, en s'y donnant, par raison de symétrie, comme condition spéciale aux trois faces fictives $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, l'annulation de la dérivée de φ dans le sens normal. Vu la nature de cette relation définie, que nous savons faire vérifier par les solutions simples, l'expression générale de φ ne comprendra évidemment que trois expressions partielles au lieu de six, savoir, une par fonction arbitraire exprimant la donnée relative à une face opposée; et il est clair que, dans chacune de ces trois solutions partielles, X, Y, Z se réduiront à des cosinus circulaires ou hyperboliques d'arcs ou d'arguments proportionnels à la coordonnée correspondante x, y, ou z.

Par exemple encore, pour un prisme à base quelconque sur le plan des xy, mais d'une longueur L infinie, la fonction Z deviendra une simple exponentielle, évanouissante pour $z = \infty$; car, dans les quatre for-

mules (31) et (32), les cosinus et sinus hyperboliques se réduiront, vu les valeurs infinies des arguments $\beta L - \beta z$ et βL, à $\frac{1}{2}e^{\beta L - \beta z}$ et à $\frac{1}{2}e^{\beta L}$; ce qui donnera

$$(33) \qquad Z = e^{-\beta z}, \qquad \text{ou} \qquad Z = \frac{1}{\beta} e^{-\beta z}.$$

La formule $\varphi = \Sigma C \Phi Z$, ainsi devenue presque entièrement semblable à la seconde (11) [p. 390*], entraînera pour l'état *permanent* un mode de *régularisation, par la distance z*, pareil à celui que le *temps t* apporte dans l'état *variable* (p. 396*).

Terminons par cette remarque, que la propriété de la transformation stéréographique démontrée vers la fin du n° 202* (t. I, p. 283*) et résultant de la formule (24) de ce numéro, permettra de former immédiatement la fonction φ, ou de résoudre le problème des températures stationnaires, pour les transformés stéréographiques des prismes droits qui viennent d'être étudiés, c'est-à-dire pour une infinité de corps à faces taillées sphériquement et qui seront, par exemple, des parallélépipèdes rectangles curvilignes, si le prisme proposé a lui-même sa base rectangulaire.

448*. — Même problème des températures stationnaires pour un espace plan soit limité par un rectangle curviligne, soit annulaire : sa solution générale, dans le cas où l'on en connaît une solution particulière simple.

Il est clair que les séries trigonométriques doubles de sinus ou de cosinus employées dans le problème précédent seraient remplacées par des séries simples analogues, si la fonction φ, à paramètre différentiel Δ_2 nul, devait être obtenue non pour un parallélépipède, mais pour un espace rectangulaire plan, à deux coordonnées x, y, sur chaque côté duquel on connaîtrait sa valeur φ ou sa dérivée dans le sens normal. Alors, l'équation du système des quatre droites qui composeraient le contour étant $xy(a-x)(b-y) = 0$, une des deux coordonnées jouerait, dans chacune des quatre solutions particulières à superposer, le rôle qu'avait précédemment z ; et la fonction arbitraire correspondante, représentant φ ou sa dérivée sur un des côtés perpendiculaires au sens de cette coordonnée, se développerait par les séries (43) à (45) [pp. 167* et 168*], suivant les sinus ou les cosinus d'arcs multiples de l'un d'entre eux et proportionnels à l'autre coordonnée.

La solution du problème des températures stationnaires étant ainsi obtenue pour un rectangle à côtés droits, la transformation stéréographique, dans le plan, l'étendra immédiatement (t. I, p. 283*) à une

infinité de rectangles curvilignes : circonstance de nature, malgré la forme exclusivement circulaire ou droite de leurs côtés, à suggérer cette idée, que le même problème pourrait bien encore être abordable dans d'autres cas de contours courbes. Et, en effet, pour nous borner d'abord aux rectangles curvilignes, Lamé a reconnu qu'on y composait l'expression générale de φ indépendamment de leur forme, ou par le même procédé analytique que lorsqu'ils sont rectilignes, à la seule condition d'avoir su d'abord obtenir la fonction φ dans le cas simple où deux côtés opposés sont maintenus à *deux* températures *constantes,* les deux autres côtés étant *imperméables,* c'est-à-dire impliquant, en tous leurs points, une dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ nulle suivant leur normale.

Pour le démontrer, appelons α, dans ce cas simple, l'expression particulière de φ, fonction connue de x et de y. Les courbes $\alpha=$ const., vérifiant ainsi l'équation

$$(34) \qquad \Delta_2\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}=0,$$

et qu'on appelle pour cela courbes *isothermes* (c'est-à-dire susceptibles, dans certains cas, de conserver, chacune, tous leurs points à une température uniforme α), auront évidemment, en (x, y), pour coefficient angulaire y', le rapport de $-\frac{d\alpha}{dx}$ à $\frac{d\alpha}{dy}$, et seront coupées partout à angle droit par celles dont le coefficient angulaire analogue $\frac{dy}{dx}$ égalerait le rapport inverse changé de signe. En d'autres termes, elles auront pour *trajectoires orthogonales* les courbes dont l'équation différentielle sera $\frac{d\alpha}{dx}dy - \frac{d\alpha}{dy}dx = 0$. Or le premier membre de celle-ci est la différentielle exacte d'une certaine fonction β de x et y; car il vérifie, en vertu de (34), la condition d'intégrabilité,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)=\frac{d}{dy}\left(-\frac{d\alpha}{dy}\right).$$

Donc de simples quadratures feront connaître l'équation $\beta=$ const. des trajectoires orthogonales aux courbes isothermes données $\alpha=$const.; et leur paramètre β vérifiera les deux relations

$$(35) \qquad \frac{d\beta}{dx}=-\frac{d\alpha}{dy}, \qquad \frac{d\beta}{dy}=\frac{d\alpha}{dx}.$$

Or celles-ci, ajoutées après avoir été différentiées respectivement en x et y, donnent

$$(36) \qquad \Delta_2\beta = 0;$$

ce qui prouve que les lignes $\beta = \text{const.}$ seront, elles aussi, isothermes. Enfin, le troisième et le quatrième côté du rectangle curviligne coïncideront avec deux de ces lignes, de même que le font déjà le premier et le second avec deux lignes $\alpha = \text{const.}$: car, à cause de la relation $\frac{d\alpha}{dn} = 0$, vérifiée par hypothèse en tous les points de ces troisième et quatrième côtés, les courbes $\alpha = \text{const.}$, ou le long desquelles la dérivée de α s'annule, y auront précisément les directions des éléments dn normaux au contour, et celui-ci y suivra bien, dès lors, une trajectoire orthogonale $\beta = \text{const.}$

Il est évident par raison de continuité que, du moins si l'espace rectangulaire considéré n'est pas trop grand, les lignes de l'une quelconque des deux familles $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ le diviseront en bandes infiniment étroites, sans s'y croiser, ni même s'y toucher nulle part. Or, dans ces conditions, chacun des deux paramètres α, β croîtra sans cesse ou décroîtra sans cesse le long d'un chemin normal aux courbes qu'il caractérise. Effectivement, multiplions l'une quelconque des équations (34), (36) par un élément $dx\,dy = d\sigma$ de l'espace plan considéré ; puis intégrons le produit dans l'étendue de tout rectangle curviligne que limiteront quatre arcs très petits $d\chi_1$, $d\chi_2$, $d\chi_3$, $d\chi_4$ appartenant, les deux premiers, aux courbes $\alpha = \text{const.}$, les deux derniers, aux courbes $\beta = \text{const.}$; et transformons enfin, comme au n° 441* (p. 382*), chaque terme intégré une fois en une intégrale prise sur le contour du champ. Le résultat sera, au premier membre, la somme des éléments de ce contour, respectivement multipliés par la dérivée de α ou de β suivant leur normale menée au dehors. Or, s'il s'agit, par exemple, de $\int (\Delta_2 \alpha)\, d\sigma = 0$, la dérivée en question de α s'annulera évidemment en tous les points des côtés $d\chi_3$, $d\chi_4$, qui appartiennent aux courbes $\beta = \text{const.}$; et, si l'on convient de mener à chacun des deux autres côtés $d\chi_1$, $d\chi_2$, une normale dn_1, dn_2 allant dans le sens suivant lequel est supposé marcher l'observateur qui croise normalement toutes les courbes $\alpha = \text{const.}$, l'une de ces normales, dn_1 par exemple, sera intérieure au petit rectangle, ou correspondra à une dérivée de α précisément égale et contraire à celle qu'il s'agit de multiplier par $d\chi_1$, tandis que l'autre, dn_2, sera extérieure. La relation obtenue s'écrira donc

$$(37) \qquad -\frac{d\alpha}{dn_1} d\chi_1 + \frac{d\alpha}{dn_2} d\chi_2 = 0;$$

ce qui, vu l'impossibilité admise où sont $d\chi_1$ et $d\chi_2$ de s'annuler dans

tout l'intérieur de l'espace où l'on se meut, montre que les deux dérivées $\frac{d\alpha}{dn_1}$ et $\frac{d\alpha}{dn_2}$ ont même signe.

Ainsi α croît toujours ou décroît toujours, quand on traverse le rectangle curviligne proposé, de grandeur finie, en allant du premier côté au second; et une remarque analogue se dirait évidemment de β, si l'on traversait en allant du troisième côté au quatrième. Pour fixer les idées, nous supposerons les côtés numérotés de telle manière, que α et β grandissent entre des limites appelées respectivement α_0, α_1 et β_0, β_1, quand on ira soit du premier côté $\alpha = \alpha_0$ au second $\alpha = \alpha_1$, soit du troisième $\beta = \beta_0$ au quatrième $\beta = \beta_1$. Il est clair que, dans l'intervalle, les deux paramètres α, β passeront une seule fois, c'est-à-dire en un seul point (x, y) de l'espace proposé, par chaque système de valeurs intermédiaires : d'où il suit que, si nous introduisons dans φ, au lieu de x et y, les variables α et β, ces deux coordonnées *curvilignes* α, β (t. I, p. 288*) pourront, sans la moindre ambiguïté dans l'étude de la fonction φ de point, remplacer les coordonnées rectilignes x, y.

Il ne nous reste donc qu'à effectuer la substitution de α, β à x, y dans les équations du problème, et à reconnaître que celles-ci acquièrent précisément la forme déjà affectée par elles en x et y quand le rectangle est rectiligne.

Commençons par l'équation indéfinie, $\Delta_2\varphi = 0$. La fonction φ étant censée exprimée au moyen de α et β, variables liées elles-mêmes à x et y, une première différentiation en x donne

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{dx}. \tag{38}$$

On déduit de celle-ci, par une nouvelle différentiation en x,

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\frac{d\alpha^2}{dx^2} + 2\frac{d^2\varphi}{d\alpha\,d\beta}\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dx} + \frac{d^2\varphi}{d\beta^2}\frac{d\beta^2}{dx^2} + \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d^2\beta}{dx^2};$$

et, en ajoutant à cette expression de $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ l'expression analogue que l'on aurait pour $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$, il vient, grâce aux relations (34), (35), (36),

$$\Delta_2\varphi = \left(\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + \frac{d^2\varphi}{d\beta^2}\right)\Delta_1^2\alpha, \tag{39}$$

où $\Delta_1^2\alpha$ représente la somme des carrés des deux dérivées premières $\frac{d\alpha}{d(x, y)}$, égale, d'après (35), à la somme analogue $\Delta_1^2\beta$ pour β. Comme

ces carrés des paramètres différentiels du premier ordre $\Delta_1 \alpha$, $\Delta_1 \beta$ ne peuvent s'annuler, tout au plus, qu'en des points spéciaux, l'annulation *continue* de $\Delta_2 \varphi$ exige que l'on ait partout

$$(40) \qquad \frac{d^2 \varphi}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \varphi}{d\beta^2} = 0.$$

Telle est donc l'équation indéfinie à laquelle satisfait la fonction φ de α et β. Or on voit qu'elle exprime l'égalité, avec signes contraires, des deux dérivées secondes directes de la fonction, comme lorsque les variables étaient x et y.

Passons aux relations définies concernant le contour, dont les quatre côtés ont maintenant les équations respectives très simples $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_1$. Le long de chacun d'eux, représenté par

$$(\beta \text{ ou } \alpha) = \text{const.},$$

on connaîtra directement, en fonction de x et de y, ou, par suite, en fonction de la coordonnée α ou β qui s'y trouvera variable, soit la valeur de φ, soit la dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ prise suivant une normale extérieure dn, c'est-à-dire obtenue sans faire varier α ou β, et qui sera, par conséquent, $\frac{d\varphi}{d(\beta, \alpha)} \frac{d(\beta, \alpha)}{dn} = \frac{d\varphi}{d(\beta, \alpha)} (\pm \Delta_1 \beta \text{ ou } \pm \Delta_1 \alpha)$. S'y donner cette dérivée, ce sera donc la même chose que d'y connaître $\frac{d\varphi}{d(\beta, \alpha)}$; et les conditions au contour seront, en définitive,

$$(41) \quad \begin{cases} (\text{pour } \alpha = \alpha_0 \text{ et pour } \alpha = \alpha_1)\ \varphi \text{ ou } \dfrac{d\varphi}{d\alpha} = \text{des fonct. données de } \beta, \\ (\text{pour } \beta = \beta_0 \text{ et pour } \beta = \beta_1)\ \varphi \text{ ou } \dfrac{d\varphi}{d\beta} = \text{des fonct. données de } \alpha. \end{cases}$$

Il suffirait donc maintenant d'effectuer un simple changement de l'*origine* des variables (en quelque sorte) et de poser

$$\alpha = \alpha_0 + x, \qquad \beta = \beta_0 + y, \qquad \alpha_1 = \alpha_0 + a, \qquad \beta_1 = \beta_0 + b,$$

où x et y seraient, bien entendu, tout autres que les premières coordonnées, pour réduire les équations du problème à la relation indéfinie $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = 0$ et aux conditions spéciales

$$(42) \quad \begin{cases} (\text{pour } x = 0 \text{ et } x = a)\ \varphi \text{ ou } \dfrac{d\varphi}{dx} = \text{des fonct. données de } y, \\ (\text{pour } y = 0 \text{ et } y = b)\ \varphi \text{ ou } \dfrac{d\varphi}{dy} = \text{des fonct. données de } x; \end{cases}$$

ce qui, comme il s'agissait de le démontrer, les rendrait identiques aux équations régissant φ dans le rectangle rectiligne défini par

$$xy(a-x)(b-y)=0.$$

Mais il pourra se faire ici que les courbes de l'une des deux familles soient fermées et, par exemple, intérieures l'une à l'autre, de manière à intercepter entre elles un espace annulaire, plus intéressant à considérer qu'un simple rectangle. Supposons donc qu'un tel espace, annulaire mais d'ailleurs quelconque, étant donné, l'on ait pu y former la fonction $\varphi=\alpha$ pour le cas simple où elle reçoit sur les deux bords intérieur et extérieur deux valeurs respectives constantes α_0, α_1, et que l'on ait ensuite, par l'intégration de $\frac{d\alpha}{dx}dy-\frac{d\alpha}{dy}dx$ à partir d'un point arbitrairement choisi, déterminé le paramètre β des trajectoires orthogonales aux courbes $\alpha=$ const. Alors β croîtra en tout d'une certaine quantité 2ϖ quand on fera le tour de l'espace annulaire le long de l'une quelconque des courbes $\alpha=$ const.; et, cet accroissement 2ϖ reçu par β ramenant la première trajectoire $\beta=$ const. déjà obtenue, la fonction de point φ, relative au cas général où soit φ, soit $\frac{d\varphi}{d\alpha}$ recevront, sur les deux bords, des valeurs données arbitrairement, constituera une fonction de α et de β périodique par rapport à β, avec 2ϖ pour période. Comme on formera l'expression générale de φ par la superposition de deux solutions plus simples, dans chacune desquelles s'annulera la fonction arbitraire relative à l'une des deux limites $\alpha=\alpha_1$, $\alpha=\alpha_0$, la *variable principale* α figurera, dans chaque terme de l'une quelconque de ces deux solutions, par un facteur A de l'une des formes (31) et (32) [sauf parfois le signe], savoir, en y appelant k l'ancien coefficient β et adoptant d'autres notations appropriées,

$$(43)\quad \begin{cases} A=\dfrac{(\text{sih ou coh})(k\alpha-k\alpha_1,\ \text{ou}\ k\alpha-k\alpha_0)}{(\text{sih ou coh})(k\alpha_0-k\alpha_1,\ \text{ou}\ k\alpha_1-k\alpha_0)}, \\[2ex] A=\dfrac{(\text{sih ou coh})(k\alpha-k\alpha_1,\ \text{ou}\ k\alpha-k\alpha_0)}{k(\text{coh ou sih})(k\alpha_0-k\alpha_1,\ \text{ou}\ k\alpha_1-k\alpha_0)}. \end{cases}$$

Quant à la variable β, elle figurera, dans le terme dont il s'agit, par un facteur B évidemment emprunté aux expressions (20) [p. 393*] et qu'on pourra écrire, avec deux constantes arbitraires L, M,

$$(44)\qquad B=L\cos k\beta+M\sin k\beta.$$

Or, pour que ce facteur soit, comme la solution particulière $\varphi=\Sigma BA$ qu'il s'agit de former, périodique en β et de période 2ϖ, il faudra

évidemment poser, dans (43) et (44),

(45) $$k = \frac{i\pi}{\varpi},$$

si i désigne successivement tous les entiers non négatifs 0, 1, 2, 3, 4, ... Enfin, la dernière condition à vérifier étant

(46) $$\left(\varphi \text{ ou } \frac{d\varphi}{d\alpha}\right) = \text{une fonction donnée } f(\beta)$$

à la limite $\alpha =$ soit α_0, soit α_1 où le premier membre de (46) devient simplement ΣB, il y aura lieu d'appliquer la série trigonométrique complète de Fourier (35) [p. 162*], au lieu de l'une de celles qui en dérivent ; et l'on posera

(47) $$\begin{cases} (\text{pour } i = 0) & \mathrm{L} = \dfrac{1}{2\varpi}\displaystyle\int_{-\varpi}^{\varpi} f(\xi)\,d\xi, \\ (\text{pour } i > 0) & (\mathrm{L}, \mathrm{M}) = \dfrac{1}{\varpi}\displaystyle\int_{-\varpi}^{\varpi} f(\xi)(\cos \text{ ou } \sin)\dfrac{i\pi\xi}{\varpi}\,d\xi. \end{cases}$$

449*. — Exemples : secteur d'une couronne circulaire ; rectangles limités par deux familles d'arcs de cercle ou par une famille de lemniscates et une famille d'hyperboles, etc.

Contentons-nous d'indiquer les exemples les plus simples auxquels s'applique la théorie précédente. Ils se déduisent de l'un d'eux, presque évident *a priori*, savoir, celui d'un anneau plan compris entre deux cercles concentriques de rayons donnés r_0, r_1. Quand le bord intérieur $2\pi r_0$ et le bord extérieur $2\pi r_1$ sont à deux températures constantes α_0, α_1, il est clair, par raison de symétrie, que la température permanente α, dans l'intervalle, a égale valeur en tous les points situés à une même distance quelconque r du centre ; en sorte que la famille $\alpha =$ const. est celle des cercles concentriques $r =$ const. à laquelle appartiennent les deux bords et, par suite, la famille $\beta =$ const., celle des droites $\theta =$ const. qui rayonnent autour du centre, θ désignant leur azimut, dont la tangente est $\frac{y-m}{x-l}$, si l, m sont les deux coordonnées du centre. Pour avoir les paramètres α, β, régis par (34), (35), (36), observons que, α dépendant seulement de r dans un espace à deux dimensions, la formule (28) de la VII[e] Leçon (t. I, p. 95*) donne $\Delta_2\alpha = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\alpha}{dr}\right)$. L'équation $\Delta_2\alpha = 0$ revient donc à poser $\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\alpha}{dr}\right) = 0$, c'est-à-dire $r\frac{d\alpha}{dr} =$ une constante c ;

d'où, en divisant par r et intégrant,

(48) $$\alpha = c \log r + \text{une nouvelle const. } \log c' = \log(c' r^c),$$

expression qu'on pouvait prévoir en se rappelant la propriété (33) [p. 220*] du potentiel logarithmique à deux variables et, par suite, la relation $\Delta_2 \log r = 0$. On disposera des deux constantes c, c' de manière que $\alpha = \alpha_0$ pour $r = r_0$, et que $\alpha = \alpha_1$ pour $r = r_1$. Quant à β, sa différentielle $\frac{d\alpha}{dx} dy - \frac{d\alpha}{dy} dx$ devient successivement [vu que $r = \sqrt{(x-l)^2 + (y-m)^2}$],

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dr}\left(\frac{dr}{dx} dy - \frac{dr}{dy} dx\right) &= \frac{c}{r}\left(\frac{x-l}{r} dy - \frac{y-m}{r} dx\right) \\ &= c\,\frac{(x-l)^2}{r^2}\, d\frac{y-m}{x-l} = c \cos^2\theta\, d \operatorname{tang}\theta = c\, d\theta. \end{aligned} \right.$$

Intégrée de manière, par exemple, que β s'annule avec l'azimut θ, elle donnera

(49) $$\beta = c\theta = c \operatorname{arc\,tang} \frac{y-m}{x-l}.$$

On pourra donc obtenir l'expression générale de φ pour le rectangle mixtiligne compris entre deux rayons quelconques $\beta = \beta_0$, $\beta = \beta_1$ et deux arcs concentriques $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_1$, rectangle qu'on peut appeler un *secteur annulaire* (ou *évidé*) et qui se réduirait à un secteur ordinaire de cercle si le rayon intérieur r_0 devenait nul.

Mais généralisons les expressions (48), (49) de α et β. Comme l'équation $\Delta_2 \alpha = 0$ est linéaire sans second membre, elle sera satisfaite par la somme de $\log c'$ et d'autant de termes qu'on voudra de la forme $c \log r = \log(r^c)$, où figureront, avec des exposants c arbitrairement égaux ou inégaux, les distances des mêmes points quelconques (x, y) du plan à tout autant de centres (l, m), Or, en posant ainsi

(50) $$\alpha = \log c' + \Sigma c \log r, \quad \text{il viendra} \quad \beta = \Sigma c\theta = \sum c \operatorname{arc\,tang} \frac{y-m}{x-l},$$

pourvu que l'on compte dans un même sens et à partir de droites parallèles aux x positifs tous les azimuts θ relatifs aux divers centres. Il est clair que les arcs, du moins assez peu étendus, des deux familles de courbes $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ ainsi définies, diviseront le plan en rectangles curvilignes, pour lesquels l'expression générale de φ sera encore facile à former.

Le cas de deux centres, dont on choisira naturellement la droite de jonction $2l$, prolongée, pour axe des x, en plaçant l'origine en son

milieu, est particulièrement intéressant, à la condition de faire égaux *en valeur absolue* (avec signes contraires ou mêmes signes) les deux exposants c. Alors, si l'on appelle r, r_1 les deux rayons vecteurs $\sqrt{y^2+(x\mp l)^2}$, issus de ces deux centres $(\pm l, 0)$, et θ, θ_1, leurs azimuts respectifs, dont les tangentes sont $\frac{y}{x\mp l}$ $\left[\text{en sorte que } \operatorname{tang}(\theta\mp\theta_1)=\frac{2y(l \text{ ou } x)}{x^2-l^2\pm y^2}\right]$, il vient, d'après (50),

$$(51)\quad \begin{cases} \text{soit } \alpha=\log c'+c\log\dfrac{r}{r_1}, & \beta=c(\theta-\theta_1); \\ \text{soit } \alpha=\log c'+c\log(rr_1), & \beta=c(\theta+\theta_1)=c\operatorname{arc\,tang}\dfrac{2xy}{x^2-y^2-l^2}. \end{cases}$$

Dans le premier cas, où les équations $\alpha=$ const., $\beta=$ const. reviennent respectivement à $\frac{r}{r_1}=$ const., $\theta-\theta_1=$ const., les deux familles de courbes sont des cercles et α, β constituent un système de *coordonnées bicirculaires*. D'une part, en effet, on sait que le lieu des points (x, y) dont les distances r, r_1 à deux points fixes sont dans un rapport constant est une circonférence ayant son centre sur la droite de jonction de ceux-ci; d'autre part, la différence $\theta-\theta_1$ des deux azimuts d'un même point (x, y) égale évidemment l'angle de ses deux rayons vecteurs r, r_1, et la constance de cet angle indique son inscription dans un segment circulaire dont l'arc se termine aux deux points fixes. Dans le second cas, l'équation $\alpha=$ const. revenant à $rr_1=$ const., les courbes dont le paramètre est α constituent une famille de lemniscates [t. I, p. 169*] : d'où le nom de *coordonnées lemniscatiques* alors donné aux variables α, β, quoique la seconde équation $\beta=$ const. représente $\left(\text{en posant } \operatorname{tang}\frac{\beta}{c}=\frac{1}{k}\right)$ une famille, $x^2-2kxy-y^2=l^2$, non de lemniscates, mais d'hyperboles équilatères, comme on le voit en étudiant l'équation $x^2-2kxy-y^2=0$ de leurs asymptotes ou de leurs parties infiniment éloignées, pour lesquelles le terme fini l^2 est négligeable [1].

---

[1] Pour plus de détails sur ces coordonnées et sur leur emploi dans la question, ainsi que sur les *coordonnées elliptiques* où les deux familles $\alpha=$ const., $\beta=$ const. sont respectivement des ellipses et des hyperboles homofocales, cas où α, β, sans appartenir au type (50), s'expriment encore assez facilement, on peut consulter les XIe, XIIe et XIIIe des *Leçons* de Lamé *Sur les coordonnées curvilignes et leurs applications*. M. Émile Mathieu, dans les Chapitres II et III de son *Cours de Physique mathématique,* a éclairci certaines difficultés spéciales auxquelles est parfois sujet l'usage de ces coordonnées, difficultés tenant à

La formule (49) de β comporte encore une généralisation digne de remarque. Remplaçons-y $y - m$ et $x - l$, respectivement, par une fonction, Y, de y seul, et par une fonction, X, de x seul, en astreignant ces fonctions à la condition unique $\Delta_2 \beta = 0$, c'est-à-dire $\Delta_2 \operatorname{arc tang} \frac{Y}{X} = 0$. On trouve aisément, par deux différentiations successives, tant en x qu'en y, de $\operatorname{arc tang} \frac{Y}{X}$, que cette condition revient à poser

$$(52) \qquad \frac{X''}{X} - \frac{Y''}{Y} = 2\,\frac{X'^2 - Y'^2}{X^2 + Y^2}.$$

Or, outre sa solution déjà connue (49), consistant à annuler les dérivées secondes X'', Y'' et à prendre égales en valeur absolue les dérivées premières X', Y', dès lors constantes, qui disparaîtront comme facteur commun dans le rapport de $\pm Y$ à X, l'équation (52) est encore, à première vue, satisfaite en écrivant à la fois, quelle que soit une con-

---

l'existence, dans le plan, de régions singulières ou extrêmes (telles que le *pôle* dans le cas de coordonnées polaires) où des discontinuités analytiques peuvent se produire, parce qu'une des variables α ou β cesse d'y être parfaitement déterminée.

Enfin, il y a lieu d'observer, pour les cas non seulement d'un espace plan annulaire ou rectangulaire à côtés droits ou courbes, mais aussi d'un parallélépipède rectangle, que, si l'on se donnait sur tout le contour ou toute la surface la dérivée de φ suivant le sens normal, cette dérivée ne serait pas entièrement arbitraire, mais aurait sa valeur moyenne générale nulle, en vertu de l'équation $\Delta_2 \varphi = 0$ traitée comme l'a été (p. 409*) l'équation $\Delta_2 \alpha = 0$ pour donner (37). De là, quand, sur chaque côté ou chaque face en particulier, la valeur moyenne de la fonction arbitraire correspondante différerait de zéro, des termes de forme infinie, dans les deux, quatre ou six solutions partielles : ce sont ceux que fourniraient, pour $k = 0$ ou $\beta = 0$, les dernières expressions (43) de A [p. 412*], ou la seconde (32) de Z [p. 405*], alors multipliées par les valeurs moyennes en question qu'introduirait le premier terme, constant, des séries trigonométriques de Fourier ou d'Euler. L'utilisation de ces termes infinis, *de signes divers,* dans la solution générale, serait facile en ordonnant chacun d'eux suivant les puissances de k ou de β, réduisant à une *constante arbitraire,* dans la somme, toute la partie des développements où ne figurerait aucune coordonnée variable comme $x, y, \ldots$, partie qui débuterait par une fraction *indéterminée* de la forme $\frac{0}{0}$, et puis supprimant les termes d'un degré en $x, y, \ldots$ supérieur au second, que ferait évanouir l'annulation finale de k ou de β. Mais il est encore plus simple de se donner immédiatement sous la forme suivante l'expression *algébrique* φ_0 ainsi obtenue,

$$\varphi_0 = \text{const. arbitr.} + A(a - x)^2 + A'x^2 + B(b - y)^2 + B'y^2 + \ldots,$$

dont la dérivée, sur les diverses faces ou les divers côtés $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b, \ldots$, et toujours suivant le sens normal, a les valeurs respectives constantes $2Aa$, $2A'a$, $2Bb$, $2B'b, \ldots$, astreintes par l'équation $\Delta_2 \varphi_0 = 0$ à la relation unique et prévue (d'après ce qui précède) $A + A' + B + B' + \ldots = 0$.

stante positive k,

(53) $$\frac{X''}{X} = k^2, \qquad \frac{Y''}{Y} = -k^2, \qquad X'^2 - k^2X^2 = Y'^2 + k^2Y^2,$$

relations dont non seulement les deux premières, mais encore la troisième (à cause de $\text{coh}^2 kx - \text{sih}^2 kx = 1 = \cos^2 kx + \sin^2 kx$) se trouvent vérifiées quand on pose

(54) $$X = \text{sih}\, kx, \qquad Y = \sin ky.$$

On aura donc

(55) $$\beta = c \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin ky}{\text{sih}\, kx}.$$

Le second membre garde constamment le signe de c, en diminuant de $c\frac{\pi}{2}$ à zéro, quand le rapport $\frac{\sin ky}{\text{sih}\, kx}$ décroît lui-même de l'infini à zéro, savoir, quand, y égalant d'abord $\frac{\pi}{2k}$ et ne devant pas sortir de l'intervalle compris entre zéro et $\frac{\pi}{k}$, x croît de zéro à l'infini en changeant seul, ou croît seulement de zéro à une valeur positive quelconque p, mais avec variation proportionnelle et simultanée de y jusqu'à une de ses deux limites o, $\frac{\pi}{k}$. De plus, pour p infiniment petit, le décroissement de l'arc tangente, à partir de $\frac{\pi}{2}$, est infiniment lent (sauf à l'instant final où $\sin ky$ va s'annuler); et β reste constant. Ainsi, la fonction β définie par (55) exprime, *sous forme finie,* les températures stationnaires, en tous les points d'un rectangle de hauteur $\frac{\pi}{k}$ s'étendant, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, entre ses deux bases $ky = 0$, $ky = \pi$, maintenues, avec son côté $x = \infty$, à la température zéro, tandis que son premier côté $x = 0$ est à une température uniforme $c\frac{\pi}{2}$ (¹).

Terminons ici cette longue étude de l'équation $\Delta_2\varphi = 0$ considérée à l'intérieur d'un espace plan, soit rectangulaire à côtés courbes, soit

(¹) Cette solution, *sous forme finie,* d'un problème d'état calorifique permanent dans un rectangle de longueur infinie dont trois côtés sont à une même température, est due à Fourier; il l'a obtenue, au Chapitre III de sa *Théorie analytique de la chaleur,* en sommant la série fournie par la méthode précédemment exposée (p. 403*), dont la première idée et la mise en œuvre (au moins dans les cas d'une longueur L infinie) lui appartiennent également.

annulaire, sur le contour duquel on donne φ ou sa dérivée dans le sens normal, en observant combien s'y est montrée féconde la réduction de l'intégration à son cas le plus simple, celui où, sur deux côtés opposés, φ se réduit respectivement à deux constantes, tandis que, sur les deux autres (quand ils existent), la dérivée de φ prise normalement au contour s'annule [1].

---

[1] *Note sur la réduction de Riemann,*
pour certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.

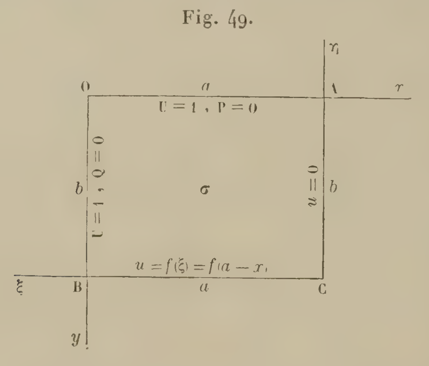
Le profond géomètre Riemann, de Gœttingue, en procédant d'une tout autre manière où jouent un rôle capital les formules (20) de la page 92*, a ramené aussi l'intégration, par quadratures, de l'équation linéaire à coefficients variables $s + Ap + Bq + Cu = 0$, où u, p, q, s sont respectivement une fonction continue de deux coordonnées rectangulaires x, y dans le plan xOy, ses deux dérivées premières et sa dérivée seconde oblique, à la formation d'une *certaine* intégrale particulière d'une équation analogue, dite l'*adjointe* de la proposée, et qui même se confond avec elle quand A, B sont nuls.

Montrons le principe de cette méthodesur l'équation très simple

$$s + u = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2 u}{dx\,dy} + u = 0,$$

en admettant que, le long de deux droites $x = a$, $y = b$, ou CA, CB, parallèles aux axes, on donne directement u en fonction de deux coordonnées respectives

Fig. 49.



$\xi = a - x$, $\eta = b - y$ comptées en sens inverse de x et de y à partir de l'intersection C.

Soient donc, avec deux fonctions continues $f(\xi)$, $\varphi(\eta)$, nulles en même temps que leur variable, mais d'ailleurs arbitraires,

$$u = c + f(\xi), \qquad u = c + \varphi(\eta),$$

les deux expressions connues de u le long de CB et de CA, c désignant la valeur, quelconque, de u en C. L'intégrale générale u pourra évidemment se décomposer en trois solutions particulières, dont la première, sans fonction arbitraire, donnerait $u = c$ en tous les points des deux droites indéfinies CB, CA, tandis que les deux autres, affectées chacune d'une fonction arbitraire, corres-

450*. — Solution soit approchée, soit quelquefois même exacte, au moyen d'expressions entières et finies, du problème des températures stationnaires pour un espace plan limité par un contour quelconque, et réduction, à ce problème, d'autres questions importantes de la Physique mathématique.

Nous avons encore d'utiles considérations à ajouter, touchant le problème des températures stationnaires, dans un espace plan limité

---

pondraient, l'une, à $u = f(\xi)$ sur CB avec $u = 0$ sur CA, l'autre, à $u = 0$ sur CB avec $u = \varphi(\eta)$ sur CA.

Nous représenterons la première de ces trois solutions partielles, évidemment proportionnelle à c, par U, après l'avoir divisée par c et astreinte ainsi à prendre la valeur 1 tout le long des deux droites rectangulaires données, ou mieux de deux droites fixes et parallèles aux axes, mais choisies d'ailleurs à volonté. C'est précisément la fonction U ainsi définie que la méthode de Riemann suppose trouvée et emploie à la formation des deux autres intégrales.

Essayons de découvrir sa forme, en admettant, pour simplifier le plus possible, que les deux droites sur lesquelles elle doit acquérir la valeur 1 soient les deux axes mêmes des x et des y, ou aient comme équation $xy = 0$. La fonction U se réduisant dès lors à la constante 1 pour $xy = 0$, demandons-nous si elle ne serait pas uniquement dépendante du produit xy, que nous désignerons par ρ, et appelons, dans cette hypothèse, U', U'' ses deux dérivées première et seconde en ρ, tandis que P, Q, S exprimeront ses dérivées premières et seconde en x, y analogues à celles, p, q, s, de u. Comme les deux dérivées en x et y de la variable $\rho = xy$ sont y et x, deux différentiations successives de U par rapport à x et à y donneront

$$P = U'y, \qquad S = U''yx + U' = \rho U'' + U';$$

ce qui changera l'équation aux dérivées partielles proposée $S + U = 0$, ou $S = -U$, en une équation simplement différentielle, $\rho U'' + U' = -U$, identique à celle, (81) [p. 308*], qui, pour $\nu = 0$, régit la fonction cylindrique $J_\nu(r)$ quand on pose $r = 2\sqrt{\rho} = 2\sqrt{xy}$. Si d'ailleurs on joint à cela que U doit, pour $r = 0$, rester fini, comme $J_0(r)$, et se réduire à l'unité, alors que $J_0(r)$, donné en intégrale définie et en série par les formules (92) et (94) des pp. 313* et 314*, acquiert la valeur $\frac{\pi}{2}$, il viendra

$$(\alpha) \qquad U = \frac{2}{\pi} J_0(2\sqrt{xy}).$$

Cela posé, considérant, par exemple, la seconde solution partielle u, fonction de point nulle sur CA et égale à $f(\xi)$ ou $f(a - x)$ sur CB, voici comment la méthode de Riemann permettra d'obtenir sa valeur, u_0, à l'origine O, qui, par rapport aux axes fixes Cξ, Cη, est un point *quelconque* du plan. Ajoutons les deux équations proposées

$$S + U = 0, \qquad s + u = 0,$$

après les avoir multipliées respectivement par $u\,d\sigma$ et par $-U\,d\sigma$, où $d\sigma$ désigne l'élément de l'aire σ comprise entre les deux axes Ox, Oy et la ligne courbe ou brisée, qui est ici ACB, à laquelle se rapportent les *données initiales* caractéris-

par un contour quelconque aux divers points duquel on se donne soit la fonction φ, soit la dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ dans le sens normal, soit même, plus

---

tiques de la solution qu'on cherche; puis intégrons dans toute l'étendue σ le résultat obtenu, évidemment identique à

$$\left(\frac{d.u\mathrm{Q}}{dx} - \frac{d.\mathrm{U}p}{dy}\right)d\sigma = 0,$$

et dont le premier membre sera tout entier transformable, par les formules (20) de la page 92*, en intégrales prises le long du contour OACBO, ou s, de l'espace σ. Nous aurons ainsi

$$(\beta)\qquad \int_s [u\mathrm{Q}\cos(n,x) - \mathrm{U}p\cos(n,y)]\,ds = 0.$$

Or les éléments de cette intégrale s'annulent le long des parties AC, BO du contour s, où $u\mathrm{Q} = 0$ et $\cos(n,y) = 0$; mais ils deviennent respectivement $p\,dx = du$, $-\mathrm{U}p\,d\xi = \mathrm{U}f'(\xi)\,d\xi$ le long des deux autres parties OA, CB, où $\cos(n,x) = 0$, $\cos(n,y) = \mp 1$, $ds = (dx$ ou $d\xi)$. Leur somme, depuis le point O, où $u = u_0$, jusqu'en A où $u = 0$, se réduit donc à $-u_0$; et, le long de CB, où, U étant $\frac{2}{\pi}\mathrm{J}_0(2\sqrt{bx}) = \frac{2}{\pi}\mathrm{J}_0\left[2\sqrt{b(a-\xi)}\right]$, ξ croît d'ailleurs de zéro à a, elle est $\frac{2}{\pi}\int_0^a \mathrm{J}_0\left[2\sqrt{b(a-\xi)}\right]f'(\xi)\,d\xi$. Donc il vient, en vertu de (β), après transposition du terme $-u_0$,

$$(\gamma)\qquad u_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^a \mathrm{J}_0\left[2\sqrt{b(a-\xi)}\right]f'(\xi)\,d\xi.$$

Ce sera l'expression cherchée de u si, rapportant le plan aux axes Cξ, Cη, c'est-à-dire posant $x = a - \xi$, $y = b - \eta$ (d'où $dx = -d\xi$, $dy = -d\eta$), ce qui ne modifie pas la formule de s ni, par suite, l'équation

$$s + u = 0,$$

on appelle de plus x, y les deux nouvelles coordonnées a, b de l'ancienne origine O. Alors la solution particulière (γ) devient $\frac{2}{\pi}\int_0^x \mathrm{J}_0\left[2\sqrt{y(x-\xi)}\right]f'(\xi)\,d\xi$, et, en y joignant la solution analogue qui se réduit à zéro sur CB, à $\varphi(\eta)$ sur CA, puis la première solution trouvée $c\mathrm{U}$, c'est-à-dire $\frac{2}{\pi}c\mathrm{J}_0(2\sqrt{xy})$, nous aurons enfin l'intégrale générale de l'équation $\frac{d^2u}{dx\,dy} + u = 0$,

$$(\delta)\qquad \left\{\begin{aligned} u = \frac{2}{\pi}\Big\{c\mathrm{J}_0(2\sqrt{xy}) &+ \int_0^x \mathrm{J}_0\left[2\sqrt{y(x-\xi)}\right]f'(\xi)\,d\xi \\ &+ \int_0^y \mathrm{J}_0\left[2\sqrt{x(y-\eta)}\right]\varphi'(\eta)\,d\eta\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Poisson l'avait obtenue au moyen d'un développement en séries, complété par la réduction des séries à des intégrales définies (*Théorie mathématique de la chaleur*, par Poisson, 1835; n°s 77 et 78, p. 151).

généralement, une relation entre φ et $\frac{d\varphi}{dn}$ ou entre φ et $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$. Ce problème (il est bon de le dire pour motiver la grande place que nous lui consacrons) présente un intérêt considérable, à raison surtout d'autres questions importantes de Physique mathématique qui s'y ramènent.

Les deux principales sont celle de la torsion d'un cylindre élastique plein, dont la section normale σ a une forme donnée quelconque, et celle du régime uniforme, supposé parfaitement continu, d'un liquide, coulant le long d'un tube de même section σ, mouillé par ce liquide. Dans les deux cas, l'on est conduit à chercher, pour tous les points (x, y) intérieurs à σ, une fonction ψ qui satisfasse à l'équation indéfinie

$$(56) \qquad \Delta_2 \psi + \text{une constante donnée } K = 0,$$

et qui, de plus, s'annule sur tout le contour de σ. Or si, observant que, par exemple, $\Delta_2\psi + K = \Delta_2\left(\psi + K\frac{x^2}{2}\right)$, on appelle φ la somme $\psi + K\frac{x^2}{2}$, de manière à poser

$$(57) \qquad \psi = -K\frac{x^2}{2} + \varphi,$$

l'équation (56) deviendra évidemment $\Delta_2\varphi = 0$; et la nouvelle fonction inconnue φ exprimera les températures stationnaires de σ, dans l'hypothèse $\psi = 0$, c'est-à-dire $\varphi = K\frac{x^2}{2}$, aux divers points du contour.

Les méthodes rigoureuses indiquées ci-dessus ne permettant de former cette fonction φ que pour certaines formes de σ, soit rectangulaires, soit annulaires, à côtés droits ou courbes, il y a lieu de chercher, pour les autres cas, quelque procédé tout au moins approximatif d'intégration, plus ou moins analogue à ceux dont il a été succinctement question vers la fin du n° 444* (p. 395*). C'est ce qu'a fait, dans un Mémoire de 1843 [1], M. de Saint-Venant, qui y propose d'adopter, pour la fonction φ, la forme la plus simple possible, savoir, celle d'un polynôme ordonné suivant les puissances ascendantes de x, y, et

---

[1] *Sur un mode d'interpolation applicable à des questions relatives au mouvement des eaux et suppléant à l'intégration, souvent impossible, des équations aux dérivées partielles* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 13 novembre 1843).

d'un degré d'autant plus élevé qu'il s'agit d'obtenir une approximation plus grande.

Il rend d'abord cette expression, intégrale exacte de l'équation indéfinie $\Delta_2\varphi = 0$, en donnant à l'ensemble de ses termes d'un même degré quelconque n la forme, à deux coefficients arbitraires A_n, B_n,

$$(58)\quad A_n \frac{(x+y\sqrt{-1})^n + (x-y\sqrt{-1})^n}{2} + B_n \frac{(x+y\sqrt{-1})^n - (x-y\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}},$$

forme évidemment composée de solutions particulières $f(x \pm y\sqrt{-1})$ de $\Delta_2\varphi = 0$ [p. 368*, form. (109)], et dont le développement est

$$(59)\quad \left\{ \begin{aligned} & A_n\left[x^n - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}y^4 - \ldots\right] \\ & \quad + B_n\left[\frac{n}{1}x^{n-1}y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}y^3 + \ldots\right]. \end{aligned} \right.$$

Ayant ainsi obtenu pour φ l'expression générale, parfaitement continue dans tout le plan et affectée de coefficients A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n en nombre $2n+1$ (quand on l'arrête aux termes de degré n),

$$(60)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi = {} & A_0 + A_1x + B_1y + A_2(x^2 - y^2) + B_2(2xy) \\ & + A_3(x^3 - 3xy^2) + B_3(3x^2y - y^3) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

M. de Saint-Venant dispose des $2n+1$ constantes A, B de manière à faire vérifier exactement, par cette expression de φ, la condition aux limites, en $2n+1$ points régulièrement espacés le long du contour; après quoi il lui suffit de s'assurer que la même condition se trouve, d'elle-même et au degré requis d'approximation, satisfaite en tous les points intermédiaires.

Cette méthode, applicable toujours et même (à l'exclusion des précédentes) quand la condition définie ou aux limites n'est pas linéaire, devient évidemment exacte dans le cas de contours ayant comme équation le résultat même de la substitution, dans la condition définie considérée, des valeurs de φ et de $\frac{d\varphi}{dn}$ $\left(\text{ou de } \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}\right)$ données par (60). Or il n'est pas rare que de tels contours soient, comme l'expression (60) de φ, qui leur convient, simples et, par suite, intéressants : l'étude, par M. de Saint-Venant lui-même [1], de la

[1] En 1853. *Voir* le Chapitre IX du *Mémoire sur la torsion des prismes,* au *Recueil des Savants étrangers,* de l'Académie des Sciences de Paris, t. XIV.

torsion dans des cylindres de formes très variées découvertes à peu près de cette manière, l'a surabondamment établi.

Afin de montrer comment on procédera, essayons de former φ et ψ pour les deux cas de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et du triangle équilatéral, de hauteur H, qui a ses trois côtés définis séparément par les équations

(61) $$y=0, \qquad H-y\mp x\sqrt{3}=0,$$

ou, ensemble, par la relation unique

(62) $$y[(H-y)^2-3x^2]=0.$$

A raison de la symétrie de ces figures, ψ et, par suite, φ devront être des fonctions paires en x; d'où il résultera, dans (60), $A_1=0$, $B_2=0$, $A_3=0$, ...

Cela posé, s'il s'agit d'abord de l'ellipse, où la *parité* non moins évidente de φ en y exigera encore l'annulation de B_1, B_3, ..., réduisons le second membre de (60) aux termes affectés des deux premiers coefficients encore subsistants A_0, A_2, et déterminons ceux-ci de manière que la condition, $\varphi=\frac{1}{2}Kx^2$, relative au contour, soit satisfaite pour les deux systèmes de valeurs $x^2=0, y^2=b^2$ et $x^2=a^2, y^2=0$ des variables x^2, y^2, c'est-à-dire aux quatre sommets. Il vient, à cet effet, les deux équations $A_0-A_2b^2=0$, $A_0+A_2a^2=\frac{1}{2}Ka^2$; d'où $(A_0, A_2)=\frac{K}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1, \frac{1}{b^2}\right)$. Or ces valeurs, substituées dans

$$\varphi=A_0+A_2(x^2-y^2),$$

donnent finalement, pour l'expression (57) de ψ,

(63) $$\psi=\frac{K}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),$$

formule exacte et non pas seulement approchée, car elle vérifie identiquement la condition $\psi=0$ tout le long du contour elliptique.

S'il s'agit, au contraire, du triangle équilatéral, gardons dans le second membre de (60) assez de termes pour pouvoir satisfaire à la relation définie $\varphi=\frac{1}{2}Kx^2$ aux trois sommets et au milieu des côtés, savoir (en partant du milieu de la base et allant vers le sommet opposé) pour les quatre systèmes suivants de valeurs des variables x^2, y: $x^2=0$ et $y=0$; $x^2=\frac{1}{3}H^2$ et $y=0$; $x^2=\frac{1}{12}H^2$ et $y=\frac{1}{2}H$; $x^2=0$

et $y = \mathrm{H}$. Il nous faudra donc conserver les quatre premiers coefficients subsistants, ou prendre

$$(64) \qquad \varphi = \mathrm{A}_0 + \mathrm{B}_1 y + \mathrm{A}_2(x^2 - y^2) + \mathrm{B}_3(3x^2y - y^3).$$

Or la condition relative au premier système indiqué de valeurs donne $\mathrm{A}_0 = 0$, et il résulte ensuite de celle qui concerne le suivant, $\mathrm{A}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{K}$; après quoi l'on trouve de même, par l'emploi du troisième, $\mathrm{B}_1 = \frac{1}{4}\mathrm{KH}$, et, grâce au quatrième, $\mathrm{B}_3 = -\frac{1}{4}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}$. Il vient donc, en substituant ces valeurs dans (64), puis l'expression de φ ainsi formée, dans (57) :

$$(65) \qquad \psi = \frac{\mathrm{K}y}{4\mathrm{H}}[(\mathrm{H} - y)^2 - 3x^2].$$

On voit que, ici encore, l'annulation de la fonction trouvée ψ reproduit l'équation du contour, comprise dans (62). Ainsi la solution (65) est rigoureuse et non pas seulement approchée.

On lui donne sa forme symétrique naturelle, indépendante des axes coordonnés choisis, en observant que les distances de l'origine aux trois côtés (61) et à trois parallèles à ces côtés menées par (x, y) sont respectivement zéro et y, $\frac{1}{2}\mathrm{H}$ et $\frac{1}{2}(y + x\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}\mathrm{H}$ et $\frac{1}{2}(y - x\sqrt{3})$; d'où il suit, par des soustractions évidentes, que les distances p, p', p'' d'un point intérieur quelconque (x, y) aux trois côtés du triangle équilatéral ont les valeurs

$$(66) \quad p = y, \quad (p', p'') = \frac{1}{2}(\mathrm{H} - y \mp x\sqrt{3}), \quad \text{donnant } p + p' + p'' = \mathrm{H},$$

et que la formule (65) devient

$$(67) \qquad \psi = \mathrm{K}\frac{pp'p''}{\mathrm{H}} = \mathrm{K}\frac{pp'p''}{p + p' + p''}.$$

La valeur maxima de ψ, au centre où les trois facteurs variables p, p', p'' égalent chacun le tiers de leur somme constante H, est $\frac{1}{27}\mathrm{KH}^2$, c'est-à-dire le produit de $\frac{\mathrm{K}}{9\sqrt{3}} = 0{,}06415\mathrm{K}$ par la surface $\frac{\mathrm{H}^2}{\sqrt{3}}$ du triangle, tandis que, d'après (63), dans le cas d'un cercle de rayon $a = b$, le maximum de ψ, encore au centre, serait $\frac{1}{4}\mathrm{K}a^2$, ou le produit de $\frac{\mathrm{K}}{4\pi} = 0{,}07958\mathrm{K}$ par la surface πa^2.

Pour mettre en évidence, d'une autre manière encore, la symétrie propre au second membre de (65), on pourrait y remplacer les coordonnées rectangulaires x, y par des coordonnées polaires r, θ comptées à partir du centre de gravité du triangle comme pôle; ce qui donnerait $x = r\cos\theta$, $y = \frac{1}{3}\mathrm{H} + r\sin\theta$ et transformerait, par suite, l'expression (65) de ψ, après quelques réductions, en celle-ci,

$$(68)\qquad \psi = \frac{\mathrm{KH}^2}{27}\left[1 - \frac{27}{4}\frac{r^2}{\mathrm{H}^2}\left(1 + \frac{r}{\mathrm{H}}\sin 3\theta\right)\right].$$

Elle reprend bien les mêmes valeurs chaque fois que l'azimut θ croît du tiers d'une circonférence 2π.

Terminons par un exemple simple d'intégration approximative, en cherchant à former de même les formules de φ et ψ pour le carré dont les côtés de longueur $2a$, parallèles aux axes, font partie du système de droites que représente l'équation $(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) = 0$. Dans ce but, attribuons à φ les trois premiers termes du second membre de (60) compatibles avec le genre de symétrie du carré, c'est-à-dire pairs en x et y, savoir,

$$\mathrm{A}_0,\quad \mathrm{A}_2(x^2 + y^2),\quad \mathrm{A}_4(x^4 - 6x^2y^2 + y^4);$$

et déterminons les trois constantes A_0, A_2, A_4 de manière que la condition $\psi = 0$ ou $\varphi = \mathrm{K}\frac{x^2}{2}$ soit exactement vérifiée aux milieux $(x^2 = 0, y^2 = a^2)$, $(x^2 = a^2, y^2 = 0)$ des quatre côtés, ainsi qu'aux quatre sommets $(x^2 = a^2, y^2 = a^2)$. L'expression (57) de ψ, obtenue presque immédiatement, sera

$$(69)\qquad \psi = \frac{\mathrm{K}}{4}\left(a^2 - x^2 - y^2 + \frac{a^4 - x^4 + 6x^2y^2 - y^4}{5a^2}\right).$$

Le rapport de cette expression le long d'un côté quelconque, le long du côté $y = a$ par exemple, à sa valeur relative au centre $(x = 0, y = 0)$ du carré, est $\frac{1}{6}\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, quantité positive, entre les deux limites $x^2 = 0$, $x^2 = a^2$, et non pas rigoureusement nulle comme on l'aurait désiré. Or son maximum, évidemment atteint pour $x^2 = \frac{1}{2}a^2$, est $\frac{1}{24}$ ou quatre pour cent environ, écart assez sensible, même pratiquement, comme l'on voit.

Mais une correction finale, que comporteront toujours les intégrations approchées dont il s'agit dans ce numéro, permettra de réduire l'erreur due au mode d'interpolation choisi. Elle consiste à modifier

le terme constant A_0 de la manière qu'il faut pour annuler exactement la valeur moyenne de ψ le long du contour. A cet effet, il suffira, dans l'exemple actuel, de former l'expression du second membre de (69) sur un côté quelconque, le côté $y = a$, par exemple, puis d'en prendre, de $x = 0$ à $x = a$, la moyenne

$$\frac{K}{20a^3}\int_0^a (a^2x^2 - x^4)\,dx = \frac{K}{4}\frac{2a^2}{75},$$

qui sera évidemment celle de ψ sur tout le contour $8a$, et de retrancher enfin cette moyenne de (69). Il viendra l'expression *corrigée*

$$(70) \qquad \psi = \frac{K}{4}\left(\frac{73}{75}a^2 - x^2 - y^2 + \frac{a^4 - x^4 + 6x^2y^2 - y^4}{5a^2}\right),$$

dont le rapport à sa valeur au centre ($x = 0$, $y = 0$) est, sur le côté $y = a$,

$$\frac{1}{44}\left[-1 + \frac{15}{2}\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\right],$$

et n'oscille ainsi, le long du côté, que de $-\frac{1}{44}$ à $\frac{7}{8}\frac{1}{44}$. L'erreur relative commise sur ψ, dans la vérification de la condition au contour, se trouve donc réduite de près de moitié quant à son maximum; mais, surtout, elle est *annulée en moyenne* et, par suite, fort atténuée *dans son influence générale* sur les valeurs obtenues de ψ à l'intérieur du carré $\sigma = 4a^2$. Aussi la formule (70) suffira-t-elle dans la pratique, malgré son excessive simplicité comparativement à l'expression exacte de ψ, en série de cosinus circulaires et hyperboliques, que donne le procédé du n° 448* (p. 407*). C'est ce que montre l'évaluation de la valeur moyenne, particulièrement importante à considérer, de ψ dans toute l'étendue σ du carré. Conclue presque sans calculs de (70), cette moyenne générale est $\frac{7}{200}K\sigma^2$, ou $(0,035)K\sigma^2$, et ne se trouve en défaut sur la vraie, $(0,03514\ldots)K\sigma^2$, déduite très péniblement de la série transcendante, que d'une fraction de sa valeur inférieure à $\frac{1}{240}$.

QUARANTE-SIXIÈME LEÇON.

PROCÉDÉS D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, POUR LES CORPS D'UNE ÉTENDUE CENSÉE INFINIE : ÉQUATIONS NE CONTENANT QUE DES DÉRIVÉES D'UN MÊME ORDRE PAIR, ET QUI S'INTÈGRENT PAR DES POTENTIELS.

451*. — Dans quelles circonstances les dimensions d'un corps peuvent être supposées infinies; des simplifications qui s'y produisent.

Un certain nombre de phénomènes, qu'on pourrait désigner par le nom générique de *rayonnements indéfinis* autour d'un centre et qui sont des plus importants à cause de leur simplicité, restent (quant à leurs circonstances bien visibles) localisés, tantôt, dans le voisinage d'une petite portion de la surface des corps ou des milieux matériels dans lesquels nous les observons, et tantôt, loin de cette surface, aux environs d'une partie restreinte de leur intérieur. La cause qui les produit a précisément pour siège la région superficielle ou intérieure, relativement peu étendue, dont il est question; et son influence *rayonne* (si l'on peut ainsi dire) tout-autour, jusqu'à des distances considérables, mais en s'éteignant assez vite pour n'avoir plus que des effets insensibles auprès des limites du corps, autres du moins que la surface de départ (s'il y en a une).

Il est clair que la présence de pareilles limites, jusqu'où le phénomène n'arrive, en quelque sorte, qu'évanoui, ne peut *généralement* pas modifier d'une manière appréciable son évolution là où il est perceptible; ce qui permet de raisonner, dans l'étude des faits produits autour des centres de rayonnement ou d'émanation, comme si les limites du corps étaient reculées à l'infini soit de tous les côtés, quand il s'agit d'un phénomène intérieur, soit du moins, quand il s'agit d'un phénomène superficiel, dans les directions comprises d'un même côté du plan tangent mené, à la surface où il prend naissance, au centre de son lieu d'origine, supposé assez restreint pour n'offrir qu'une courbure négligeable, c'est-à-dire des différences d'orientation très faibles entre ses divers éléments.

On est donc conduit à imaginer des corps de dimensions indéfinies

mais où, en général, les quantités u, v, w, ... exprimant leurs états physiques tendent partout vers zéro aux grandes distances $\imath$ de l'origine des coordonnées x, y, z. Alors, au lieu de relations spéciales aux surfaces ainsi écartées, relations qui, même simples, étaient presque toujours d'une vérification difficile à cause des points *précis* (x, y, z) qu'elles concernaient, on n'a plus qu'à astreindre u, v, w, ... à s'évanouir *asymptotiquement*, c'est-à-dire à l'infini, suivant les directions où ces surfaces ont disparu : condition la plus simple possible, que l'on reconnaît, par les méthodes du n° 441* (p. 381*), pouvoir suppléer parfaitement les précédentes au point de vue de la détermination complète des problèmes, en tenant cependant compte, dans certains cas, du degré de petitesse (par rapport à l'inverse de $\imath$) qu'imposent les équations indéfinies elles-mêmes aux quantités évanouissantes. Or ce remplacement de conditions *précises*, par un *évanouissement asymptotique* qui n'est qu'une *tendance* de u, v, w, ... à vérifier les relations $(u, v, w, \ldots) = 0$, introduit dans les problèmes une simplification considérable.

Aussi plusieurs questions, inabordables pour des corps limités, deviendront-elles accessibles pour les corps ou milieux indéfinis. Et quant à celles qu'on pouvait traiter par des séries multiples dans le cas de dimensions finies, leur simplification consistera le plus souvent en ce que le degré de multiplicité des séries s'y abaissera de moitié. C'est ce que montreront plusieurs des exemples suivants, mais surtout, vers la fin de la XLIXe Leçon, l'emploi de la formule de Fourier, pour décomposer les résultats en solutions simples analogues à celles que nous avons considérées dans les deux Leçons précédentes, et pour déterminer leurs coefficients.

Contentons-nous de mentionner dès à présent, à l'appui de cette assertion, le problème des températures stationnaires φ, dans un prisme sur la première base $z = 0$ duquel la dérivée $\left(-\frac{d\varphi}{dz}\right)$, suivant le sens normal, a une expression donnée $f(x, y)$, et dont la surface latérale, ainsi que l'autre base $z = L$, sont maintenues à la température zéro. Nous avons déjà vu que l'hypothèse d'une longueur infinie simplifiait considérablement chaque terme de la solution, en réduisant la seconde expression (31) de z [p. 405*] à la première (33). Malgré cela, tant que la base reste finie, la solution donnée $\varphi = \Sigma C\Phi Z$ garde son caractère compliqué de série ou somme *quadruple :* car la fonction Φ des deux variables non principales x, y dépend de *deux* paramètres i, j, comme le montre dans le cas le plus simple son expression (29) [p. 404*], d'où il suit que $\Sigma C\Phi Z$ est déjà une somme *double* avec des coeffi-

cients C donnés; et elle devient une somme *quadruple* après le remplacement de ceux-ci par les intégrales doubles, dans le genre de (30) [p. 404*], qui les expriment. Mais il n'en sera plus de même si la base $z=0$ devient infinie sans que la fonction arbitraire donnée $f(x, y)$ diffère de zéro ailleurs que dans une région limitée, voisine de l'origine.

Nous allons voir qu'alors, par le fait même que les conditions $\varphi=0$ relatives aux faces latérales n'auront pas besoin d'être vérifiées si ce n'est *à l'infini*, une intégrale *double* de la classe des potentiels suffira pour exprimer φ.

452*. — Intégration par les potentiels, dans des cas où les équations indéfinies, linéaires et à coefficients constants, ne contiennent que des dérivées paires d'un même ordre. — Premier exemple : problème de l'écoulement d'un liquide par un petit orifice, etc.

Commençons par des questions où les équations indéfinies, linéaires et à coefficients constants, ne contiennent que des dérivées d'un même ordre pair.

La plus simple peut-être est celle que je viens de poser, des températures stationnaires φ dans un corps remplissant tout l'espace situé du côté des z positifs, quand ces températures, nulles aux distances infinies de l'origine, ont, *à l'arrivée* sur le plan des xy, leur dérivée suivant le sens normal $\left(-\frac{d\varphi}{dz}\right)$ égale à une fonction donnée $f(x, y)$, nulle aussi partout, sauf dans une région assignée où elle est arbitraire. Au point de vue physique, cette condition spéciale à $z=0$ signifie que la couche superficielle $z=0$ du corps est imperméable à la chaleur, excepté dans la région désignée, par où pénètre à l'intérieur un *flux* ou courant calorifique, que mesure proportionnellement sur chaque élément d'aire la dérivée $\left(-\frac{d\varphi}{dz}\right)=f(x, y)$. Après son entrée dans le corps, ce courant de chaleur y diverge en tous sens, suivant les trajectoires orthogonales à la famille $\varphi=$ const. de surfaces, en conservant partout une valeur ou un *débit*, à travers l'unité d'aire de ces surfaces, exprimé de même proportionnellement par la dérivée changée de signe, $\Delta_1\varphi$, de la température suivant la trajectoire orthogonale suivie; et il se répand de la sorte, pour finalement s'y *dissiper*, dans la masse du corps, maintenue sensiblement, sauf aux distances finies de l'origine, à la température zéro.

Or il se trouve, en vertu des équations de l'Hydrodynamique, que, si le corps était remplacé par un liquide sans frottements, et la couche

superficielle $z=0$, dans toute sa partie imperméable, par une paroi fixe, mais, dans sa région perméable, par un orifice dont le *débit* (vers le dehors), ou volume fluide écoulé par unité de temps, serait, pour l'unité d'aire et à une époque quelconque, $-\frac{d\varphi}{dz}$ comme le flux de chaleur dans l'état stationnaire, il n'y aurait, en chaque point (x, y, z), d'autre différence entre le mouvement de la chaleur et celui du fluide qu'un renversement exact de sens, le courant de chaleur devenant la vitesse même du liquide, prise en signe contraire.

Le problème d'Hydrodynamique, comme celui qui concerne la température, revient donc à former une fonction φ qui satisfasse à l'équation $\Delta_2\varphi=0$ dans tout l'espace où z est positif, et qui s'y évanouisse aux distances infinies, en ayant de plus, pour sa dérivée $\frac{d\varphi}{dz}$ à la limite $z=0$, la fonction $-f(x, y)$ donnée. Or, d'après des propriétés étudiées plus haut (p. 224*), le potentiel inverse d'une couche matérielle $\int dm$ étalée sur le plan des xy, et y possédant une densité superficielle (ou masse par unité d'aire) égale à $\frac{f(x, y)}{2\pi}$, vérifie précisément toutes ces conditions. Donc la fonction φ demandée se confond avec lui et, en appelant ξ, η les coordonnées d'un point quelconque de la couche, ou du plan des xy, il vient

$$(1) \qquad \varphi=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

Une intégrale double suffit pour l'exprimer, comme nous nous proposions de le reconnaître. Les limites d'intégration, que nous écrivons simplement $\pm\infty$, pourront d'ailleurs être réduites à celles mêmes de l'*orifice*, ou de la région *perméable* de la couche superficielle, puisque, hors de là, le facteur $f(\xi, \eta)$ s'annulera et fera évanouir tous les éléments.

433*. — **Deuxième exemple : équilibre intérieur d'un solide élastique dont les parties profondes sont maintenues fixes, pendant que sa surface éprouve des pressions ou des déplacements connus, s'annulant hors d'une région restreinte où ils sont arbitraires; forme générale de la solution.**

La théorie de l'équilibre d'élasticité nous fournira un deuxième exemple, comprenant plusieurs cas, où s'emploient utilement, à tour de rôle, tous les principaux potentiels (à trois variables x, y, z) de couches planes de matière.

Il s'agira de déterminer, dans un corps élastique occupant encore tout l'espace où les z sont positifs, de petits déplacements u, v, w (suivant les axes), qui satisfassent aux équations indéfinies (115) de la page 371* [où l'on aura $Z = 0$], et qui s'annulent aux distances infinies de l'origine. Mais, de plus, à la limite $z = 0$, ces déplacements ou, à défaut de certains d'entre eux, les composantes de même sens, p_x, p_y, p_z, de la pression extérieure, exprimées (à un facteur constant près) par les formules

$$(2)\qquad \begin{cases} p_x = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}\right), \qquad p_y = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dw}{dy} + \dfrac{dv}{dz}\right), \\ p_z = -\dfrac{dw}{dz} - \dfrac{1-k}{2k}\left(\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dw}{dz}\right), \end{cases}$$

devront, aux divers points (ξ, η) de la surface, égaler trois fonctions de ξ, η, données arbitrairement pour tout l'intérieur de régions finies, et nulles hors de ces régions.

Or nous avons trouvé qu'on satisfaisait aux équations citées (115) au moyen des formules (116) de la page 372*, dans lesquelles, d'après (117) [p. 372*] où il faudra faire ici $Z = 0$, la fonction auxiliaire φ sera tenue de vérifier la relation $\Delta_2 \Delta_2 \varphi = 0$. Si nous généralisons ces expressions (116) de u, v, w, en leur en superposant d'autres analogues qui s'en déduisent par une ou par deux permutations tournantes effectuées sur x, y, z et u, v, w, il viendra, en appelant A, B, C les trois fonctions auxiliaires introduites pour jouer le rôle de φ dans (116),

$$(3)\qquad (u, v, w) = (k+1)\,\Delta_2(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) - \frac{d\left(\dfrac{d\mathrm{A}}{dx} + \dfrac{d\mathrm{B}}{dy} + \dfrac{d\mathrm{C}}{dz}\right)}{d(x, y, z)},$$

avec les conditions $\Delta_2(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) = 0$. Pour simplifier cette triple formule (3), prenons comme fonctions auxiliaires, à la place de A, B, C, leurs paramètres différentiels du second ordre $\Delta_2(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ ou mieux encore les produits $(k+1)\,\Delta_2(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$, que nous appellerons $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; et désignons par H l'expression $\dfrac{d\mathrm{A}}{dx} + \dfrac{d\mathrm{B}}{dy} + \dfrac{d\mathrm{C}}{dz}$, dont le paramètre Δ_2 sera évidemment $\dfrac{1}{k+1}\left(\dfrac{d\mathcal{A}}{dx} + \dfrac{d\mathcal{B}}{dy} + \dfrac{d\mathcal{C}}{dz}\right)$. Nous aurons

$$(4)\qquad (u, v, w) = (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) - \frac{d\mathrm{H}}{d(x, y, z)},$$

les quatre fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, H étant astreintes aux relations

$$(5)\qquad \Delta_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0, \qquad (k+1)\,\Delta_2 \mathrm{H} = \frac{d\mathcal{A}}{dx} + \frac{d\mathcal{B}}{dy} + \frac{d\mathcal{C}}{dz}.$$

On vérifie aisément que, grâce à (5), les expressions (4) de u, v, w rendent identiques les équations indéfinies citées (115), quels que soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, H.

Cela posé, adaptons ces expressions (4) de u, v, w à notre problème où il s'agit d'un corps limité par le plan $z=0$, en choisissant pour H le produit, $z\mathfrak{H}$, du facteur z par une fonction $\mathfrak{H}$ de x, y, z, finie et à dérivées finies, même quand z s'annule : forme de H où la présence de z procurera l'avantage de faire, à la surface $z=0$, disparaître un terme de chacune des formules (4). Comme la troisième (4) devient $w=(\mathcal{C}-\mathfrak{H})-z\dfrac{d\mathfrak{H}}{dz}$, il y aura lieu, en vue de maintenir son analogie avec les deux premières (4), savoir $(u,v)=(\mathcal{A},\mathcal{B})-z\dfrac{d\mathfrak{H}}{d(x,y)}$, de regarder la différence $\mathcal{C}-\mathfrak{H}$ comme une seule fonction. Or, alors, pour avoir $\Delta_2(\mathcal{C}-\mathfrak{H})=0$ pareillement à $\Delta_2(\mathcal{A},\mathcal{B})=0$, il faudra, vu l'annulation séparée de $\Delta_2\mathcal{C}$, prendre aussi $\Delta_2\mathfrak{H}=0$. Posons donc, afin d'éviter toute confusion, $\mathcal{A}=\alpha$, $\mathcal{B}=\beta$, $\mathcal{C}-\mathfrak{H}=\gamma$ ou $\mathcal{C}=\mathfrak{H}+\gamma$; et, comme, par suite de

$$\frac{d^2(z\mathfrak{H})}{dz^2}=z\frac{d^2\mathfrak{H}}{dz^2}+2\frac{d\mathfrak{H}}{dz},$$

l'on aura

$$\Delta_2 \mathrm{H}=\Delta_2(z\mathfrak{H})=z\,\Delta_2\mathfrak{H}+2\frac{d\mathfrak{H}}{dz}=2\frac{d\mathfrak{H}}{dz},$$

la dernière relation (5) deviendra, après une réduction évidente,

$$(6)\qquad (2k+1)\frac{d\mathfrak{H}}{dz}=\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}.$$

Nous la simplifierons le plus possible, en appelant k' la somme $2k+1$ et Φ le produit $(2k+1)\mathfrak{H}$ ou $k'\mathfrak{H}$. Alors les formules (4) et (5), transformées en α, β, γ, Φ, seront

$$(7)\qquad \begin{cases} (u,v,w)=(\alpha,\beta,\gamma)-\dfrac{z}{k'}\,\dfrac{d\Phi}{d(x,y,z)}, \\ \text{où } k'=2k+1, \text{ et avec les conditions} \\ \Delta_2(\alpha,\beta,\gamma,\Phi)=0, \qquad \dfrac{d\Phi}{dz}=\dfrac{d\alpha}{dx}+\dfrac{d\beta}{dy}+\dfrac{d\gamma}{dz}. \end{cases}$$

454*. — Premier cas, où ce sont les déplacements à la surface que l'on donne.

Cela posé, formons d'abord les expressions de α, β, γ, Φ dans le cas le plus simple, qui est celui où l'on connaît, à la surface $z=0$, les

déplacements mêmes u, v, w, fonctions de ξ, η nulles hors de certaines régions, et que nous désignerons par u_0, v_0, w_0.

Comme les trois premières formules (7) donnent (pour $z=0$) $u=\alpha$, $v=\beta$, $w=\gamma$, on vérifiera tout à la fois ces relations propres à la surface et les équations indéfinies $\Delta_2(\alpha, \beta, \gamma)=0$, en prenant α, β, γ proportionnels non plus, comme φ dans le problème précédent, à des potentiels inverses de couches $\int dm$ étalées sur cette surface $z=0$, mais à leurs dérivées premières en z, dont le Δ_2 sera lui-même évidemment nul, et qui (p. 224*) se réduiront, pour $z=0$, aux produits respectifs de -2π par les densités superficielles des couches ; d'où résultera aisément la détermination de ces densités et, par suite, la possibilité de calculer les potentiels. Il est clair, en effet, qu'on pourra se donner simplement u_0, v_0, w_0 comme densités, et faire α, β, γ égaux aux quotients respectifs, par -2π, des potentiels correspondants, que nous appellerons U, V, W pour abréger, mais dont l'expression sera

$$(8)\qquad (\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}) = \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(u_0, v_0, w_0)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

Ainsi, ces trois potentiels une fois évalués en fonction de x, y, z, on posera

$$(9)\qquad \alpha = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\mathrm{U}}{dz}, \qquad \beta = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\mathrm{V}}{dz}, \qquad \gamma = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\mathrm{W}}{dz}.$$

Reste à déterminer Φ de manière à vérifier $\Delta_2\Phi=0$ et la dernière (7). Or celle-ci devient, au diviseur près 2π, par la substitution des valeurs (9) de α, β, γ,

$$\frac{d}{dz}\left(2\pi\Phi + \frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy} + \frac{d\mathrm{W}}{dz}\right) = 0;$$

et il suffit, pour y satisfaire, ainsi qu'à $\Delta_2\Phi=0$, de poser

$$(10)\qquad \Phi = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy} + \frac{d\mathrm{W}}{dz}\right).$$

Les expressions cherchées de u, v, w seront donc, en portant dans les trois premières (7) les valeurs (9) et (10) de $\alpha, \beta, \gamma, \Phi$,

$$(11)\qquad (u, v, w) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})}{dz} + \frac{z}{2\pi k'}\frac{d\left(\frac{d\mathrm{U}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}}{dy} + \frac{d\mathrm{W}}{dz}\right)}{d(x, y, z)},$$

pourvu toutefois qu'elles s'évanouissent asymptotiquement, pour $z>0$, aux grandes distances r de l'origine. Or c'est bien ce qui a

lieu; car, lorsque $\imath$ devient très grand, tous les termes des seconds membres de (11) sont de l'ordre de petitesse des dérivées premières en x, y, z de potentiels inverses U, V, W relatifs à des masses limitées, c'est-à-dire, au moins, de l'ordre de $\imath^{-2}$.

455*. — Deuxième cas, où ce sont les pressions extérieures que l'on connaît.

Quand, à la surface $z=0$, on se donne en fonction de ξ, η, non plus les déplacements u_0, v_0, w_0, mais les pressions exercées du dehors, p_x, p_y, p_z, dont les deux premières sont *tangentielles* (c'est-à-dire parallèles à la surface) et la troisième seule, p_z, *normale*, les expressions (7) de u, v, w doivent être choisies de manière que les valeurs (2) des pressions, plutôt que u, v, w eux-mêmes, reçoivent, pour $z=0$, des formes simples. On y parvient en faisant, dans (7), soit α et β nuls, soit Φ nul, et en superposant les solutions ainsi formées. Lorsqu'on prend $\alpha=0$ et $\beta=0$, la dernière (7) conduit à poser $\gamma=\Phi$. Lorsqu'on prend, au contraire, $\Phi=0$, la dernière (7) peut être satisfaite, simplement, ou bien sans annuler γ, en choisissant pour α, β, γ les trois dérivées respectives en x, y, z d'une même fonction φ dont le paramètre Δ_2 soit nul, ou bien dans l'hypothèse $\gamma=0$, ce qui, réduisant alors la dernière (7) à $\frac{d\beta}{dy}=-\frac{d\alpha}{dx}$, montre que β, $-\alpha$ sont les deux dérivées respectives en x et y d'une même fonction, $2\varphi_1$, à paramètre Δ_2 nul afin d'avoir, encore simplement, $\Delta_2(\alpha, \beta,)=0$. Il viendra donc, par l'introduction des trois fonctions auxiliaires Φ, φ, φ_1 ainsi définies,

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{d\varphi}{dx}-\frac{z}{k'}\frac{d\Phi}{dx}-2\frac{d\varphi_1}{dy},\\ v &= \frac{d\varphi}{dy}-\frac{z}{k'}\frac{d\Phi}{dy}+2\frac{d\varphi_1}{dx},\\ w &= \frac{d\varphi}{dz}-\frac{z}{k'}\frac{d\Phi}{dz}+\Phi; \end{aligned}\right.$$

et ces valeurs, portées dans les expressions (2) de p_x, p_y, p_z où l'on doit faire $z=0$, donneront

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} p_x &= -\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dz}+\frac{k}{k'}\Phi\right)+\frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz},\\ p_y &= -\frac{d}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dz}+\frac{k}{k'}\Phi\right)-\frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz},\\ p_z &= -\frac{d}{dz}\left(\frac{d\varphi}{dz}+\frac{1+k}{k'}\Phi\right). \end{aligned}\right.$$

Pour diviser la difficulté, formons la solution totale demandée, par superposition de deux autres plus simples, dont l'une corresponde au cas de pressions purement normales où l'on aura $(p_x, p_y) = 0$, p_z seule recevant ses valeurs données, et dont l'autre corresponde au cas de pressions purement tangentielles, où p_x, p_y aient leurs vraies valeurs, mais où p_z s'annule.

Dans le premier cas, les formules (13) montrent que p_x, p_y se réduiront à zéro, en prenant partout

$$(14) \qquad \Phi = -\frac{k'}{k}\frac{d\varphi}{dz}, \qquad \varphi_1 = 0,$$

et que p_z vaudra alors $\frac{1}{k}\frac{d^2\varphi}{dz^2}$. Ce n'est donc plus, comme dans les numéros précédents, la dérivée première en z d'une fonction à paramètre Δ_2 nul, ni cette fonction même, que l'on donne à la limite $z = 0$, mais bien sa dérivée seconde. Aussi faudra-t-il, pour exprimer simplement que cette dérivée seconde de φ égale kp_z, abandonner le potentiel inverse, et recourir au premier potentiel logarithmique à trois variables d'une couche étalée sur la surface : d'après la formule (40) de la p. 226*, il suffira de choisir φ égal au produit, par $-\frac{k}{2\pi}$, d'un tel potentiel $\int \log(z + r)\,dm$, en attribuant à la couche potentiante $\int dm$, en ses divers points (ξ, η), la densité superficielle p_z. Alors les expressions (12) de u, v, w, à termes tous de l'ordre des dérivées premières d'un tel potentiel logarithmique, s'évanouiront bien (p. 227*) aux distances r infinies ; et toutes les équations du problème seront satisfaites [1].

Dans le second cas, où des actions tangentielles seules p_x, p_y s'exerceront sur la surface, la troisième formule (13) donnera $p_z = 0$, si l'on prend de même, partout,

$$(15) \qquad \Phi = -\frac{k'}{1+k}\frac{d\varphi}{dz};$$

[1] Ce cas, d'actions données, purement normales, s'exerçant à la surface a été, le premier, traité, d'abord en 1828 (*Mém. des Savants étrangers*, t. IV, p. 541), par Lamé et Clapeyron, au moyen d'intégrales quadruples, déduites de la formule de Fourier, trop complexes pour permettre de se représenter le phénomène, puis, le 20 mai 1878 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*), par moi-même, au moyen du premier potentiel logarithmique, trouvé à cet occasion. Le cas suivant, d'actions tangentielles données, et celui où les déplacements à la surface sont connus, ont été résolus quelques années plus tard par M. Valentin Cerruti (*Reale Accademia dei Lincei,* vol. XIII, 1882). Enfin, j'ai traité récemment (*Comptes rendus,* 9 et 16 avril 1888) les deux cas mixtes exposés ci-après.

et alors les deux premières (13) deviendront

$$(16) \qquad p_x = -\frac{1}{1+k}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + \frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz}, \qquad p_y = -\frac{1}{1+k}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} - \frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz}.$$

Nous y *séparerons* φ de φ_1, en les ajoutant et en les retranchant après différentiations respectives soit de la première en x et de la seconde en y, soit de la première en y et de la seconde en x. Dans les résultats figureront les deux expressions

$$-\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) \quad \text{et} \quad -\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2\varphi_1}{dy^2}+\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\right),$$

équivalentes aux dérivées troisièmes $\frac{d^3(\varphi, \varphi_1)}{dz^3}$ d'après $\Delta_2(\varphi, \varphi_1) = 0$; de sorte qu'en résolvant par rapport à ces dérivées troisièmes, il viendra

$$(17) \qquad \frac{d^3\varphi}{dz^3} = (1+k)\left(\frac{dp_x}{dx}+\frac{dp_y}{dy}\right), \qquad \frac{d^3\varphi_1}{dz^3} = -\left(\frac{dp_x}{dy}-\frac{dp_y}{dx}\right).$$

Ici, la dérivée en z, que l'on connaît, des fonctions φ et φ_1, est la troisième. Donc il faudra, utilisant l'équation (43) de la p. 228*, prendre pour ces fonctions les seconds potentiels logarithmiques $\int[-r + z\log(z+r)]\,dm$ de couches $\int dm$ étalées encore sur la surface $z = 0$ et ayant en chaque point (ξ, η) les deux densités superficielles respectives

$$(18) \qquad \frac{1+k}{-2\pi}\left(\frac{dp_x}{dx}+\frac{dp_y}{dy}\right), \quad \frac{1}{2\pi}\left(\frac{dp_x}{dy}-\frac{dp_y}{dx}\right).$$

Or, d'après les considérations exposées au n° 351* (p. 192*) à propos de la différentiation des potentiels, les fonctions φ et φ_1 ainsi formées s'exprimeront aisément au moyen des seconds potentiels logarithmiques de deux couches $\int dm$ ayant pour densités superficielles p_x et p_y; car, en appelant $\mathfrak{P}_x$ et $\mathfrak{P}_y$ ces deux potentiels, on aura, pour ceux dont les densités sont (18),

$$(19) \qquad \varphi = -\frac{1+k}{2\pi}\left(\frac{d\mathfrak{P}_x}{dx}+\frac{d\mathfrak{P}_y}{dy}\right), \qquad \varphi_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{d\mathfrak{P}_x}{dy}-\frac{d\mathfrak{P}_y}{dx}\right).$$

Grâce à ces valeurs de φ, φ_1, et en se souvenant, d'une part, que $\Delta_2(\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y) = 0$, d'autre part, que les dérivées troisièmes de $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$ en z sont $-2\pi p_x$ et $-2\pi p_y$ pour $z = 0$, on constate directement que les conditions (16), relatives à la surface $z = 0$, se trouvent satisfaites. D'ailleurs, les expressions (12) de u, v, w, où Φ est en outre donné par (15), ont tous leurs termes comparables aux dérivées deuxièmes

de seconds potentiels logarithmiques, dérivées évanouissantes aux grandes distances ε (p. 228*); en sorte que les relations $(u, v, w) = 0$ spéciales aux points infiniment éloignés ne sont pas moins bien vérifiées que les autres équations du problème.

456*. — **Troisième et quatrième cas, où l'on se donne, à la surface, soit les composantes tangentielles des déplacements avec la composante normale des pressions, soit la composante normale des déplacements avec les composantes tangentielles des pressions.**

Traitons encore les deux cas *mixtes* où l'on connaît pour $z = 0$, en fonction de ξ, η, soit u_0, v_0 et p_z, soit p_x, p_y et w_0. On y compose aisément les expressions de u, v, w, en ayant l'idée de traiter d'abord, d'après les formules (11) du nº 454*, les cas où l'on se donne, pour $z = 0$, soit les déplacements tangentiels effectifs u_0, v_0, avec un déplacement normal w_0 quelconque, mais que l'on fera nul pour plus de simplicité, soit, au contraire, le déplacement normal effectif w_0, avec des déplacements tangentiels u_0, v_0 arbitraires, mais que l'on choisira de même, pour simplifier, égaux à zéro. Et il suffit évidemment de superposer ensuite, aux expressions respectives de u, v, w ainsi formées, d'autres expressions, empruntées à (12) et donnant soit $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, avec p_z égal à une fonction arbitraire $f(\xi, \eta)$, soit, au contraire, p_x, p_y égaux à deux fonctions arbitraires $f_1(\xi, \eta)$, $f_2(\xi, \eta)$, avec $w_0 = 0$; car, alors, les formules totales, ou de p_z, ou de p_x et p_y, composées en superposant les deux solutions employées dans chaque cas, contiendront, chacune, la fonction arbitraire de ξ, η nécessaire pour lui faire acquérir sur tout le plan $z = 0$ la valeur désirée, et, d'autre part, les expressions totales de u_0, v_0 dans le premier cas, de w_0 dans le second, seront déjà celles qu'il fallait obtenir.

Toute la difficulté consiste donc à déterminer Φ, φ, φ_1, dans (12), de manière que ces formules, spécifiées pour $z = 0$, et les formules (13), donnent

$$\begin{cases} \text{soit } u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad p_z = f(\xi, \eta); \\ \text{soit } p_x = f_1(\xi, \eta), \quad p_y = f_2(\xi, \eta), \quad w_0 = 0. \end{cases}$$

Or, comme l'hypothèse $z = 0$ réduit (12) à

$$(20) \quad u_0 = \frac{d\varphi}{dx} - 2\frac{d\varphi_1}{dy}, \qquad v_0 = \frac{d\varphi}{dy} + 2\frac{d\varphi_1}{dx}, \qquad w_0 = \frac{d\varphi}{dz} + \Phi,$$

il suffira, dans le premier cas, de prendre partout $\varphi = 0$ et $\varphi_1 = 0$; après quoi, pour que l'expression correspondante (13) de p_z, devenue

$-\frac{1+k}{k'}\frac{d\Phi}{dz}$ (pour z nul), se réduise à $f(\xi, \eta)$, on devra choisir Φ égal au produit, par $\frac{k'}{2\pi(1+k)}$, du potentiel inverse d'une couche $\int dm$ étalée sur la surface et de densité superficielle $f(\xi, \eta)$. Afin d'abréger, nous appellerons P ce potentiel et nous poserons, par suite, $\Phi = \frac{k'P}{2\pi(1+k)}$. Alors les valeurs correspondantes (12) de u, v, w pourront s'écrire simplement

$$(21) \qquad (u, v, w) = \frac{k'}{2\pi(1+k)}(0, 0, P) - \frac{z}{2\pi(1+k)}\frac{dP}{d(x, y, z)}.$$

Elles s'expriment, on le voit, au moyen d'un potentiel inverse P et du facteur algébrique z; en sorte que ces valeurs sont analytiquement de la nature de celles, empruntées à (11) [p. 433*], qu'on devra leur adjoindre, ou qui correspondent à des déplacements superficiels ayant les composantes tangentielles u_0, v_0, sans composante normale w_0.

Quant au second cas, où l'on veut que la troisième (20) devienne $w_0 = 0$, on atteindra ce but en posant partout $\Phi = -\frac{d\varphi}{dz}$; ce qui $\left(\text{vu d'ailleurs la valeur } \frac{k'+1}{2} \text{ de } k'-k\right)$ donnera aux expressions (13) de p_x et de p_y la forme, analogue à (16),

$$(22) \qquad p_x = -\frac{k'+1}{2k'}\frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + \frac{d^2\varphi_1}{dy\,dz}, \qquad p_y = -\frac{k'+1}{2k'}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} - \frac{d^2\varphi_1}{dx\,dz}.$$

Ces relations ne différant de (16) qu'en ce que $\frac{2k'}{k'+1}$ y remplace $1+k$, on les vérifiera évidemment au moyen de fonctions φ et φ_1 déduites de (19) par la même substitution de $\frac{2k'}{k'+1}$ à $1+k$. Comme ici les expressions (22) de p_x et p_y ont les valeurs $f_1(\xi, \eta)$, $f_2(\xi, \eta)$, appelons $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, plutôt que $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, les seconds potentiels logarithmiques des couches $\int dm$ à densités superficielles $f_1(\xi, \eta)$, $f_2(\xi, \eta)$, et nous aurons, en multipliant d'ailleurs φ_1 par 2,

$$(23) \qquad \varphi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k'+1} - 1\right)\left(\frac{d\mathfrak{P}_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{P}_2}{dy}\right), \qquad 2\varphi_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{d\mathfrak{P}_1}{dy} - \frac{d\mathfrak{P}_2}{dx}\right).$$

L'expression de Φ étant en outre $-\frac{d\varphi}{dz}$, les formules (12) de u, v, w deviendront, après quelques réductions évidentes et substitution de

$-\dfrac{d^2(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)}{dz^2}$ à $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{d^2}{dy^2}\right)(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$,

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} (u, v, w) &= \frac{1}{\pi} \frac{d^2(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, 0)}{dz^2} \\ &\quad - \frac{1}{\pi(k'+1)} \frac{d}{d(x, y, z)} \left[\frac{d\left(z\dfrac{d\mathfrak{L}_1}{dz} - \mathfrak{L}_1\right)}{dx} + \frac{d\left(z\dfrac{d\mathfrak{L}_2}{dz} - \mathfrak{L}_2\right)}{dy} \right]. \end{aligned} \right.$$

On remarquera que les seconds potentiels logarithmiques $\mathfrak{L}$, de la forme $\int[-r + z\log(r+z)]\,dm$, ne figurent, chacun, dans ces formules, que par les deux expressions

$$(25) \qquad z\frac{d\mathfrak{L}}{dz} - \mathfrak{L} = \int r\,dm \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\mathfrak{L}}{dz^2} = \int \frac{dm}{r},$$

qui représentent, comme on a vu dans la XXXVe Leçon (pp. 213* et 214*), l'une, le potentiel direct $\int r\,dm$ et, l'autre, la moitié du paramètre différentiel Δ_2 de ce potentiel.

Or on peut observer que la première partie de la solution totale cherchée, savoir, celle qui correspond à des déplacements ayant la composante normale w_0 sans composantes tangentielles, et qu'il est permis d'écrire, d'après (11),

$$(26) \quad (u, v, w) = -\frac{k'+1}{2\pi k'}\left(0, 0, \frac{dW}{dz}\right) + \frac{1}{2\pi k'} \frac{d}{d(x, y, z)} \left(\frac{d.zW}{dz} - W\right),$$

s'exprime aussi par un potentiel direct quand on veut en éliminer le facteur algébrique z. En effet, W désignant, d'après la troisième formule (8), le potentiel inverse d'une couche $\int dm$ étalée sur le plan $z = 0$, le produit zW n'y est autre chose que $\int \dfrac{z\,dm}{r}$ ou $\dfrac{d}{dz}\int r\,dm$, dérivée en z du potentiel direct correspondant; et, d'ailleurs, W égale, comme on vient de voir, $\frac{1}{2}\Delta_2 \int r\,dm$.

En résumé, ce sont des *potentiels directs* qui fournissent naturellement la solution du second cas mixte, où l'on se donne p_x, p_y, w_0, tandis que des *potentiels inverses* convenaient pour le premier cas mixte, défini par les données u_0, v_0, p_z, non moins que pour le premier cas simple, où l'on connaît u_0, v_0, w_0, et tandis que les *deux potentiels logarithmiques à trois variables* ont permis de résoudre l'autre cas simple, plus usuel, où les trois composantes p_x, p_y, p_z de la pression extérieure constituent les données. Le problème traité met donc en œuvre les quatre principaux potentiels (à trois variables) des couches planes et prouve l'utilité de ces sortes de fonctions, car

il est un des plus élémentaires que l'on puisse se poser sur l'importante théorie de l'équilibre intérieur des solides.

Mais nous avons encore à déterminer les trois fonctions arbitraires $f(\xi, \eta)$, $f_1(\xi, \eta)$, $f_2(\xi, \eta)$, densités superficielles des couches dont nous avons appelé ci-dessus P, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ des potentiels, inverse pour la première et logarithmiques de seconde espèce pour les deux autres. Il nous faut, à cet effet, voir, d'après les formules (2) [p. 431*], d'une part, quelle composante normale p_z de pression font naître les déplacements u, v, w définis par (11), dans la solution partielle où l'on se donne u_0, v_0 avec $w_0 = 0$, et, d'autre part, quelles composantes tangentielles p_x, p_y de pression accompagnent de même, dans le second cas mixte, la solution partielle dont les données sont les vraies valeurs de w_0, avec $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$; car ces expressions, ajoutées respectivement à $f(\xi, \eta)$, $f_1(\xi, \eta)$, $f_2(\xi, \eta)$, doivent avoir pour sommes les composantes effectives de pression, soit p_z, soit p_x et p_y, connues dans chaque cas. Or, en se souvenant que $k' - 1 = 2k$, l'on trouve ainsi, dans le premier cas, pour adjoindre à $f(\xi, \eta)$, $\frac{k}{k'}\left(\frac{du_0}{dx} + \frac{dv_0}{dy}\right)$, et, dans le second, $-\frac{k}{k'}\frac{dw_0}{d(x, y)}$ pour adjoindre respectivement à $f_1(\xi, \eta)$ et à $f_2(\xi, \eta)$. Donc les trois fonctions arbitraires recevront les valeurs

$$(27)\qquad \begin{cases} f(\xi, \eta) = p_z - \dfrac{k}{k'}\left(\dfrac{du_0}{dx} + \dfrac{dv_0}{dy}\right), \\ f_1(\xi, \eta) = p_x + \dfrac{k}{k'}\dfrac{dw_0}{dx}, \\ f_2(\xi, \eta) = p_y + \dfrac{k}{k'}\dfrac{dw_0}{dy}. \end{cases}$$

Il est clair, par suite, que le potentiel inverse P de la couche à densité $f(\xi, \eta)$ aura l'expression $P_z - \frac{k}{k'}\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy}\right)$, si l'on appelle P_z, U, V les potentiels inverses de couches dont les densités superficielles seraient p_z, u_0, v_0. De même, les potentiels directs des couches à densités $f_1(\xi, \eta)$, $f_2(\xi, \eta)$ auront les expressions

$$\int r\,dm + \frac{k}{k'}\frac{d\int r\,dm''}{dx}, \qquad \int r\,dm' + \frac{k}{k'}\frac{d\int r\,dm''}{dy},$$

si $\int r\,dm$, $\int r\,dm'$, $\int r\,dm''$ représentent respectivement les potentiels directs de couches ayant les densités superficielles p_x, p_y, w_0.

Voici, formées d'après ces indications, les valeurs définitives de u,

v, w, pour les deux cas mixtes :

$$(28)\ \begin{cases} (u, v) = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d(\mathrm{U}, \mathrm{V})}{dz} + \dfrac{z}{2\pi(1+k)}\dfrac{d}{d(x, y)}\left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dx} + \dfrac{d\mathrm{V}}{dy} - \mathrm{P}_z\right), \\ w = -\dfrac{k}{2\pi(1+k)}\left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dx} + \dfrac{d\mathrm{V}}{dy} - \dfrac{k'}{k}\mathrm{P}_z\right) + \dfrac{z}{2\pi(1+k)}\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{d\mathrm{U}}{dx} + \dfrac{d\mathrm{V}}{dy} - \mathrm{P}_z\right); \end{cases}$$

$$(29)\ \begin{cases} (u, v, w) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\left(\dfrac{dm}{r}, \dfrac{dm'}{r}, -\dfrac{d}{dz}\dfrac{dm''}{r}\right) \\ \qquad - \dfrac{1}{2\pi(1+k)}\dfrac{d}{d(x, y, z)}\left[\dfrac{d\int r\,dm}{dx} + \dfrac{d\int r\,dm'}{dy} \right. \\ \qquad\qquad \left. + (1-k)\displaystyle\int\dfrac{dm''}{r} - \dfrac{d^2\int r\,dm''}{dz^2}\right]. \end{cases}$$

Des vérifications assez faciles montrent que ces formules satisfont bien à toutes les conditions des problèmes posés, et, en particulier, à celles, dont il n'avait pas encore été question, de l'évanouissement de u, v, w quand la distance de (x, y, z) à l'origine devient infinie.

457*. — Troisième exemple : équilibre d'élasticité d'un solide, sous l'action de forces extérieures quelconques s'exerçant sur une partie de son volume très éloignée de sa surface, pendant que celle-ci est maintenue fixe.

Nous n'avons eu à utiliser, dans les exemples précédents, que les potentiels de minces couches fictives, étalées sur la surface où siégeaient les causes des phénomènes et à partir de laquelle ces phénomènes se produisaient en s'atténuant d'une manière de plus en plus accusée avec la distance. Pour trouver un emploi analogue aux potentiels de masses triplement étendues, il faut supposer des actions ou influences appliquées directement non à une surface, mais à un volume et, de là, rayonnant sur toutes les parties environnantes du corps.

Tel sera, sans sortir de l'équilibre d'élasticité, le cas des petits déplacements permanents causés, dans un solide, tant aux points mêmes qu'autour d'une région assez éloignée de la superficie, par des actions extérieures s'exerçant sur cette région, et dont les composantes suivant les trois axes, que j'appellerai X, Y, Z *par unité de volume,* égaleront trois fonctions données des coordonnées x, y, z. Les déformations entraînées par ces forces très loin de là seront insignifiantes et même, dans le cas admis de trois dimensions, ne correspondront qu'à des changements mutuels de distance insensibles entre les points les plus éloignés; de sorte que, si l'on suppose les axes des x, y, z liés à ceux-ci, les déplacements u, v, w s'annuleront à l'infini,

le long de toutes les droites émanées de l'origine. On pourra donc, pour déterminer les trois fonctions u, v, w de x, y, z, adjoindre ces conditions d'évanouissement asymptotique aux trois équations indéfinies de l'équilibre. Grâce, d'ailleurs, à la forme linéaire de toutes ces relations, la solution totale se constituera par la simple superposition de trois solutions partielles, dans chacune desquelles les actions extérieures données se réduiraient à leurs composantes suivant l'un des axes, savoir, à X, ou à Y, ou à Z, par unité de volume.

Or, si l'on considère, par exemple, les déplacements u, v, w dus aux composantes suivant les z qui, sur l'élément quelconque de volume $d\varpi$ à coordonnées x, y, z, ont la valeur $Z\,d\varpi$, les équations indéfinies seront précisément celles, (115), de la page 371*, rappelées tout à l'heure (n° 453*), équations admettant les solutions (116) de la page suivante 372* pourvu que la fonction auxiliaire φ satisfasse à la relation (117) écrite immédiatement après, savoir, à

$$\Delta_2\Delta_2\varphi = -\frac{Z}{k(k+1)}. \tag{30}$$

Mais nous avons vu (p. 214*) qu'un potentiel direct $\int r\,dm$ est naturellement apte à vérifier une équation analogue; car, si $\rho(x, y, z)$, fonction nulle hors de la région qui contient la masse correspondante $\int dm$, désigne la densité de cette masse en chaque point (x, y, z) de l'espace, on a identiquement $\Delta_2\Delta_2\int r\,dm = -8\pi\rho(x, y, z)$.

Prenons, par exemple, $\rho(x, y, z) = Z$, ou attribuons à l'élément dm de la masse potentiante étendu (fictivement) dans l'élément $d\varpi$ quelconque de volume, la valeur même $Z\,d\varpi$ de la force extérieure qui s'y exerce; et nous aurons $\Delta_2\Delta_2\int r\,dm = -8\pi Z$, relation équivalente à (30) si l'on pose

$$\varphi = \frac{\int r\,dm}{8\pi k(k+1)}. \tag{31}$$

Il suffira donc, pour vérifier les trois équations indéfinies, de porter cette valeur de φ dans les expressions (116) citées de u, v, w; ce qui $\left(\text{vu la formule } \Delta_2\int r\,dm = 2\int\frac{dm}{r}\right)$ donnera

$$(u, v, w) = \frac{1}{4\pi k}\left(0, 0, \int\frac{dm}{r}\right) - \frac{1}{8\pi k(k+1)}\frac{d}{d(x, y, z)}\frac{d\int r\,dm}{dz}. \tag{32}$$

Et comme, de plus, ces valeurs de u, v, w ont tous leurs termes de l'ordre des dérivées secondes en x, y, z du potentiel direct d'une masse limitée, elles deviennent comparables à l'inverse de $\mathfrak{r}$, c'est-à-dire évanouissantes, aux distances infinies $\mathfrak{r}$ de l'origine. Ainsi elles

vérifient toutes les équations du problème et en constituent la solution unique.

458*. — Quatrième exemple : état permanent des températures, dans un corps pourvu, à son intérieur, de sources constantes de chaleur, et maintenu, loin de ces sources, à une température uniforme.

C'est le potentiel direct d'une masse à trois dimensions qui nous a permis de résoudre la question précédente d'état permanent. En voici une autre, plus simple, et se rapportant également à un corps indéfini dans tous les sens, où l'intégration s'effectue au moyen du potentiel inverse d'une telle masse.

Il s'agit de déterminer les températures stationnaires φ d'un solide à l'intérieur et autour d'une région dans laquelle sont supposées produites (grâce, par exemple, à des actions chimiques locales de très longue durée) des quantités de chaleur constantes par unité de temps et définies en chaque point, pour l'unité de volume, au moyen d'une fonction donnée K des coordonnées x, y, z, la température φ du corps étant d'ailleurs maintenue, en tous les endroits très éloignés de ces sources de chaleur, à un degré uniforme choisi comme zéro du thermomètre.

Le problème aura pour équation indéfinie $\Delta_2\varphi = -K$, du moins en adoptant des unités convenables; et il s'y adjoindra, comme condition aux limites, $\varphi = 0$ aux distances infinies $\imath$ de l'origine.

Or le potentiel ordinaire ou inverse $\int \frac{dm}{r}$ d'une masse de densité K occupant toute la région des *sources*, et formée ainsi d'éléments, dm, égaux en chaque endroit $d\varpi$ à la chaleur $K\,d\varpi$ qui s'y trouve produite par unité de temps, vérifiera (p. 214*) l'équation indéfinie analogue $\Delta_2 \int \frac{dm}{r} = -4\pi K$, ainsi que la relation spéciale $\int \frac{dm}{r} = 0$ à l'infini. Donc la solution du problème s'obtiendra en prenant la fonction φ simplement proportionnelle à ce potentiel, c'est-à-dire en posant, pour que $\Delta_2\varphi = -K$,

$$(33) \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{dm}{r}.$$

459*. — Cinquième exemple : intégration de l'équation du son par les potentiels sphériques.

Dans toutes les questions abordées ci-dessus, les coordonnées x, y, z étaient les seules variables indépendantes que continssent les équa-

tions indéfinies du problème; aussi ne s'y agissait-il que d'états permanents, sauf au n° 452*, à propos de l'écoulement d'un liquide par un orifice ayant son débit réparti d'une manière connue entre ses divers éléments; problème où la solution est la même, en fonction de ces données à chaque époque t, quand elles sont invariables que lorsqu'elles changent d'un instant à l'autre. Il nous reste donc à traiter comme cinquième exemple, pour un milieu indéfini, un problème d'état variable où le rôle du temps t ne soit pas moins essentiel que celui des coordonnées x, y, z, et où, cependant, les équations à intégrer ne contiennent que des dérivées partielles d'un même ordre pair, afin de pouvoir en demander encore la solution aux potentiels.

Ce sera le calcul d'une fonction φ régie par l'équation indéfinie, appelée *équation du son*,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \Delta_2 \varphi, \tag{34}$$

où a désigne une constante positive, avec les conditions *initiales* que, pour $t = 0$, cette fonction φ et sa dérivée première par rapport à t s'annulent partout (du moins à une constante près pour φ), sauf à l'intérieur de certaines *régions d'ébranlement*, où leurs valeurs

$$\varphi_0 = F(x, y, z), \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = f(x, y, z) \tag{35}$$

seront directement données en chaque point (x, y, z). Les petits mouvements intérieurs d'un fluide élastique homogène, tels que les vibrations sonores qu'il éprouve et transmet quand il est quelque part ébranlé, dépendent, dans tous leurs détails, d'une pareille fonction φ, ou plutôt de ses dérivées partielles premières; et le calcul des mouvements analogues d'un solide élastique isotrope se ramène aisément à la détermination de quatre de ces fonctions, pour l'une desquelles la constante a n'est pas la même que pour les trois autres, mais qui, toutes quatre, ont leurs valeurs, avec celles de leurs dérivées premières en t, initialement évaluables au moyen des expressions (censées données pour $t = 0$) des déplacements et des vitesses des divers points. Bornons-nous donc ici à intégrer l'équation (34).

A cet effet, observant d'abord que, dans le cas où φ serait uniquement fonction de x et de t, l'équation (34) prendrait la forme de celle des cordes vibrantes, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}$, avec a comme *vitesse de propagation* des ondes (p. 363*), construisons pour chaque valeur du temps t (même alors que φ dépend des trois coordonnées), une ligne r égale

au chemin, at, que de telles ondes auraient parcouru au bout de ce temps, et, posant ainsi $r = at$, substituons à t la nouvelle variable r, de manière à n'avoir, évidemment, rien à changer aux dérivées en x, y, z des fonctions de point, mais à pouvoir transformer les dérivées en t par la formule $\frac{d}{dt} = a\frac{d}{dr}$. L'équation (34) deviendra

$$(36) \qquad \frac{d^2\varphi}{dr^2} = \Delta_2\varphi.$$

Or, convenons de représenter chaque système de valeurs de x, y, z, t, ou, plutôt, de x, y, z, r, par une sphère $\sigma = 4\pi r^2$ décrite autour du point considéré (x, y, z) comme centre avec la ligne r comme rayon. Alors l'équation (36) sera justement celle que vérifie (p. 197*) le potentiel sphérique $\int \frac{\rho\, d\sigma}{r}$ de toute masse $\int dm$ ou $\int \rho\, d\varpi$, répartie d'après une loi continue quelconque dans l'espace indéfini $\int d\varpi$; et elle sera encore celle que vérifie la dérivée en r soit de ce potentiel sphérique, soit de celui d'une deuxième masse analogue. Si d'ailleurs nous attribuons à la seconde de ces masses la densité $\rho = \varphi_0$ ou $\rho = F(x, y, z)$ et, à la première, la densité $\rho_1 = f(x, y, z)$, que nous appelions Φ le potentiel sphérique $\int \frac{\rho\, d\sigma}{r}$ de la seconde, Φ_1 ou $\int \frac{\rho_1\, d\sigma}{r}$ celui de la première, la solution particulière $\varphi = \frac{d\Phi}{dr}$ de (36) se réduira [p. 197*], pour $r = 0$, à $4\pi F(x, y, z)$, et aura sa dérivée en t, ou sa dérivée en r multipliée par a, initialement nulle, tandis que la solution particulière $\varphi = \Phi_1$ sera elle-même initialement nulle, mais aura, pour $t = 0$, sa dérivée en r égale à $4\pi f(x, y, z)$, ou sa dérivée en t exprimée par $4\pi a f(x, y, z)$. Comme l'équation linéaire (36) ne comprend pas de terme indépendant de φ ou de ses dérivées, on lui formera évidemment une solution, φ, dont les valeurs initiales et celles de sa dérivée en t soient exprimées, comme on le désire, par $F(x, y, z)$ et par $f(x, y, z)$, en superposant ces deux solutions particulières, après y avoir introduit respectivement les facteurs constants $\frac{1}{4\pi}$ et $\frac{1}{4\pi a}$. Ainsi il viendra

$$(37) \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi}\frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{4\pi a}\Phi_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\int\frac{\rho\, d\sigma}{r} + \frac{1}{4\pi a}\int\frac{\rho_1\, d\sigma}{r}.$$

En outre, les densités choisies $\rho = F(x, y, z)$ et $\rho_1 = f(x, y, z)$ devenant, aux grandes distances $\imath$ de l'origine, la première, constante,

sinon nulle, et, la deuxième nulle, le potentiel Φ_1 se réduit à zéro, quelle que soit la valeur *donnée* de t ou du rayon r, aux points (x, y, z) *suffisamment* éloignés, et le potentiel Φ y devient $\rho \int \frac{d\sigma}{r} = 4\pi\rho r$, avec ρ constant; d'où il suit que le second membre de (37) y prend cette valeur constante assignée de la fonction ρ ou $F(x, y, z)$, pour les points infiniment distants de l'origine.

Ainsi l'expression (37) de φ constitue la solution demandée ; car elle vérifie toutes les conditions qui, ensemble, déterminent certainement le problème, et dont il est même probable, du moins dans le cas actuel de l'équation indéfinie (34) ou (36), que la dernière, relative à l'évanouissement asymptotique, à toute époque t, des dérivées de φ pour z infini, se trouvait surabondante ou impliquée dans les autres.

Des raisonnements et des calculs beaucoup moins simples que l'emploi des potentiels sphériques ont conduit Poisson, en 1819, à l'intégrale (37) de l'équation du son, non pas précisément sous cette forme géométrique, mais sous une forme analytique parfois indispensable dans les applications. Il suffit, pour l'obtenir, d'évaluer Φ et Φ_1 en rapportant la sphère $\sigma = 4\pi r^2$ à des coordonnées polaires θ, μ dont le pôle soit au centre (x, y, z), le plan des azimuts θ, parallèle aux xy, les hauteurs angulaires μ [1], croissantes vers la direction des z positifs, et le rayon vecteur origine des azimuts, orienté dans le sens des x positifs. L'élément de surface $d\sigma$ sera (p. 78*) $r^2 \cos\mu \, d\mu \, d\theta$; et les coordonnées rectilignes de l'extrémité du rayon vecteur r qui y aboutit auront les valeurs

$$x + r\cos\mu\cos\theta, \quad y + r\cos\mu\sin\theta, \quad z + r\sin\mu.$$

Comme d'ailleurs μ variera de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ et θ de zéro à 2π, les premier et dernier membres de (37) donneront

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi = {} & \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \cdot r \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\mu \, d\mu \int_0^{2\pi} F(x + r\cos\mu\cos\theta, y + r\cos\mu\sin\theta, z + r\sin\mu) \, d\theta \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{r}{a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\mu \, d\mu \int_0^{2\pi} f(x + r\cos\mu\cos\theta, y + r\cos\mu\sin\theta, z + r\sin\mu) \, d\theta, \end{aligned} \right.$$

---

(1) J'appelle ici μ et non pas φ, comme à l'ordinaire, ces hauteurs angulaires, parce que φ désigne déjà la fonction à évaluer.

formule qui devient identique à celle de Poisson lorsqu'on y remplace r par at et $\frac{d}{dr}$ par $\frac{1}{a}\frac{d}{dt}$, en n'y laissant plus ainsi figurer la constante a que sous les signes F et f des fonctions arbitraires.

On remarquera :

1° Que le dernier terme de (38) est une fonction impaire de r, à cause de son facteur r ; car le résultat des deux intégrations par rapport à θ et à μ y reste le même quand on change r en $-r$, chaque élément devenant celui qui correspondait d'abord à des valeurs de $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\sin\mu$ contraires des premières, ou, autrement dit, qui correspondait, sur la sphère, à l'élément $d\sigma$ symétrique du premier par rapport au centre ; ce qui ne change rien à la somme ;

2° Que, par suite, le premier terme du second membre de (38) est, au contraire, pair en r, comme dérivée d'une fonction pareille à la précédente, ou impaire ;

3° Que chacun de ces deux termes continue d'ailleurs à vérifier l'équation (34) quand on y donne à t ou à $r = at$ des valeurs négatives, puisque, au facteur constant près ∓ 1, ils ont les mêmes valeurs que pour r ou t positifs et, par suite (sauf encore le facteur ∓ 1), les mêmes dérivées secondes en r, avec les mêmes paramètres $\Delta_2\varphi$; d'où il suit que l'égalité constante de $\Delta_2\varphi$ à ces dérivées secondes, assurée déjà lorsque r est positif, ne cesse pas d'avoir lieu si r devient négatif, le changement de signe indiqué par l'un des facteurs communs ∓ 1 survenant également aux deux membres ;

4° Enfin que, dans le cas où φ ne dépendrait pas de z, ce qui réduirait les deux fonctions arbitraires F, f à contenir seulement leurs deux premières variables, on pourrait, à raison de la parité des éléments quand μ changerait de signe, n'effectuer les intégrations par rapport à μ que de zéro à $\frac{\pi}{2}$, mais doubler ensuite le résultat en réduisant à 2π le dénominateur 4π. Et quoique alors les masses fictives de densités F, f s'étendissent à l'infini dans le sens des z, les expressions (37), (38) de φ n'en seraient pas moins déterminées et n'en vérifieraient pas moins l'équation (36) ou (34), avec les conditions (35) ; car les masses potentiantes n'ont besoin (p. 198*) que d'avoir une densité partout finie, non d'être elles-mêmes limitées, pour admettre un potentiel *sphérique* bien fini et déterminé.

460*. — Résultats immédiats de cette intégration : propagation du mouvement sans dissémination le long des trajets suivis; ce qui entraîne la conservation, à toute distance, des caractères de l'état initial et rend possible la précision ainsi que l'infinie variété des sensations auditives et visuelles.

Il serait étranger au but de ce Cours de développer ou même d'indiquer les lois physiques résultant soit de l'intégrale (37) ou (38), soit des solutions obtenues pour les autres problèmes abordés ici. Toutefois, je crois devoir signaler une conséquence immédiate de la forme même de (37), à cause du haut intérêt qu'elle présente pour la Philosophie naturelle et du complément qu'elle apporte aux considérations du n° 388 (p. 204). La valeur ou la dérivée en r, qui figurent dans (37), des potentiels sphériques Φ_1 et Φ, dépendent uniquement, pour chaque point (x, y, z) et à l'époque t, de ce que sont, à la distance $r = at$ tout autour, les densités fictives f, F et la dérivée de F suivant les rayons r, c'est-à-dire de ce qu'a été l'état initial dans une couche sphérique infiniment mince située à la distance $r = at$ de l'endroit considéré (x, y, z). Donc *l'influence des modifications primitivement réalisées en un point quelconque ne se fait sentir en tout autre point qu'au bout d'un temps égal au quotient de leur distance par la longueur a, et durant un instant infiniment petit.* En d'autres termes, l'équation aux dérivées partielles (34) exprime un mode de propagation du mouvement où, dans l'espace à *trois* dimensions, la *célérité* (vitesse de la communication des ébranlements) a la même valeur *constante a* que dans un espace linéaire, c'est-à-dire dans une propagation suivant un seul sens, et où, de plus, la transmission aux diverses distances se fait *sans dissémination* (ni en avant ni en arrière) *le long des trajets suivis.*

Par suite, plusieurs ébranlements successifs produits au même endroit se maintiendront distincts durant toute leur propagation, séparés qu'ils seront sans cesse, dans l'espace, par un intervalle constant. Ils se comporteront, sous ce rapport, tout autrement qu'ils ne feraient dans le cas d'équations d'état variable non homogènes quant à l'ordre des dérivées, comme nous en étudierons bientôt et comme est, par exemple, celle qui régit les phénomènes de conductibilité calorifique ; car la transmission qu'impliquent ces équations non homogènes est inséparable d'une dissémination indéfinie en chemin, tant à l'avant qu'à l'arrière des points où les modifications produites sont les plus sensibles. Ici, au contraire, les ondes émises, ne passant que *successivement* en un point quelconque, même éloigné, y présenteront

l'ordre et les autres caractères qu'elles offraient au départ. Et, si l'on joint à cette circonstance la localisation possible des mouvements [qui résulte encore de (37), quoique plus difficile à apercevoir] suivant certaines directions à partir de chaque centre d'ébranlement, ainsi que la séparation, opérée dans certains de nos organes, des vibrations de périodes différentes leur arrivant à la fois, on s'explique comment les particularités diverses, les inégalités de toute nature, imprimées par chaque corps à l'agitation incessante qui en émane, et dont plusieurs sont aptes à être perçues ou analysées en nous, subsistent jusqu'à de grandes distances dans les milieux homogènes fluides et même solides que cette agitation atteint. L'on conçoit donc que tant de circonstances délicates ne s'atténuent, longtemps, presque pas plus vite qu'elle ne le fait elle-même à raison de sa dissémination *latérale* sur des surfaces d'étendue croissante, quoique néanmoins de petits frottements intérieurs ou défauts inévitables d'élasticité, ainsi qu'une hétérogénéité même légère, ou d'autres particularités qui ne sont pas davantage représentées dans l'équation (34), doivent les effacer bien avant l'extinction complète du mouvement.

Voilà sans doute pourquoi les seules sensations qui nous procurent des connaissances nettes et variées sur le monde extérieur, les seules mêmes qui nous fournissent un nombre de signes assez grand pour exprimer et fixer nos idées de toute nature, sont celles qui dépendent de la vue ou de l'ouïe, c'est-à-dire des deux sens par lesquels nous percevons des phénomènes régis par l'équation (34) ou par d'autres analogues. Comme il *se conserve,* dans ces phénomènes, certains caractères propres aux corps qui les font naître, nous pouvons, dans la manière dont ils nous affectent, établir entre eux de nombreuses distinctions (bien que leurs détails intimes nous échappent) et les différencier infiniment plus que ceux que perçoivent nos autres sens, comme sont, par exemple, les mouvements calorifiques transmis à la surface de notre corps. Ceux-ci se disséminent, au contraire, dans tous les sens, et *se fondent ensemble.* On s'explique donc qu'ils nous apportent des impressions toujours confuses et indistinctes, quoique souvent beaucoup plus fortes que les précédentes.

Aussi avons-nous dit déjà (p. 204) que les propriétés de proportionnalité et de simple superposition, constituant le principe de D. Bernoulli et dues à la forme linéaire des équations différentielles, ne suffisaient pas pour nous rendre possible le discernement des phénomènes. Mais elles y sont indispensables, puisque la relation (34) est linéaire, en même temps qu'homogène dans tous ses termes quant à l'ordre des dérivées qui y figurent. Et l'on peut remarquer, à cet

égard, que les sensations de son ou de lumière, si elles devenaient trop intenses, perdraient de leur netteté, de leur valeur expressive ou représentative; car la forme linéaire des équations, que nous savons due (p. 204) à une petitesse assez grande des variations d'état physique, pourrait n'y être plus suffisamment approchée [1].

Justement, les écarts du second ordre que présentent, d'avec la

---

[1] *Remarques sur la même intégration et sur ses résultats, pour les cas où il y a moins de trois coordonnées.*

Il n'est peut-être pas inutile d'observer que, même avec l'équation (34), mais dans un espace à *deux* dimensions x, y (tel qu'une plaque mince vibrant dans son propre plan) ou encore lorsque, F, f, φ ne dépendant pas de z, le mouvement se répand seulement dans les sens parallèles au plan des xy, sa propagation est accompagnée d'une certaine dissémination *en arrière*, c'est-à-dire le long des chemins déjà parcourus.

En effet, les deux masses fictives de densités $\rho = F(x, y)$ et $\rho_1 = f(x, y)$ sont alors disposées par filets de longueur indéfinie parallèles aux z; et l'un d'eux quelconque, de coordonnées $x = \xi$, $y = \eta$, se trouve coupé par toutes les sphères décrites, autour d'un centre donné (x, y, z), avec des rayons r supérieurs à la distance $D = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ de ce point (x, y, z) au filet (ξ, η) dont il s'agit, bien que la section soit incomparablement plus grande, pour celles d'entre ces sphères qui intersectent le filet presque tangentiellement, ou dont les rayons r dépassent à peine la distance D, que pour toutes les autres. Ainsi, les potentiels sphériques correspondants, proportionnels au quotient par r de cette section, et nuls tant que le rayon r n'atteint pas la valeur D, croissent très vite dès qu'il la dépasse, pour décroître bientôt, très rapidement d'abord et de presque toute sa valeur maxima, mais sans jamais s'annuler complètement, quand r continue à grandir. Or, comme ici r reçoit la valeur at, on voit que la propagation du mouvement *dans le plan des* xy, à partir du centre (ξ, η) d'ébranlement, s'effectue, vers tous les autres points (x, y) du plan, avec la vitesse a et, par conséquent, *sans dissémination en avant du front de l'onde,* mais *avec une faible dissémination en arrière.* Le passage de l'onde laisse donc après lui un léger reste d'agitation très lent à s'éteindre.

Si les fonctions F, f et, par suite, φ ne dépendaient pas des coordonnées y, z, ou que, l'équation (34) se réduisant à celle des cordes vibrantes, la propagation se fît seulement dans le sens des x, les sphères d'un rayon croissant $r = at$ décrites autour d'un point quelconque (x, y, z), dès qu'elles couperaient une couche indéfinie, comprise entre deux plans voisins $x = \xi$, $x = \xi + d\xi$ normaux aux x, des masses fictives, de densités $\rho = F(\xi)$ et $\rho_1 = f(\xi)$, y donneraient pour section une zone $2\pi r\, d\xi$, et les parties correspondantes des potentiels sphériques Φ, Φ_1 seraient $2\pi F(\xi)\, d\xi$, $2\pi f(\xi)\, d\xi$, quantités où ne figurent ni la variable r ou t, ni les coordonnées x, y, z. Donc le *mouvement* provenant de la tranche considérée, et qui dépend des *dérivées* partielles de φ, serait déjà éteint en (x, y, z) aussitôt après y être arrivé, ou, autrement dit, l'onde, encore de *célérité a*, émise par une tranche, n'aurait, comme dans le cas d'une propagation suivant les trois dimensions, qu'une épaisseur infiniment petite. Par conséquent, *la transmission*

forme linéaire (34), les rigoureuses équations des petits mouvements d'un milieu supposé même parfaitement élastique doivent sans doute être comptés parmi les circonstances propres, comme les défauts d'élasticité et d'homogénéité, à produire, bien avant l'extinction complète des ondes, cette dissémination et neutralisation de leurs inégalités à courtes périodes indiquée tout à l'heure, mais que nous avait déjà fait signaler antérieurement (p. 396*) son analogie, dans les oscillations des liquides, avec le mode de régularisation des phénomènes de refroidissement.

---

dans un seul sens se fait sans dissémination, ainsi qu'on l'avait déduit (p. 363*) de l'intégrale finie de d'Alembert convenant alors à l'équation (36).

Cette intégrale finie elle-même résulte, si l'on veut, de la formule (37). Il suffit d'observer que Φ et Φ_1 y sont évidemment $2\pi \int_{x-r}^{x+r} F(\xi)\,d\xi$ et $2\pi \int_{x-r}^{x+r} f(\xi)\,d\xi$. En substituant ces valeurs dans le second membre de (37), puis différentiant par rapport à r la première intégrale définie et remplaçant partout r par at, il vient

$$\varphi = \frac{1}{2}[F(x+at) + F(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} f(\xi)\,d\xi,$$

résultat que l'on reconnaît aisément (sauf la différence des notations) rentrer dans celui, (98), de la page 363*.

QUARANTE-SEPTIÈME LEÇON.

SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE : ÉQUATIONS OU FIGURENT DES DÉRIVÉES D'ORDRES DIFFÉRENTS, ET QUI S'INTÈGRENT PAR LES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIIIe LEÇON.

461*. — **Équations aux dérivées partielles, qui deviennent homogènes, relativement à l'ordre des dérivées, lorsque chaque couple de différentiations effectuées par rapport à certaines variables y est comptée pour une seule différentiation.**

Les équations indéfinies des phénomènes les plus simples concernant l'état variable des corps ne sont pas toujours homogènes quant à l'ordre des dérivées partielles des fonctions inconnues. Pour quelques-uns de ces phénomènes, les dérivées prises par rapport au temps se trouvent deux fois moins élevées que celles qui sont relatives aux coordonnées. Par exemple, des équations de la forme

$$(39) \qquad \frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt} - \Delta_2\varphi = 0, \qquad \frac{1}{a^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Delta_2\Delta_2\varphi = 0,$$

avec a^2 constant, régissent, la première, comme nous le savons déjà (p. 398*), la température φ d'un solide athermane et homogène, la seconde, le petit déplacement transversal φ d'une tige élastique droite et d'une plaque élastique plane, déplacement fonction d'une abscisse x dans le premier cas, de deux coordonnées x et y dans le second. Pour un autre phénomène, plus complexe, savoir celui des ondes produites à la surface d'une eau tranquille par l'émersion d'un solide ou par un coup de vent, toutes les circonstances du mouvement dépendent d'une fonction φ qui satisfait aux deux équations

$$(40) \qquad \frac{1}{g^2}\frac{d^4\varphi}{dt^4} + \Delta_2\varphi = 0, \qquad \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \Delta_2\varphi = 0,$$

où $\Delta_2\varphi$ représente, en chaque point (x, y, z) de la masse fluide, un paramètre différentiel Δ_2 pris dans le plan horizontal des xy ou par rapport aux seules coordonnées x, y ; et l'on voit que la seconde de ces équations est bien homogène, mais, la première, deux fois plus

élevée par rapport au temps que par rapport aux coordonnées, contrairement aux précédentes (39).

Il nous reste donc à étudier, pour des cas où les dimensions suivant les x, y, z soient infinies, ces équations (39) et (40). Afin de les simplifier le plus possible, nous y prendrons $a = 1$ ou $g = 1$, grâce à un choix de l'unité soit de longueur, soit plutôt de temps, propre à donner t au lieu de $a^2 t$, dans la première (39), au lieu de at, dans la deuxième (39), et au lieu de $t\sqrt{g}$, dans la première (40).

462*. — De l'intégration de ces équations par les intégrales définies de la XXXIIIe Leçon, quand ce sont les différentiations relatives aux coordonnées qui vont ainsi par couples; et, d'abord, formation de solutions particulières, contenant tout autant de fonctions arbitraires.

Occupons-nous d'abord des équations (39), en considérant leur *type général*, savoir, une équation linéaire et à coefficients constants,

$$(41)\quad A_0 \frac{d^n\varphi}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1}.\Delta_2\varphi}{dt^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2}.\Delta_2\Delta_2\varphi}{dt^{n-2}} + \ldots + A_n \Delta_2\Delta_2\Delta_2\ldots\varphi = 0,$$

dans tous les termes de laquelle l'inconnue φ ne soit affectée que des deux symboles $\frac{d}{dt}$, Δ_2, et le soit un *même* nombre *total* n de fois. Bref, la fonction φ n'y est censée soumise qu'à deux opérations différentielles, celles qui consistent à prendre ou la dérivée *relative au temps*, ou le paramètre Δ_2, qui constitue (t. I, p. 72*) *la dérivée par excellence relative à l'espace;* et, de plus, l'équation est, dans tous ses termes, *homogène,* d'un même degré n, *relativement à ces deux opérations* ou à leurs symboles $\frac{d}{dt}$, Δ_2.

A défaut des potentiels, qui ne paraissent pas aptes à fournir pour ces équations des solutions particulières affectées d'une fonction arbitraire, recourons à l'autre type général d'intégrales étudié plus haut (p. 183*), c'est-à-dire au type $\varphi = \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha$, où p désigne (p. 187*) le rapport, $\frac{2}{2-m}$, du nombre 2 à son excédent sur celui, m, des coordonnées $x, y, \ldots$. Comme les fonctions f, ψ de $\frac{\alpha^p}{2}$, $\frac{r^2}{2\alpha^p}$ sont arbitraires, dans de larges limites, et peuvent ainsi contenir de telle manière qu'on voudra les variables indépendantes de α et r, c'est-à-dire, ici, le temps t, introduisons $\pm t$ dans l'une d'elles, à côté de $\frac{\alpha^p}{2}$ ou de

$\frac{r^2}{2\alpha^p}$. En d'autres termes, posons (avec de légers changements dans les notations)

$$(42)\qquad \begin{cases} \text{soit } \varphi = \int_0^\infty f\left(t \pm \frac{\alpha^p}{2}\right) \psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right) d\alpha, \\ \text{soit } \varphi = \int_0^\infty f\left(t \pm \frac{r^2}{2\alpha^p}\right) \psi\left(\frac{\alpha^p}{2}\right) d\alpha. \end{cases}$$

Chaque opération $\frac{d}{dt}$ effectuée sur ces expressions aura simplement pour effet de remplacer, sous le signe $\int$, la fonction où t figure par sa dérivée, et chaque opération Δ_2 aura à la fois (p. 187*) cet effet, avec introduction du facteur ± 1 $\Big($vu que la dérivée de $t \pm \frac{\alpha^p}{2}$ ou de $t \pm \frac{r^2}{2\alpha^p}$ par rapport à $\frac{\alpha^p}{2}$ ou à $\frac{r^2}{2\alpha^p}$ est $\pm 1\Big)$, et aussi celui de faire substituer à l'autre fonction sous le signe $\int$ sa dérivée. Donc les n opérations de l'une ou de l'autre espèce indiquées dans chaque terme de l'équation aux dérivées partielles proposée donneront, en transportant d'ailleurs sous le signe $\int$ le coefficient du terme, un résultat qui aura encore respectivement la forme (42) correspondante, mais avec la fonction $f^{(n)}\left(t \pm \frac{\alpha^p}{2}\right)$, ou $f^{(n)}\left(t \pm \frac{r^2}{2\alpha^p}\right)$, à la place de $f\left(t \pm \frac{\alpha^p}{2}\right)$ ou de $f\left(t \pm \frac{r^2}{2\alpha^p}\right)$, et le produit, par un facteur constant, soit de l'autre fonction $\psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)$ ou $\psi\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)$, soit de l'une de ses n premières dérivées, à la place de $\psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p} \text{ ou } \frac{\alpha^p}{2}\right)$.

Par suite, tout le premier membre de l'équation proposée (41) deviendra une intégrale définie, sous le signe $\int$ de laquelle le facteur commun $f^{(n)}\left(t \pm \frac{\alpha^p}{2}\right)$, ou $f^{(n)}\left(t \pm \frac{r^2}{2\alpha^p}\right)$, multipliera la somme

$$(43)\qquad A_0\psi \pm A_1\psi' + A_2\psi'' \pm A_3\psi''' + \ldots + (\pm 1)^n A_n \psi^{(n)}.$$

On vérifiera donc l'équation, sans que la fonction f cesse d'être arbitraire (dans les limites où les intégrales définies seront déterminées), en égalant à zéro cette somme (43), c'est-à-dire en adoptant pour ψ l'une quelconque des n solutions simples qu'admettra l'équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre, sans second membre et à coefficients constants, ainsi posée entre cette fonction ψ et sa variable $\frac{r^2}{2\alpha^p}$ ou $\frac{\alpha^p}{2}$.

On aura, par suite, pour (41), même en se bornant à un seul des deux signes $\pm$ qui figurent dans la variable binôme de f, n solutions distinctes, de chacune des deux formes (42), avec tout autant de fonctions f disponibles, c'est-à-dire arbitraires, sous la seule réserve de ne rendre indéterminée ou infinie aucune des intégrales introduites.

Mais ce n'est pas tout ; car d'autres solutions encore peuvent se former presque aussi simplement. Rien n'oblige d'annuler à part tous les éléments de l'intégrale définie à laquelle l'expression (42) choisie pour φ réduit le premier membre de (41). Il suffit d'annuler cette intégrale elle-même.

Or, pour y parvenir, sinon avec une seule expression (42), du moins avec *deux* superposées, rendons d'abord l'intégrale dont il s'agit évaluable sous forme finie et, dans ce but, prenons l'expression (43), qui y figure sous le signe $\int$ comme facteur de $f^{(n)}\left(t \pm \frac{\alpha^p}{2}\right)$ ou de $f^{(n)}\left(t \pm \frac{r^2}{2\alpha^p}\right)$, non plus égale à zéro, mais seulement proportionnelle à la dérivée en α de $\frac{\alpha^p}{2}$ ou de $\frac{r^2}{2\alpha^p}$, c'est-à-dire à α^{p-1} ou à α^{-p-1}. Il suffira évidemment d'égaler l'expression (43), qui ne dépend que de la variable $\frac{r^2}{2\alpha^p}$ ou $\frac{\alpha^p}{2}$, à une fonction monôme de celle-ci, ayant soit l'exposant $-1+\frac{1}{p} = -1+1-\frac{m}{2}$, ou $-\frac{m}{2}$, soit l'exposant $-1-\frac{1}{p} = -1-1+\frac{m}{2}$ ou $-2+\frac{m}{2}$. Donc, d'une part, en appelant K le coefficient arbitraire de ce monôme et γ, pour abréger, la variable de la fonction ψ, nous choisirons cette fonction de manière à rendre l'expression (43) égale à $K\gamma^{-1\pm\frac{1}{p}}$, c'est-à-dire à $K\gamma^{-\frac{m}{2}}$, si la forme de φ est la première (42), et à $K\gamma^{-2+\frac{m}{2}}$, si cette forme de φ est la seconde (42) ; ce qui donnera, pour déterminer $\psi(\gamma)$, l'une ou l'autre des deux équations différentielles linéaires à second membre,

$$(44)\quad A_0\psi \pm A_1\frac{d\psi}{d\gamma} + A_2\frac{d^2\psi}{d\gamma^2} \pm \ldots + (\pm 1)^n A_n\frac{d^n\psi}{d\gamma^n} = \begin{cases} \text{soit } K\gamma^{-\frac{m}{2}}, \\ \text{soit } K\gamma^{-2+\frac{m}{2}}. \end{cases}$$

D'autre part, le premier membre de l'équation proposée (41) deviendra le produit d'un facteur monôme en r, savoir $\frac{2}{p}K\left(\frac{r^2}{2}\right)^{-\frac{m}{2}}$ ou

$-2^{3-\frac{m}{2}}\frac{K}{pr^2}$, sorti du signe $\int$, par l'intégrale immédiatement évaluable

$$(45)\quad \int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} d\left[\pm f^{(n-1)}\left(t\pm\frac{\alpha p}{2}\right)\right] \quad \text{ou} \quad \int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} d\left[\pm f^{(n-1)}\left(t\pm\frac{r^2}{2\alpha p}\right)\right].$$

Ce premier membre ne s'annulant pas, nous ne pouvons choisir pour intégrale particulière de (41) une seule expression (42). Mais formons successivement, avec la même fonction f et la même constante K, deux de ces expressions où la variable binôme de f ait son second terme, $\pm\frac{\alpha p}{2}$ ou $\pm\frac{r^2}{2\alpha p}$, pris, dans l'une, avec le signe + et, dans l'autre, avec le signe $-$; puis faisons la somme des deux intégrales définies ainsi obtenues. Il est clair que cette somme, substituée à φ dans l'équation (41), réduira son premier membre, d'après (45), et abstraction faite du facteur commun placé hors du signe $\int$, à

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} d\left[f^{(n-1)}\left(t+\frac{\alpha p}{2}\right)-f^{(n-1)}\left(t-\frac{\alpha p}{2}\right)\right],$$

ou à

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} d\left[f^{(n-1)}\left(t+\frac{r^2}{2\alpha p}\right)-f^{(n-1)}\left(t-\frac{r^2}{2\alpha p}\right)\right].$$

Or, quelle que soit la valeur positive ou négative de p, ces deux expressions, immédiatement intégrables, donnent le résultat nul $\mp[f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(t)]$ à celle des deux limites où la variable binôme de $f^{(n-1)}$ se réduit à t; de sorte qu'il reste uniquement le terme relatif à l'autre limite (où cette variable est $t\pm\infty$), savoir, $\pm[f^{(n-1)}(\infty)-f^{(n-1)}(-\infty)]$. Ainsi, ces expressions égaleront zéro, et l'équation (41) se trouvera satisfaite, si l'on a $f^{(n-1)}(\infty)=f^{(n-1)}(-\infty)$, c'est-à-dire si l'on astreint la fonction $f^{(n-1)}$ à tendre vers une valeur finie commune, zéro par exemple, quand sa variable s'éloigne sans limite de zéro soit en grandissant, soit en décroissant.

L'intégrale la plus générale des équations différentielles (44) étant la somme d'une intégrale particulière quelconque et des n solutions simples, déjà considérées ci-dessus, de ces équations privées de seconds membres ou obtenues en égalant à zéro la somme (43), on pourra abstraire de ψ les termes correspondant à ces solutions simples, car, pris à part dans (42), ils ne feraient que donner les solutions de (41) déjà connues; et ψ se réduira ainsi, finalement, à l'intégrale particulière choisie de (44). Nous supposerons, pour plus de simplicité, que

ce soit l'intégrale, proportionnelle à K, dont, pour $\gamma = 0$, la valeur $\psi(0)$ et les $n-1$ premières dérivées $\psi'(0), \psi''(0), \ldots, \psi^{(n-1)}(0)$ seront toutes nulles.

En résumé, si aucune des solutions particulières de (41), composées d'après ces indications, n'est rendue inacceptable par des valeurs infinies ou indéterminées des intégrales en jeu, les deux types (42) nous donneront, vu les doubles signes du second terme de la variable de f, $4n$ solutions particulières formées chacune d'une seule intégrale définie, et, en outre, deux solutions, formées par la somme de deux intégrales où figureront respectivement les deux signes + et — du second terme dont il s'agit. D'ailleurs, ces solutions particulières, différentiées autant de fois qu'on le voudra par rapport aux coordonnées x, y, ..., pourront en fournir de nouvelles, si l'on y change chaque fois la fonction arbitraire f; car, en différentiant par rapport à x, ou à y, etc., l'équation (41) sans second membre et à coefficients constants, on voit que les dérivées partielles de φ ne la vérifient pas moins que φ. Quant aux dérivées en t de toutes ces solutions, elles constituent aussi des solutions de (41), mais de la même forme [d'après les expressions (42) des intégrales employées] que celles d'où l'on part, et, dès lors, ne présentant pas un intérêt spécial.

463*. — Exemples : formation de telles intégrales pour l'équation de la chaleur et pour celles du mouvement transversal des plaques ou des barres élastiques.

Nous n'avons à appliquer ces principes qu'aux équations (39) [p. 452*], après y avoir pris, comme il a été indiqué, $a = 1$. Et d'abord, dans le cas de l'équation de la chaleur, ainsi devenue

$$\frac{d\varphi}{dt} - \Delta_2 \varphi = 0, \tag{46}$$

il est clair que l'expression (43), où il faut poser $A_0 = 1$, $A_1 = -1$ et annuler A_2, A_3, ..., se réduit à $\psi \mp \psi'$. Égalée à zéro, elle donne comme solution simple, si γ désigne la variable $\frac{r^2}{2\alpha p}$ ou $\frac{\alpha p}{2}$ de la fonction ψ, $\psi = e^{\pm\gamma}$. Or celle-ci, en prenant les signes supérieurs, rendrait généralement infinies les expressions (42) de φ, à cause du facteur e^{γ} infini dans les éléments, voisins de l'une ou de l'autre limite, où γ dépasse toute grandeur donnée. Bornons-nous donc aux signes inférieurs, qui donnent $\psi = e^{-\gamma}$; et nous aurons pour (46) les deux

solutions

$$(47)\quad \varphi = \int_0^\infty f\left(t - \frac{\alpha^p}{2}\right) e^{-\frac{r^2}{2\alpha^p}} d\alpha, \qquad \varphi = \int_0^\infty f\left(t - \frac{r^2}{2\alpha^p}\right) e^{-\frac{\alpha^p}{2}} d\alpha,$$

dont les valeurs seront finies et déterminées, pourvu du moins que $f(-\infty) = 0$. Dans le cas, où $m = 1$, d'une seule coordonnée x, et dans celui, où $m = 3$, de trois coordonnées x, y, z, il suffira d'y faire, soit $p = 2$, soit $p = -2$. Mais, s'il y a deux coordonnées x, y, ou que $m = 2$, et que, par suite, p devienne infini, il faut, comme on a vu par les formules (19) du n° 349* (p. 188*), remplacer, dans la première (47), α^p par e^β, $d\alpha$ par $\frac{1}{p} d\beta$ et aussi, en changeant de fonction arbitraire, $f\left(t - \frac{\alpha^p}{2}\right)$ par $pf\left(t - \frac{e^\beta}{2}\right)$. Il vient

$$(48)\qquad (\text{pour } m = 2)\quad \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{e^\beta}{2}\right) e^{-\frac{r^2}{2} e^{-\beta}} d\beta.$$

Quant à la seconde (47), elle ne conduit au fond qu'à la même formule (48) quand, après y avoir effectué cette transformation de α^p en e^β et de f en pf, on en effectue une nouvelle, en remplaçant $r^2 e^{-\beta}$ par e^γ et $d\beta$ par $-d\gamma$, avec une variable définitive d'intégration ainsi appelée γ.

Il n'y a pas lieu de former, pour (46), une solution composée de *deux* intégrales définies empruntées soit à la première forme (42), soit à la deuxième, parce que les équations (44), qu'il faudrait nécessairement prendre une fois avec les signes supérieurs, assigneraient à ψ, pour $\gamma = \infty$, des valeurs de l'ordre de e^γ, qui rendraient généralement infinie la solution dont il s'agit.

Passons maintenant à la seconde équation (39), réduite à

$$(49)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Delta_2 \Delta_2 \varphi = 0.$$

Elle se déduit de (41) en posant $n = 2$, $A_0 = 1$, $A_1 = 0$ et $A_2 = 1$; de sorte que l'expression (43) y est $\psi + \psi''$. Annulée, elle donne $\psi =$ soit $\cos\gamma$, soit $\sin\gamma$, et les expressions (42) fournissent les huit formes d'intégrales particulières

$$(50)\quad \begin{cases} \varphi = \displaystyle\int_0^\infty f\left(t \pm \frac{\alpha^p}{2}\right) \left(\cos \frac{r^2}{2\alpha^p} \quad \text{ou} \quad \sin \frac{r^2}{2\alpha^p}\right) d\alpha, \\[2ex] \varphi = \displaystyle\int_0^\infty f\left(t \pm \frac{r^2}{2\alpha^p}\right) \left(\cos \frac{\alpha^p}{2} \quad \text{ou} \quad \sin \frac{\alpha^p}{2}\right) d\alpha. \end{cases}$$

On y remplacera encore, dans le cas $m = 1$, p par 2, et, dans le cas $m = 2$ (d'où $p = \pm\infty$), α^p par e^β, $d\alpha$ par $\frac{1}{p}\,d\beta$, f par pf. Il viendra donc :

$$(51)\quad (\text{pour } m=1)\quad \begin{cases} \varphi = \int_0^\infty f\left(t \pm \frac{\alpha^2}{2}\right)\left(\cos\frac{r^2}{2\alpha^2} \quad \text{ou} \quad \sin\frac{r^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha, \\ \varphi = \int_0^\infty f\left(t \pm \frac{r^2}{2\alpha^2}\right)\left(\cos\frac{\alpha^2}{2} \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha; \end{cases}$$

$$(52)\quad (\text{pour } m=2)\quad \begin{cases} \varphi = \int_{-\infty}^\infty f\left(t \pm \frac{e^\beta}{2}\right)(\cos \text{ ou } \sin)\left(\frac{r^2}{2}e^{-\beta}\right)d\beta, \\ \varphi = \int_{-\infty}^\infty f\left(t \pm \frac{r^2}{2}e^{-\beta}\right)\left(\cos\frac{e^\beta}{2} \quad \text{ou} \quad \sin\frac{e^\beta}{2}\right)d\beta. \end{cases}$$

L'avant-dernière de ces intégrales définies, ou première (52), devient (du moins dans le cas $\psi = \sin\gamma$), en y changeant r en c et β en x, celle du n° **319*** (p. 114*), que nous avons reconnu ne pas admettre la différentiation en r ou c sous le signe $\int$, mais la comporter quand on y pose $e^x = c^2 e^{-u}$ (ou $e^\beta = r^2 e^{-\gamma}$); ce qui la change, au fond, en la dernière (52). Il faut donc se borner à celle-ci, comme on a pu le faire précédemment à (48).

Formons enfin, pour le cas $m = 1$ et le premier type (42), la solution particulière (destinée à être utilisée aux n^{os} **472*** et **474***) qui se compose de deux intégrales définies de ce type (42), où $f\left(t \pm \frac{\alpha^p}{2}\right)$ figure successivement avec les deux signes $+$, $-$ devant $\frac{\alpha^p}{2}$, et où $\psi(\gamma)$ est définie par l'équation correspondante (44) jointe aux conditions $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$.

L'expression de $\psi(\gamma)$ devant se trouver en raison directe de K, l'on peut, à un facteur constant près dans φ (facteur susceptible même d'être incorporé à la fonction arbitraire f), attribuer à K la valeur numérique qui simplifiera $\psi(\gamma)$ le plus possible. Prenons, en conséquence, $K = \frac{1}{2}$, et quel que soit le signe adopté dans la variable de $f\left(t \pm \frac{\alpha^p}{2}\right)$, ou plutôt de $f\left(t \pm \frac{\alpha^2}{2}\right)$, l'équation (44) à intégrer sera $\psi + \frac{d^2\psi}{d\gamma^2} = \frac{1}{2\sqrt{\gamma}}$, c'est-à-dire, précisément, celle qui a été intégrée, sous les conditions voulues $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$, au n° **404*** (p. 267*). Ainsi la fonction $\psi(\gamma)$ cherchée, commune ici aux deux expressions (42) dont il faudra faire la somme pour avoir une solution particu-

lière de (49) dans le cas $m = 1$, aura la valeur en intégrale définie (56) [même p. 267*], le développement en série (66) [p. 269*] et l'expression asymptotique (57) [p. 267*]. Puisqu'elle est déterminée, il viendra, pour satisfaire, dans l'hypothèse $m = 1$, à (49), c'est-à-dire à l'équation aux dérivées partielles

$$(53) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d^4\varphi}{dx^4} = 0,$$

la somme de deux intégrales (où r^2 se réduit à x^2),

$$(54) \qquad \varphi = \int_0^\infty \left[f\left(t + \frac{\alpha^2}{2}\right) + f\left(t - \frac{\alpha^2}{2}\right) \right] \psi\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

sous la condition du moins que $f'(\infty)$ et $f'(-\infty)$ soient une même valeur limite, comme zéro par exemple.

464*. — Usage de ces intégrales, pour les cas où la distance r à un centre fixe d'émanation a le rôle de variable principale.

Les intégrales précédentes, empruntées aux types (42), sont spécialement appropriées aux phénomènes d'émanation indéfinie autour de l'origine des distances r, c'est-à-dire aux cas où, φ ne dépendant que des deux variables r, t, et la variable r devant recevoir toutes les valeurs positives, on se donne, pour adjoindre à l'équation indéfinie (41), (46) ou (49) de l'ordre $2n$ par rapport à r, et pour compléter ainsi la détermination du problème : 1°, n relations linéaires à coefficients constants, spéciales à la limite $r = 0$, entre la fonction inconnue φ, certaines de ses dérivées successives en r ou t et des fonctions arbitraires de t; 2°, n relations spéciales à l'autre limite $r = \infty$, confondues dans l'unique condition d'évanouissement asymptotique, $\varphi = 0$. Ces $2n$ conditions accessoires sont censées d'ailleurs se rapporter aux valeurs tant négatives que positives de t depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, mais avec la supposition que le phénomène ait eu un commencement, c'est-à-dire que φ s'annule, tout au moins asymptotiquement, pour $t = -\infty$.

On vérifiera cette dernière supposition en se bornant, dans toutes les intégrales définies (42) que l'on emploiera, au signe inférieur $-$, au lieu du double signe $\pm$ qui figure dans l'expression de la variable binôme des fonctions arbitraires f, et, de plus, en annulant les premières valeurs $f(-\infty)$ de chacune de celles-ci ; ce qui, pour $t = -\infty$, réduira à zéro toutes les fonctions $f\left(t - \frac{\alpha^p}{2}\right)$, $f\left(t - \frac{r^2}{2\alpha^p}\right)$, avec leurs dérivées.

Il ne sera donc pas possible d'employer les solutions particulières dans le genre de (54); mais il en subsistera un assez grand nombre d'autres, empruntées aux formes (47), (48), (51), (52), etc., pour vérifier les n conditions relatives à $r = 0$, conditions en quelque sorte *initiales* (bien que s'appliquant à toutes les époques t), car elles expriment les circonstances successives du phénomène, *au point de départ, dans l'espace,* de la propagation de chacune.

Pour voir avec plus de netteté comment on satisfera à ces n conditions par la superposition de toutes les solutions particulières dont il s'agit, examinons spécialement le cas, $m = 1$, d'un milieu à une seule dimension, c'est-à-dire d'une barre, où l'on aura

$$r = \sqrt{x^2}, \qquad \Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^2}{dr^2}, \qquad p = 2.$$

Les intégrales à considérer y admettant l'une ou l'autre des deux formes

$$(55) \quad \int_0^\infty f\left(t - \frac{\alpha^2}{2}\right) \psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha, \qquad \int_0^\infty f\left(t - \frac{r^2}{2\alpha^2}\right) \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

leur dérivée en t la gardera (sauf la substitution de f' à f) et leur dérivée en r prendra celle-ci [p. 179*],

$$\int_0^\infty f\left(t - \frac{r^2}{2\alpha^2}\right) \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha, \qquad \text{ou} \qquad -\int_0^\infty f'\left(t - \frac{\alpha^2}{2}\right) \psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

c'est-à-dire, pour chaque intégrale, la forme qu'avait l'autre; ce qui implique, de proche en proche, la conservation des mêmes formes chez toutes les dérivées partielles de (55) en r ou en t.

Or, vu alors la constance des coefficients de l'équation indéfinie (41) [p. 453*] après substitution de $\frac{d^2}{dr^2}$ à Δ_2, il suit de là, disons-le en passant, que chacune des deux formes (55) de solution particulière donne naissance à l'autre par sa différentiation en r, comme on le voit sur (47) en y faisant $p = 2$. En effet, les dérivées partielles d'une fonction φ qui satisfait à une équation linéaire sans second membre à coefficients constants vérifient évidemment cette équation autant que le fait la fonction φ. On peut même observer que chacune des quatre formes (51), à double signe $\pm$, d'intégrales de (49), conduit aux trois autres quand on la différentie trois fois successivement : circonstance explicable par ce fait que l'équation en ψ, obtenue en annulant (43), est aussi bien vérifiée, elle aussi, par les dérivées de ψ, que par ψ et, dans le cas de (49), a chacune de ses deux solutions simples

égale, avec ou sans changement de signe, à la dérivée ψ' de l'autre.

Mais, pour revenir aux deux formes (55) des intégrales particulières employées, et de toutes leurs dérivées partielles en r ou t (sauf les substitutions de ψ', ψ'', ... à ψ et de f', f'', ... à f), observons que, à la limite $r=0$, elles deviennent respectivement $\psi(0)\int_0^\infty f\left(t-\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$ et $f(t)\int_0^\infty \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$, c'est-à-dire simplement proportionnelles à $\int_0^\infty f\left(t-\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$ et à $f(t)$, ou à $\int_0^\infty f'\left(t-\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$ et à $f'(t)$, ..., dans la supposition, bien entendu, de valeurs déterminées, non infinies, pour $\psi(0)$ et $\int_0^\infty \psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$, ou pour $\psi'(0)$ et $\int_0^\infty \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$, ... si ce sont les dérivées ψ', ... qui y figurent au lieu de ψ. D'après cela, les relations du problème spéciales à $r=0$ étant linéaires, à coefficients constants, et sans seconds membres, entre φ, ses dérivées partielles et des fonctions quelconques données de t, leurs premiers membres, après qu'on y aura substitué à φ la somme des $2n$ solutions distinctes obtenues [n de chacune des deux formes (55)] affectées de tout autant de fonctions arbitraires f, comprendront, chacun, deux parties, savoir : 1° l'une, délivrée du signe $\int$ et contenant linéairement, avec coefficients constants, ces fonctions $f(t)$, ou certaines de leurs dérivées, ou encore les fonctions arbitraires données de t; 2° l'autre, engagée tout entière sous le signe $\int$ d'intégration par rapport à α entre les deux limites $\alpha=0$, $\alpha=\infty$, et où figureront de même linéairement, partout affectées de la variable unique $t-\frac{\alpha^2}{2}$, les fonctions f ou leurs dérivées de divers ordres.

On satisfera évidemment à chaque relation en y annulant séparément la partie finie et séparément, sous le signe $\int$, la fonction totale, qui y figurera, de la variable $t-\frac{\alpha^2}{2}$ dont la valeur quelconque, dès lors commune, pourra tout aussi bien s'appeler t. Or il est clair que cette sorte de dédoublement des n conditions spéciales à $r=0$ donnera, en tout, un système de $2n$ équations différentielles linéaires à coefficients constants entre les $2n$ fonctions inconnues $f(t)$, c'est-à-dire, précisément, le nombre d'équations différentielles nécessaire pour déterminer la forme de ces fonctions, tenues en outre de s'annuler *initialement* (à l'époque $t=-\infty$). Le problème sera donc tout à fait résoluble; car l'on reconnaîtra d'ailleurs directement, dans chaque question, que l'annulation asymptotique à toute époque, pour $r=\infty$,

des intégrales particulières (55) et, par suite, de φ, sera assurée par la forme même de ψ jointe à la circonstance $f(-\infty) = 0$.

Un exemple aussi simple que possible, relatif à l'échauffement d'une longue barre par une de ses extrémités, nous servira bientôt à éclaircir cette théorie ([1]).

Observons ici qu'elle pourrait se généraliser dans les cas où, ne s'imposant plus aucune condition spéciale à $r = \infty$, ni à $t = -\infty$, on aurait à en vérifier $2n$ (ordre en r de l'équation aux dérivées partielles) à la limite $r = 0$, et où une solution particulière φ composée de deux intégrales (42), ou dans le genre de (54) [p. 460*], serait finie et bien déterminée à la limite $r = 0$, ainsi que ses $2n - 1$ premières dérivées en r. Toutes les dérivées de cette fonction φ en r ou t constitueraient évidemment, elles aussi, des solutions particulières de l'équation indéfinie, mais les $2n - 1$ premières en r, dont il s'agit, pourraient, de plus, en être des solutions distinctes, c'est-à-dire de formes non réductibles à de simples combinaisons linéaires (avec coefficients constants) des autres déjà obtenues ; ce qui n'a jamais lieu, soit pour les dérivées de φ en t, composées d'intégrales de l'un ou l'autre type (42) pareilles aux intégrales différentiées, soit même pour la $2n^{\text{ième}}$ dérivée de φ en r, ni, par suite, pour les suivantes, car l'équation aux dérivées partielles du problème, résolue par rapport à cette dérivée $2n^{\text{ième}}$ de φ, l'exprime au moyen de termes simplement proportionnels soit à φ ou à ses dérivées en r des $2n - 1$ premiers ordres, soit à leurs dérivées en t.

Donc, alors, la solution particulière analogue à (54) pourrait, par elle-même et par ses $2n - 1$ premières dérivées en r, fournir, en y changeant la fonction f à chaque différentiation, $2n$ solutions distinctes, composées, chacune, de deux intégrales empruntées alternativement à la première et à la seconde des deux formes (42). Et, de plus, à la limite $r = 0$, ces $2n$ solutions particulières, avec leurs dérivées successives en r ou t, se réduiraient, abstraction faite de facteurs constants, à des termes de l'un ou l'autre des *trois* types $f(t)$, $\int_0^\infty f\left(t - \frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha$, $\int_0^\infty f\left(t + \frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha$. Or la superposition, à ces $2n$

([1]) On en trouve d'autres exemples un peu moins simples, sur le mouvement transversal de longues barres élastiques ébranlées continûment à une de leurs extrémités, et sur le phénomène de leur choc par un corps massif, aux pp. 435 à 456, 480 à 487 et 491 à 502 du Volume intitulé *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse.*

solutions particulières, des $4n$ solutions plus simples analogues aux huit (51), ou composées, chacune, d'une seule intégrale (42), formerait une expression de φ, pourvue en tout de $6n$ fonctions arbitraires f, et se réduisant encore, pour $r=0$, à des termes de ces trois types. Alors, si chacune des $2n$ conditions proposées, spéciale à la limite $r=0$, consistait en une relation linéaire, à coefficients constants, entre φ, certaines de ses dérivées et une fonction arbitraire donnée de t, on pourrait, d'une part, y annuler la partie finie ou dégagée du signe $\int_0^\infty$, d'autre part, y égaler séparément à zéro, sous ce signe $\int$, la partie affectée de la variable $t-\frac{\alpha^2}{2}$ et la partie affectée de la variable $t+\frac{\alpha^2}{2}$. Chacune des $2n$ conditions spéciales à $r=0$ se décomposant ainsi en trois, dans la seconde et la troisième desquelles rien n'empêcherait plus d'appeler t la variable commune $t-\frac{\alpha^2}{2}$ ou $t+\frac{\alpha^2}{2}$, l'on aurait, en tout, $6n$ équations soit finies, soit différentielles, en t et les $6n$ fonctions arbitraires $f(t)$ introduites. On devrait donc pouvoir choisir celles-ci de manière à vérifier toutes les conditions proposées; et ce serait, comme on voit, grâce à l'extrême surabondance des formes trouvées de solutions possibles, de même que, dans l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, la grande multiplicité des formes obtenues de leurs solutions simples y a rendu facile (p. 296*) la vérification des données d'état initial.

Mais revenons aux problèmes plus usuels où la fonction φ, nulle à toute époque pour $r=\infty$ après l'avoir été partout pour $t=-\infty$, doit vérifier, à la limite $r=0$, n conditions seulement, et passons aux cas de deux ou de trois coordonnées x et y, ou x, y et z, c'est-à-dire aux questions concernant des plaques minces ou des corps massifs. Les intégrales à y employer seront dans le genre soit de (48) et de la seconde des deux formules quadruples (52) réduite au signe — (au lieu du double signe $\pm$), soit des formules (47) prises avec $p=-2$.

Il y arrivera fréquemment, comme, par exemple, si l'on doit se servir des formules (47), ou s'il s'agit du problème des températures produites autour d'un centre, *supposé unique*, d'émanation calorifique, choisi comme origine des distances r, que la fonction φ croîtra indéfiniment à l'approche de cette origine : d'où il suit que les conditions données, spéciales à $r=0$, ne devront pas alors contenir φ, sous peine de n'avoir aucun sens. L'on ne voit pas, en effet, quelle

raison permettrait d'y introduire, au lieu de φ tout seul, son produit, susceptible d'être fini et déterminé à la limite $r = 0$, par une fonction évanouissante de r, vu qu' on ne connaît à un tel produit aucune signification physique, ni, par suite, aucun rôle justifiable.

Mais il n'en est pas de même des expressions comme $-r^{m-1}\dfrac{d\varphi}{dr}$, $r^{m-1}\dfrac{d\Delta_2\varphi}{dr}$, ..., ou plutôt de leurs produits par 2π dans le cas, $m = 2$, d'une plaque, et par 4π dans le cas, $m = 3$, d'un solide ; car, si l'on désigne par σ l'étendue, $2\pi r$ ou $4\pi r^2$, d'une figure (circulaire ou sphérique) décrite d'un rayon constant quelconque r autour de l'origine, les produits $-\sigma\dfrac{d\varphi}{dr}$, $\sigma\dfrac{d\Delta_2\varphi}{dr^2}$ exprimeront, à des facteurs constants près, l'un, la quantité totale de chaleur répandue, par unité de temps, à travers la figure σ, dans la partie du corps extérieure à cette figure, et le second (quand il s'agit du mouvement transversal d'une plaque), l'impulsion totale sollicitant durant l'unité de temps, encore à travers cette figure σ, la même partie extérieure. Or, pour r infiniment petit, ces quantités seront ou des fonctions données de t, ou en relation plus ou moins directe avec de telles fonctions. Et il importe de remarquer qu'elles recevront, à la limite $r = 0$, des expressions très simples, surtout quand on adoptera pour φ des intégrales empruntées à la première forme (42), comme, par exemple, (48) et la première (47). Cela résulte en général de la première formule (17) et de la deuxième (19) de la XXXIII[e] Leçon (pp. 187* et 188*), où figurent des intégrales définies qui, pour $r = 0$, et après substitution de $f\left(t - \dfrac{r^2}{2\alpha q}\right)$ à $f\left(\dfrac{r^2}{2\alpha q}\right)$, ou de $f\left(t - \dfrac{r^2}{2\alpha}\right)$ à $f\left(\dfrac{r^2}{2\alpha}\right)$, se réduisent, quand elles sont déterminées, au produit de $f(t)$ par des facteurs constants.

Une application simple, que nous ferons de la première expression (47) et de (48), au problème de l'échauffement d'un corps à une, deux ou trois dimensions, par des quantités données de chaleur versées d'une manière continue en un de ses points, nous suffira pour reconnaître comment s'emploieront les solutions dont il s'agit ici ([1]).

([1]) On peut voir, dans le Volume intitulé *Application des potentiels*, etc. (pp. 466 à 480, 487 à 490 et 502 à 504), comment la dernière formule (52), en y réduisant même le second facteur sous le signe $\int$ à $\sin\dfrac{c^3}{2}$ (ou excluant le cas du cosinus) pour que l'intégrale reste finie à la limite $r = 0$, fournit la solution des

465*. — Premier exemple : échauffement d'une barre, à travers sa base, par le rayonnement d'un milieu à température variable donnée.

Comme exemple du cas d'un corps n'ayant qu'une dimension, évaluons les températures φ prises successivement, à partir d'une valeur initiale (pour $t=-\infty$) supposée nulle, par les diverses sections d'une barre homogène qui s'étend sur toute la longueur des abscisses x ou r positives et qui, latéralement imperméable à la chaleur, reçoit, par sa base $r=0$, un flux de chaleur sans cesse proportionnel à l'excès de la température variable donnée $F(t)$ d'un milieu rayonnant extérieur sur la température intérieure φ de cette base. Alors, en appelant k un certain coefficient constant, essentiellement positif, le mode d'échauffement ainsi défini revient à écrire

$$(56) \qquad (\text{pour } r=0) \quad \frac{d\varphi}{dr} - k[\varphi - F(t)] = 0.$$

Telle est la condition, spéciale à $r=0$, qu'il faudra joindre aux équations, l'une, indéfinie, les autres, relatives à $t=-\infty$ et à $r=\infty$, auxquelles nous avons vu (p. 458*) qu'on satisfait par les deux solutions particulières (47), prises ici avec $p=2$.

Superposons donc ces deux intégrales, en remplaçant d'ailleurs, dans la première, f par f', en vue de simplifications ultérieures, et, dans la seconde, f par f_1, pour maintenir distinctes les deux fonctions $f\left(t-\frac{\alpha^2}{2}\right)$, $f\left(t-\frac{r^2}{2\alpha^2}\right)$; puis, dans la solution générale obtenue,

$$(57) \qquad \varphi = \int_0^\infty f'\left(t-\frac{\alpha^2}{2}\right)e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}}\,d\alpha - \int_0^\infty f_1\left(t-\frac{r^2}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha,$$

déterminons les deux fonctions f', f_1 de manière que la condition (56) se trouve *identiquement* vérifiée. Une différentiation immédiate donnant

$$(58) \quad \frac{d\varphi}{dr} = -\int_0^\infty f'\left(t-\frac{r^2}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha - \int_0^\infty f_1'\left(t-\frac{\alpha^2}{2}\right)e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}}\,d\alpha,$$

---

deux problèmes de l'ébranlement transversal continu d'une plaque élastique, à partir d'un de ses points, et de son choc normal par un corps massif.

Les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, des 6 et 13 avril 1885 (t. C, pp. 935 et 974), contiennent également deux Notes où j'ai traité par les intégrales dont il s'agit ici le problème, sur la résistance des fluides au mouvement soit d'une sphère, soit d'un cylindre, indiqué plus haut pour le cas de la sphère (p. 372*).

il résulte de cette formule (58) et de (57), vu [p. 180*] la valeur $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ de l'expression $\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha$,

$$(59) \qquad (\text{pour } r = 0) \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dr} = -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} f'(t) - \displaystyle\int_0^\infty f_1'\left(t - \frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha, \\ \varphi = \displaystyle\int_0^\infty f'\left(t - \frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha + \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} f_1(t); \end{cases}$$

en sorte que la relation (56) devient

$$\begin{cases} -\sqrt{\dfrac{\pi}{2}} [f'(t) + k f_1(t)] + k \mathrm{F}(t) \\ -\displaystyle\int_0^\infty \left[f_1'\left(t - \frac{\alpha^2}{2}\right) + k f'\left(t - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right] d\alpha = 0. \end{cases}$$

Celle-ci sera donc satisfaite identiquement en posant : 1° d'une part,

$$f_1'\left(t - \frac{\alpha^2}{2}\right) + k f'\left(t - \frac{\alpha^2}{2}\right) = 0,$$

c'est-à-dire $f_1'(t) = -k f'(t)$ ou enfin, si l'on détermine $f(t)$ de manière que $f(-\infty) = 0$,

$$(60) \qquad f_1(t) = -k f(t);$$

2° d'autre part,

$$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} [f'(t) + k f_1(t)] + k \mathrm{F}(t) = 0,$$

ou bien, par la substitution à $f_1(t)$ de sa valeur (60), suivie de réductions évidentes,

$$(61) \qquad f'(t) - k^2 f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \mathrm{F}(t).$$

Le calcul des deux fonctions arbitraires f, f_1 se ramène donc à intégrer l'équation différentielle linéaire et du premier ordre (61), où la fonction inconnue est $f(t)$. D'après la formule (21) de la XXXVI[e] Leçon (p. 187), il viendra, en effectuant les intégrations, pour fixer les idées, à partir de la valeur $t = 0$, et appelant c une constante arbitraire que la condition $f(-\infty) = 0$ ne détermine pas,

mais que nous verrons s'éliminer de la solution définitive,

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} f(t) &= e^{k^2 t}\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,k\int_0^t \mathrm{F}(\tau)\,e^{-k^2\tau}\,d\tau + c\right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,k\int_0^t \mathrm{F}(\tau)\,e^{k^2(t-\tau)}\,d\tau + ce^{k^2 t}. \end{aligned}\right.$$

Donc, abstraction faite des termes en c, les valeurs (62), (60) de $f(t)$ et de $f_1(t)$ détermineront ou rendront parfaitement calculable l'expression (57) de φ. Or il est aisé de reconnaître que les termes en c se détruisent dans (57), et que, par suite, l'on peut poser simplement $c = 0$. En effet, ces termes se réduisent, pour $f(t)$ et pour $f_1(t)$, à $ce^{k^2 t}$, $-cke^{k^2 t}$, et, pour $f'(t)$, à $ck^2 e^{k^2 t}$. La partie correspondante du second membre de (57) est ainsi

$$\left\{\begin{aligned} &ck^2\int_0^\infty e^{k^2\left(t-\frac{\alpha^2}{2}\right)-\frac{r^2}{2\alpha^2}}\,d\alpha - ck\int_0^\infty e^{k^2\left(t-\frac{r^2}{2\alpha^2}\right)-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha \\ &\quad = cke^{k^2 t}\left[\int_0^\infty e^{-\left(\frac{k^2\alpha^2}{2}+\frac{k^2 r^2}{2k^2\alpha^2}\right)}\,k\,d\alpha - \int_0^\infty e^{-\left(\frac{k^2 r^2}{2\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{2}\right)}\,d\alpha\right]; \end{aligned}\right.$$

et l'on voit que, dans l'expression entre crochets, la première intégrale détruit bien la seconde quand on y adopte $k\alpha$ pour variable d'intégration ; ce qui revient à remplacer $k\alpha$ par α et $k\,d\alpha$ par $d\alpha$.

466*. — Cas particulier de l'échauffement par contact.

Deux cas spécialement intéressants sont : 1° celui où, dans (56), k devient infiniment petit et $k\varphi$ négligeable, mais $\mathrm{F}(t)$ assez grand pour que $k\,\mathrm{F}(t)$ égale une fonction finie sensible de t, et où, par conséquent, c'est le flux de chaleur introduit dans la barre, exprimé proportionnellement par $-\frac{d\varphi}{dr}$, que l'on se donne à chaque instant ; 2° l'autre cas extrême, dit *de l'échauffement par contact,* où, k étant, au contraire, infiniment grand, mais, le flux de chaleur, encore fini, l'équation (56) revient à poser $\varphi = \mathrm{F}(t)$ et à prendre comme température même de l'extrémité $x = 0$ de la barre celle du milieu rayonnant.

Comme nous considérerons au numéro suivant le premier cas (généralisé même, quant au nombre de dimensions du corps), bornons-nous ici à une étude directe du second, savoir, celui de l'échauffement de la barre par contact, où, pour $r = 0$, l'on se donne $\varphi = \mathrm{F}(t)$.

Cette condition, écrite $\varphi - F(t) = 0$, n'est autre, d'après la seconde relation (59), que

$$(63) \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}} f_1(t) - F(t) + \int_0^\infty f'\left(t - \frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha = 0;$$

et son dédoublement conduit à poser

$$f'(t) = 0, \qquad f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} F(t).$$

L'expression (57) devient donc

$$(64) \qquad \varphi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F\left(t - \frac{r^2}{2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha.$$

Si, par exemple, la température donnée $F(t)$, nulle pour $t < 0$, s'éloigne de plus en plus de zéro entre les deux époques très rapprochées $t = 0$, $t = \varepsilon$, et devient une constante c dès que t a dépassé la petite valeur positive ε, cette expression (64) de φ, nulle elle-même pour t négatif et négligeable pour $t < \varepsilon$, se composera principalement, dès que t aura atteint une valeur positive notable, d'éléments où l'on aura $F\left(t - \frac{r^2}{2\alpha^2}\right) = c$. Leur champ s'étendra de $\alpha = \frac{r}{\sqrt{2(t-\varepsilon)}}$, ou, sensiblement, de $\alpha = \frac{r}{\sqrt{2t}}$ à $\alpha = \infty$; car $t - \frac{r^2}{2\alpha^2}$ y croîtra de ε à t. Il viendra donc

$$(65) \quad (\text{pour } t \text{ négatif}) \quad \varphi = 0, \qquad (\text{pour } t \text{ positif}) \quad \varphi = c\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{r}{\sqrt{2t}}}^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha.$$

L'intégrale définie s'y calculera par les procédés indiqués au n° 338* (p. 158*). Sa valeur, évidemment positive et d'autant moindre que la limite inférieure y est plus élevée, n'atteint pas $\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, sauf lorsque la limite inférieure s'y annule. Ainsi, en appelant $\theta\left(\frac{r}{\sqrt{2t}}\right)$ une fraction décroissante de 1 à zéro quand $\frac{r}{\sqrt{2t}}$ grandit de zéro à l'infini, l'expression (65) de φ, pour t positif, sera $\varphi = c\,\theta\left(\frac{r}{\sqrt{2t}}\right)$.

On voit que chaque température $\varphi =$ const. comprise entre zéro et c se propagera, suivant les x ou r positifs, d'autant plus vite qu'elle

différera moins de zéro, mais d'un mouvement, ayant pour équation $\frac{r}{\sqrt{2t}} = \text{const.}$, sans cesse retardé et où l'espace total parcouru r ne croîtra que comme la racine carrée du temps écoulé t. Il y aura donc, le long de la barre, une *dissémination indéfinie* de toutes les températures intermédiaires entre zéro et c, quelque rapide qu'ait pu être leur succession à l'origine $r = 0$.

On donne à l'intégrale (64) une autre forme, plus avantageuse quand la fonction $F(t)$ est nulle hors d'un intervalle restreint, en prenant pour variable d'intégration la fonction de α qui constitue, sous le signe $\int$, la variable même dont F dépend, savoir $t - \frac{r^2}{2\alpha^2}$. Posons ainsi

$$t - \frac{r^2}{2\alpha^2} = \tau; \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \frac{r}{\sqrt{2(t-\tau)}} \qquad \text{et} \qquad d\alpha = \frac{r\,d\tau}{2(t-\tau)\sqrt{2(t-\tau)}}.$$

Il viendra, en observant que τ croît de $-\infty$ à t quand α grandit de zéro à l'infini,

$$(66) \qquad \varphi = \frac{r}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \frac{F(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)\sqrt{(t-\tau)}}.$$

Si, par exemple, la température donnée $F(t)$ ne diffère de zéro que durant l'instant $d\tau$ compris entre deux époques consécutives dont nous choisirons la première pour origine des temps, l'intégrale (66), sans élément pour $t < 0$ et réduite à un seul élément pour $t > 0$, sera, en posant pour abréger $F(0)\,d\tau = dq$,

$$(67) \quad (\text{pour } t < 0) \quad \varphi = 0, \qquad (\text{pour } t > 0) \quad \varphi = \frac{dq}{t\sqrt{\pi}} \left[\frac{r}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{r^2}{4t}}\right].$$

Telle est évidemment, aussi simplifiée que possible, la forme des éléments dont se compose l'expression plus générale (66), ou, par suite, (64), de φ.

On remarquera que, si l'on y pose $\frac{r}{2\sqrt{t}} = \rho$, l'expression de φ pour $t > 0$ devient $\varphi = \frac{dq}{t\sqrt{\pi}} \rho e^{-\rho^2}$. Elle ne s'annule que pour $\rho = 0$ et pour $\rho = \infty$, c'est-à-dire seulement aux deux extrémités $r = 0$ et $r = \infty$ de la barre. Dans l'intervalle, sa dérivée en r, proportionnelle, pour une époque donnée t, à la dérivée en ρ du facteur $\rho e^{-\rho^2}$, savoir, à $e^{-\rho^2}(1 - 2\rho^2)$, s'annule et change de signe au point où $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-

à-dire où $r=\sqrt{2t}$. Donc, en ce point, la température φ atteint sa valeur maxima, égale, d'après (67), à $\frac{dq}{\sqrt{2\pi e}}\frac{1}{t}$, et, par conséquent, sans cesse décroissante comme l'inverse du temps t.

Ainsi, l'effet, sur la barre, du contact *momentané*, à sa base $x=0$, d'un corps dont la température différait de la température générale a été de produire une sorte d'onde calorifique, qui se propage en s'affaiblissant, et dont le *sommet* parcourt des espaces totaux r exprimés par $\sqrt{2t}$ ou proportionnels à la racine carrée du temps t écoulé depuis l'instant du contact.

Cette sorte de propagation, avec *ralentissement* continu et *dissémination* indéfinie *tant en avant qu'en arrière* du point où le changement survenu atteint son maximum, est analogue à celle que nous avons reconnue tout à l'heure, dans le transport de chaque valeur de φ le long d'une barre *maintenue* en contact, par son extrémité, avec un milieu plus chaud ou plus froid qu'elle. On voit combien l'une et l'autre diffèrent de la propagation, *uniforme* et *sans dissémination* antérieure ni même postérieure, impliquée par l'équation du son dans les cas de une ou de trois coordonnées. Cette remarque s'appliquera, ci-après, à tous les phénomènes régis par les équations (39), (40), (41) [pp. 452* et 453*], non homogènes quant à l'ordre des dérivées qui y figurent.

467*. — Deuxième exemple : échauffement d'un corps indéfini, à une, deux ou trois dimensions, par l'introduction continue, en un de ses points, de quantités données de chaleur [1].

Passons au premier cas spécial qu'il nous reste à traiter (p. 468*), celui où la barre, occupant tout l'axe des x positifs, reçoit par son extrémité $x=0$ un flux de chaleur connu à chaque instant ; mais, pour plus de symétrie, et en vue d'étendre la question aux corps à deux où trois dimensions chauffés en un point intérieur, ajoutons une seconde barre pareille, disposée le long des x négatifs et pourvue sans cesse, encore à travers sa base $x=0$, des mêmes quantités de chaleur que la première.

Imaginons, en d'autres termes, une barre indéfinie suivant les deux sens, et supposons qu'une *source* calorifique, surgissant en son point choisi comme origine des distances r, y verse par unité de temps un

---

[1] Cette question me paraît avoir été résolue, en premier lieu, par Duhamel (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIIe Cahier; 1848).

débit, $F(t)$, double du flux introduit à chaque instant dans la précédente considérée d'abord, afin que ce débit $F(t)$, se partageant, par raison de symétrie, en deux flux égaux, un pour chacune des deux barres ainsi accolées, y fasse naître aux diverses distances r les températures φ que l'on observerait dans une seule si l'autre n'existait pas.

Sous cette forme, la question s'étend d'elle-même aux cas de deux ou de trois coordonnées ; et alors, à un point de vue général, elle consiste à chercher quelles températures successives φ, supposées nulles partout primitivement (pour $t = -\infty$), se produisent dans un milieu à m dimensions (m étant 1, 2 ou 3), aux diverses distances r d'une source de chaleur située à l'origine et dont on donne à chaque instant le débit $F(t)$ par unité de temps.

Appelons σ l'étendue de la figure de rayon r quelconque décrite dans le milieu autour de la source comme centre, étendue mesurée par 2, dans le cas $m = 1$ où elle comprend les *deux* sections normales $x = \pm r$, de grandeur *constante*; par $2\pi r$, dans le cas $m = 2$ d'une plaque, enfin par $4\pi r^2$ dans celui, $m = 3$, d'un solide : et le flux total qui traversera cette figure durant l'unité de temps pourra être censé avoir l'expression $-\sigma \frac{d\varphi}{dr}$. Donc, si l'on y fait tendre r vers zéro, afin de rendre le flux en question identique au débit $F(t)$ de la source absorbé à chaque instant autour de l'origine, il viendra, comme condition caractéristique du problème,

$$(68) \qquad (\text{pour } r = 0) \quad -\sigma \frac{d\varphi}{dr} = F(t).$$

Telle est la relation qui complétera la détermination de φ en s'adjoignant aux équations, indéfinie ou autres, auxquelles nous avons trouvé, dans le cas $m = 2$, l'intégrale (48) [p. 458*], et, dans les autres cas, les deux intégrales (47) [p. 458*], prises avec $p = 2$ quand $m = 1$ et avec $p = -2$ quand $m = 3$.

D'ailleurs, si l'on se borne à (48) et à la première (47), la première formule (17) de la p. 187* et la seconde (19) de la p. 188*, où l'on remplacera $f\left(\frac{r^2}{2\alpha^q}\right)$ par $f\left(t - \frac{r^2}{2\alpha^q}\right)$, $f\left(\frac{r^2}{2\alpha}\right)$ par $f\left(t - \frac{r^2}{2\alpha}\right)$, $\psi'\left(\frac{\alpha^q}{2}\right)$ par $e^{-\frac{\alpha^q}{2}}$, $\psi'\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ par $-e^{-\frac{\alpha}{2}}$ et q par $\frac{2}{m}$, donneront, à la limite $r = 0$:

1° pour le cas $m = 1$,

$$-r^{m-1} \frac{d\varphi}{dr} = f(t) \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(t);$$

2° pour le cas $m=2$,

$$-r^{m-1}\frac{d\varphi}{dr}=f(t)\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha=2f(t)\left(-e^{-\frac{\alpha}{2}}\right)_0^\infty=2f(t);$$

3° enfin, pour le cas $m=3$, en posant, dans le résultat, $\alpha=\beta^3$, $d\alpha=3\beta^2\,d\beta$, puis intégrant par parties et observant que le terme intégré $\left(-\beta e^{-\frac{\beta^2}{2}}\right)$ s'annule aux deux limites $\beta=0$, $\beta=\infty$,

$$\left\{\begin{aligned}-r^{m-1}\frac{d\varphi}{dr}&=\frac{1}{3}f(t)\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha^{\frac{2}{3}}}\,d\alpha=f(t)\int_{\beta=0}^{\beta=\infty}\beta\,d\left(-e^{-\frac{\beta^2}{2}}\right)\\&=f(t)\int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{2}}\,d\beta=\sqrt{\frac{\pi}{2}}f(t).\end{aligned}\right.$$

Multiplions ces trois valeurs de $-r^{m-1}\frac{d\varphi}{dr}$, respectivement, par 2, 2π, 4π, afin qu'elles deviennent celles de $-\sigma\frac{d\varphi}{dr}$, et égalons-les alors, d'après (68), à $F(t)$. Il en résultera aisément les expressions de la fonction arbitraire f, savoir

$$(69)\qquad\left\{\begin{aligned}f(t)&=\frac{F(t)}{\sqrt{2\pi}}\quad&(\text{si } m=1),\\f(t)&=\frac{F(t)}{4\pi}\quad&(\text{si } m=2),\\f(t)&=\frac{F(t)}{2\pi\sqrt{2\pi}}\quad&(\text{si } m=3);\end{aligned}\right.$$

et la première intégrale (47) ou l'intégrale (48) fourniront enfin les solutions cherchées :

$$(70)\qquad\left\{\begin{aligned}\varphi&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty F\left(t-\frac{\alpha^2}{2}\right)e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}}\,d\alpha\quad&(\text{pour } m=1),\\\varphi&=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty F\left(t-\frac{e^\beta}{2}\right)e^{-\frac{r^2}{2}e^{-\beta}}\,d\beta\quad&(\text{pour } m=2),\\\varphi&=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty F\left(t-\frac{1}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{r^2\alpha^2}{2}}\,d\alpha\quad&(\text{pour } m=3).\end{aligned}\right.$$

On les ramène à une forme commune, en y changeant la variable d'intégration α ou β de manière que, sous le signe $\int$, le facteur F devienne pareil dans toutes les trois. Donnons, par exemple, à ce facteur, la forme qu'il a dans (64), en introduisant une nouvelle variable

d'intégration γ telle, que $\alpha = \frac{r}{\gamma}$ s'il s'agit de la première (70), que $\beta = 2\log\frac{r}{\gamma}$ $\left(\text{ou } e^\beta = \frac{r^2}{\gamma^2}\right)$ s'il s'agit de la deuxième, et que $\alpha = \frac{\gamma}{r}$ s'il s'agit de la troisième. Cette quantité γ aura à prendre, dans les trois cas, toutes les valeurs positives, ce qui donnera pour les deux limites, $0, \infty$; et les formules (70), multipliées par r^{m-2}, deviendront aisément

$$(71)\qquad \varphi r^{m-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m \int_0^\infty \mathrm{F}\left(t - \frac{r^2}{2\gamma^2}\right) e^{-\frac{\gamma^2}{2}} \gamma^{m-3}\,d\gamma.$$

Appliquons cette formule comme nous avons fait au numéro précédent pour (64), et nous obtiendrons des résultats analogues.

Si, par exemple, le débit $\mathrm{F}(t)$ de la source de chaleur, après avoir été nul de $t = -\infty$ à $t = 0$, change rapidement, entre $t = 0$ et $t = \varepsilon$, depuis zéro jusqu'à une valeur constante c, et reste ensuite invariable, le second membre de (71) ne contiendra, pour $t < 0$, que des éléments nuls, et, à fort peu près, pour t égal à un assez grand nombre de fois ε, que des éléments où $\mathrm{F}\left(t - \frac{r^2}{2\gamma^2}\right)$ aura la valeur c, γ y variant de $\frac{r}{\sqrt{2(t-\varepsilon)}}$ à ∞, ou, sensiblement, de $\frac{r}{\sqrt{2t}}$ à ∞. Il viendra donc

$$(72)\qquad (\text{pour } t > 0)\quad \varphi r^{m-2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^m c \int_{\frac{r}{\sqrt{2t}}}^\infty e^{-\frac{\gamma^2}{2}} \gamma^{m-3}\,d\gamma.$$

Ainsi, le produit ou le quotient φr^{m-2}, qui se réduit à φ dans le cas d'une plaque, sera uniquement fonction du rapport $\frac{r}{\sqrt{2t}}$, en sens inverse duquel il variera (pour la grandeur absolue, c'est-à-dire abstraction faite du signe de c); et chacune de ses valeurs s'observera successivement à des distances r de la source croissantes comme la racine carrée du temps t écoulé depuis l'existence de celle-ci. Ces lois de propagation et de dissémination sont bien pareilles à celles qu'impliquait, pour une barre chauffée par contact, la formule (65) [p. 469*]; mais elles concernent ici la fonction φr^{m-2} et non φ.

Prenons maintenant comme variable d'intégration, dans (71), l'expression même $t - \frac{r^2}{2\gamma^2}$ dont dépend sous le signe $\int$ la fonction F, ou posons $t - \frac{r^2}{2\gamma^2} = \tau$, ainsi que nous avons fait (p. 470*) dans (64). Nous trouverons, pareillement à (66), après quelques réductions im-

médiates,

$$(73)\qquad \varphi = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^m \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \frac{F(\tau)\,d\tau}{(\sqrt{t-\tau})^m}.$$

Cette expression se compose évidemment de toutes celles qu'elle donnerait pour φ si le débit $F(t)$, nul en dehors de l'instant $d\tau$ compris entre deux époques consécutives τ, $\tau + d\tau$, avait, durant cet instant unique quelconque, sa valeur effective $F(\tau)$. Choisissons, pour simplifier, la première des deux époques considérées τ, $\tau + d\tau$ comme origine des temps, ou posons $\tau = 0$ dans le seul élément du second membre de (73) qui puisse alors différer de zéro; et appelons dq le *débit total correspondant*, $F(0)\,d\tau$, de la source. Il viendra, pour exprimer sous la forme la plus réduite possible l'élément de la solution générale (73), de même que la double formule (67) l'exprimait pour (66),

$$(74)\quad (\text{pour } t < 0)\quad \varphi = 0, \qquad (\text{pour } t > 0)\quad \varphi = \frac{dq}{(2\sqrt{\pi t})^m}\, e^{-\frac{r^2}{4t}}.$$

A une époque positive quelconque t, le milieu contient bien la quantité dq de chaleur qu'on y avait, pour $t = 0$, confinée à l'origine des coordonnées : car la chaleur emmagasinée dans chaque espace annulaire σdr compris entre les distances r, $r + dr$ de l'origine, et correspondant à l'augmentation φ de sa température, est représentée par $\varphi\sigma dr$; ce qui donne pour toute l'étendue du milieu l'accroissement total $\int_0^\infty \varphi\sigma dr$, quantité que l'on reconnaît aisément avoir la valeur dq. En effet, si l'on appelle encore (comme à la page 470*) ρ le rapport $\frac{r}{2\sqrt{t}}$, la seconde expression (74) de φ change $\int_0^\infty \varphi\sigma dr$: 1° dans le cas $m = 1$ (où $\sigma = 2$), en $\frac{2\,dq}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\rho^2}\,d\rho$; 2° dans le cas $m = 2$ (où $\sigma = 2\pi r$), en $2\,dq\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho\,d\rho$; 3° enfin, dans le cas $m = 3$ (où $\sigma = 4\pi r^2$), en $\frac{4\,dq}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^2\,d\rho$. Or les deux premières de ces expressions, dont l'une contient l'intégrale de Poisson et, l'autre, une intégrale immédiatement calculable, ont bien pour valeur dq. Et, quant à la troisième, on peut, comme on l'a fait avant les formules (69) pour une expression analogue, y écrire l'intégrale, $\int_{\rho=0}^{\rho=\infty} \frac{\rho}{2}\,d(-e^{-\rho^2})$, puis intégrer par parties; ce qui conduit encore au résultat dq.

Observons que nous aurions obtenu la même somme limite, dq, en groupant à volonté, de toute autre manière, les produits $\varphi\, d\varpi$ relatifs aux divers éléments $d\varpi$, infiniment petits en tous sens, de l'espace indéfini considéré. Autrement dit, l'intégrale $\int \varphi\, d\varpi$ est finalement la même, *quelle que soit la forme* attribuée à son champ $\int d\varpi$ de dimensions indéfiniment croissantes; et l'on n'en restreint pas la signification en limitant ce champ par une figure σ d'égal rayon r autour de l'origine. Car φ ayant, d'après la seconde formule (74), partout le même signe, l'intégrale $\int \varphi\, d\varpi$ constitue une série convergente à raison de la seule petitesse de ses termes et dont, par suite, la somme ne dépend pas du mode de groupement de ceux-ci. Il n'en serait évidemment plus de même, et *la forme du champ* $\int d\varpi$ *d'intégration influerait* au contraire *sur la somme limite*, comme on l'a vu par un exemple au n° 327* (pp. 127* et 128*), si les éléments $\varphi\, d\varpi$ étaient, les uns positifs, les autres négatifs, et avaient, dans chacune de ces deux catégories, une somme *absolue* indéfiniment croissante; car alors cette forme du champ d'intégration pourrait, au moins jusqu'à un certain point, régler la proportion mutuelle des éléments positifs et des éléments négatifs introduits, suivant laquelle l'excédent des uns sur les autres, c'est-à-dire leur somme algébrique, varie de l'infini négatif à l'infini positif.

Il y a lieu de se demander comment chacune des couches $\sigma\varphi\, dr$, de grandeur constante, qui composent ensemble la quantité dq, se propage sans cesse à des distances r de plus en plus grandes, ou, en d'autres termes, comment doit grandir d'instant en instant son rayon r, pour que la figure σ qui la limite intérieurement ait toujours en avant ou en dehors d'elle la même partie, $\int_r^\infty \varphi\sigma\, dr$, de dq.

Cette partie ayant encore comme expression, vu la seconde valeur (74) de φ,

$$(75)\qquad \frac{dq}{(\sqrt{\pi})^m} \int_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\rho^2} \left(\frac{\sigma}{r^{m-1}}\right) \rho^{m-1}\, d\rho,$$

où $\frac{\sigma}{r^{m-1}}$ est le nombre 2 pour $m = 1$, 2π pour $m = 2$ et 4π pour $m = 3$, on voit que son invariabilité équivaut à écrire

$$\frac{r}{2\sqrt{t}} = \text{une const. } \rho.$$

Donc toutes les couches de chaleur émanées à la fois de l'origine s'en

éloignent à des distances croissantes comme la racine carrée du temps t, et, par conséquent, leurs rayons r, ainsi que leurs épaisseurs dr, grandissent en gardant leurs rapports mutuels acquis dès le début de la diffusion. L'analogie de ces lois avec celles que nous avions déjà obtenues dans l'étude d'autres phénomènes de conductibilité (pp. 469*, 471* et 474*) n'est pas moins évidente que leur contraste avec les lois de propagation exprimées par l'équation du son (p. 448*). D'après la seconde formule (74), qui revient à

$$\varphi = \frac{dq}{(2\sqrt{\pi t})^m} e^{-\rho^2} = \frac{dq}{(r\sqrt{\pi})^m} \rho^m e^{-\rho^2},$$

la température de chaque couche décroîtra en raison inverse de la puissance $m^{\text{ième}}$ de la distance r parcourue.

Il faut distinguer spécialement la couche qui apporte en chaque endroit la température la plus élevée qu'on y observe (dq étant supposé positif, pour fixer les idées). Nous la déterminerons en mettant encore φ sous la forme $\frac{dq}{(r\sqrt{\pi})^m}(\rho^m e^{-\rho^2})$, quantité proportionnelle, pour chaque point déterminé, c'est-à-dire quand r est constant, au facteur positif $\rho^m e^{-\rho^2}$, et en observant que celui-ci, nul aux deux limites $\rho = 0$, $\rho = \infty$, ou $t = \infty$, $t = 0$, devient maximum à l'instant t où ρ, rapport de r à $2\sqrt{t}$, annule sa dérivée $\rho^{m-1} e^{-\rho^2}(m - 2\rho^2)$. Ainsi, à la distance quelconque r de l'origine, le maximum dont il s'agit se produit quand ρ atteint la valeur $\sqrt{\frac{m}{2}}$, caractéristique d'une certaine couche élémentaire; et l'on voit, d'une part, que cette couche est celle dont le rayon r croît d'après la loi très simple $r = \sqrt{2mt}$; d'autre part, qu'elle a sa température, partout la plus forte aux endroits successivement atteints par elle, représentée, d'après la seconde relation (74), par la formule presque aussi simple $\varphi = \frac{dq}{(2\sqrt{\pi e t})^m}$.

Dans le cas d'une plaque, ou de $m = 2$ et de $\sigma = 2\pi r$, l'expression (75) s'évalue sous forme finie : elle devient

$$dq\left(-e^{-\rho^2}\right)_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}^{\infty} = e^{-\frac{r^2}{4t}} dq.$$

En y faisant $r = \sqrt{2mt} = 2\sqrt{t}$, elle donne $\frac{dq}{e}$, c'est-à-dire $\frac{dq}{2,718\ldots}$ (ou sensiblement moins que $\frac{dq}{2}$) pour la partie de la chaleur totale dq

qui précède, en se diffusant, la couche dont la température est à chaque instant la plus forte observée aux points où elle passe. Cette couche, caractéristique en quelque sorte du *sommet*, relatif à chaque endroit, de l'onde de chaleur *propagée* le long des rayons r, se trouve donc en avant de celle qui correspondrait à la valeur $\frac{dq}{2}$ de l'expression (75) et qui, précédée par autant d'autres qu'il en reste après elle, peut être appelée la *couche moyenne*.

468*. — Sur l'intégration des mêmes équations indéfinies dans d'autres cas, et notamment dans celui où le temps t est variable principale : application au problème du refroidissement des milieux.

La solution élémentaire (74) exprime les températures φ d'un milieu illimité à m dimensions dont un point reçoit, à l'instant $t = 0$, une petite quantité donnée dq de chaleur qui, pour *t infiniment petit positif*, est déjà *hors de ce point*, quoiqu'elle soit, encore, *presque* entièrement concentrée *dans un seul élément $d\varpi$ d'espace*. La superposition d'une infinité de solutions analogues *successives*, pour des quantités dq sans cesse renouvelées au même point et sans cesse dissipées tout autour, devait donc bien nous fournir la solution, (73) ou (70), relative au cas d'une source continue de chaleur qui s'y trouverait fixée. Or il n'est pas moins naturel que la superposition d'une infinité de pareilles solutions (74), non plus successives, mais simultanées ou plutôt *contemporaines*, spécifiées pour des quantités dq de chaleur introduites, de même, à une époque commune infiniment voisine de $t = 0$, dans une infinité d'éléments d'espace $d\varpi$ voisins, donne pareillement la suite des températures φ produites dans tout le milieu par la diffusion d'une quantité arbitraire $\int dq$ de chaleur, supposée avoir été *tout entière*, dès le début $t = 0$ du phénomène, répartie à volonté d'une manière connue entre les divers éléments d'une région $\int d\varpi$ quelconque. Et ce serait enfin, d'une manière analogue, par la superposition de solutions du type (74), successives comme dans le premier cas, mais se rapportant, comme dans le second, à des centres d'émanation multiples, rangés en une file continue le long d'une trajectoire donnée, que l'on exprimerait les températures dans un milieu indéfini sillonné par une source de chaleur mobile suivant cette trajectoire.

Bornons-nous au cas où l'on superpose une infinité de solutions contemporaines. Alors, en appelant, d'une part, $\xi, \eta, \ldots$ les coordonnées de l'élément d'espace $d\varpi = d\xi\, d\eta \ldots$ dans lequel une quan-

tité dq de chaleur aura été *presque* entièrement concentrée à une époque *infiniment voisine de* $t=0$; d'autre part, $F(\xi, \eta, \ldots)$, la fonction des coordonnées, arbitraire, mais supposée continue, qui exprime cette quantité de chaleur par unité de volume, c'est-à-dire le rapport $\frac{dq}{d\varpi}$, enfin, $\int_\varpi$ une intégrale étendue à toute la région donnée d'émanation, l'on aura, d'après la seconde (74),

$$(76)\qquad (\text{pour } t>0)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m}\int e^{-\frac{r^2}{4t}}\,dq \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^m}\int_\varpi F(\xi, \eta, \ldots)\,e^{-\frac{r^2}{4t}}\,d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Le dernier membre est évidemment une certaine intégrale définie; et si, lorsque t y tend vers zéro, la concentration des quantités dq dans les éléments $d\varpi$ correspondants d'espace se fait avec une rapidité suffisante, cette intégrale définie doit donner à la limite $t=0$, pour toute étendue très petite ϖ_1 entourant un point $(x, y, \ldots)$ quelconque,

$$\int_{\varpi_1} \varphi\, d\varpi_1 = \int_{\varpi_1} \frac{dq}{d\varpi_1}\, d\varpi_1 = F(x, y, \ldots)\,\varpi_1.$$

D'où il suit que la moyenne des valeurs *initiales* de φ autour de $(x, y, \ldots)$, dans le très petit rayon de l'espace ϖ_1, sera

$$\frac{1}{\varpi_1}\int_{\varpi_1} \varphi\, d\varpi_1,$$

c'est-à-dire, précisément, $F(x, y, \ldots)$. Et il suffira, dans ces conditions, que, à la limite $t=0$, le troisième membre de (76) reste une fonction continue de x, y, ..., pour que l'expression (76) de φ joigne à la propriété de vérifier l'équation indéfinie des températures $\frac{d\varphi}{dt}=\Delta_2\varphi$ celle de se réduire initialement à la fonction arbitraire $F(x, y, \ldots)$ des coordonnées. L'expression (76) de φ constituera ainsi l'intégrale de l'équation $\frac{d\varphi}{dt}=\Delta_2\varphi$ pour le cas où il y a une variable principale et où cette variable est le temps t; de sorte que l'on puisse se donner arbitrairement φ en tous les points de l'espace quand t reçoit sa valeur initiale choisie zéro.

Il y a donc lieu de voir si, en effet, à la limite $t=0$, le troisième membre de (76) reste continu et se réduit à $F(x, y, \ldots)$. Pour le

reconnaître, remplaçons-y $d\varpi$ par le produit $d\xi\, d\eta \ldots$, r^2 par

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \ldots;$$

et, d'ailleurs, simplifions l'expression des limites d'intégration en étendant l'intégrale $\int_\varpi$ à tout l'espace, ce que permettra la présence du facteur $F(\xi, \eta, \ldots)$ nul hors de la région d'émanation. Il viendra aisément

(77) $$(\text{pour } t > 0) \quad \varphi = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\eta - y)^2}{4t}} \frac{d\eta}{2\sqrt{t}} \ldots F(\xi, \eta, \ldots).$$

Enfin, changeant les variables d'intégration, de manière à simplifier les exponentielles et surtout à faire disparaître les dénominateurs $2\sqrt{t}$ évanouissants avec t, posons

$$\xi = x + 2\alpha\sqrt{t}, \qquad \eta = y + 2\beta\sqrt{t}, \qquad \ldots;$$

d'où

$$d(\xi, \eta, \ldots) = 2\sqrt{t}\, d(\alpha, \beta, \ldots).$$

Nous aurons

(78) $$(\text{pour } t > 0) \quad \varphi = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \ldots F(x + 2\alpha\sqrt{t}, y + 2\beta\sqrt{t}, \ldots).$$

Sous cette forme, découverte par Laplace et utilisée par Fourier, l'expression considérée de φ reste visiblement finie et continue même à la limite $t = 0$; et comme, à cette limite, le facteur F, sous les signes $\int$, se réduit à $F(x, y, \ldots)$, sauf dans les éléments (pour α, ou β, ... infinis) qu'annihilent les exponentielles alors évanouissantes multipliant aussi $d\alpha$, ou $d\beta$, ..., il vient bien

$$(\text{pour } t = 0) \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{(\sqrt{\pi})^m} F(x, y, \ldots) \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \ldots \\ \quad = F(x, y, \ldots) \left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \right)^m = F(x, y, \ldots). \end{cases}$$

L'équation de la chaleur $\frac{d\varphi}{dt} = \Delta_2 \varphi$ est seulement du premier ordre par rapport à t. Donc son intégrale, quand t a le rôle de variable principale, ne doit contenir qu'une seule fonction arbitraire, permettant de se donner à volonté φ, en x, y, ..., pour la valeur initiale de t; et les expressions (78) ou (76) de φ constituent précisément cette intégrale générale.

Une aussi grande fécondité de la solution élémentaire (74), pour les problèmes concernant la propagation de la chaleur, porte naturellement à demander des services analogues, dans le cas de l'équation générale (41) [p. 453*], à la première solution (42), dont (74) a été déduite par la réduction du double signe $\pm$ à $-$ devant $\frac{\alpha^p}{2}$ et par l'hypothèse que la fonction arbitraire f s'annule dès que sa variable diffère sensiblement de zéro. Or, introduisons la même restriction et la même hypothèse dans cette première formule (42), en adoptant encore comme variable d'intégration τ la variable même $t - \frac{\alpha^p}{2}$ dont dépend f, c'est-à-dire en posant

$$\tau = t - \frac{\alpha^p}{2};$$

d'où

$$\alpha = 2^{\frac{1}{p}}(t-\tau)^{\frac{1}{p}} = 2^{1-\frac{m}{2}}(t-\tau)^{1-\frac{m}{2}}$$

et

$$d\alpha = -2^{1+\frac{m}{2}}\left(1-\frac{m}{2}\right)\frac{d\tau}{(2\sqrt{t-\tau})^m}.$$

Comme l'intégrale définie considérée φ se réduira, par hypothèse, à ses éléments dont le champ $\int d\tau$ sera infiniment voisin de l'origine $\tau = 0$, nous trouverons, à un facteur constant près : 1° $\varphi = 0$ pour les valeurs négatives de t, car τ, variable entre les limites $-\infty$ et t, n'aura pas à y passer par les valeurs très voisines de zéro, les seules qui n'annulent pas la fonction f; et, 2°, pour les valeurs positives de t,

$$\varphi = \frac{\int f(\tau)\,d\tau}{(2\sqrt{t})^m}\,\psi\left(\frac{r^2}{4t}\right),$$

où $\int f(\tau)\,d\tau$ est une intégrale constante, à champ très restreint mais embrassant toutes les valeurs de $f(\tau)$ qui ne sont pas nulles. Désignons par dq cette intégrale, parce que sa valeur, arbitraire d'ailleurs, sera, en général, infiniment petite ; et supposons la fonction ψ, choisie, comme il a été indiqué, de manière à annuler identiquement l'expression (43) [p. 454*], ou à faire vérifier par l'expression obtenue φ l'équation proposée (41). Nous aurons alors la solution cherchée de (41), analogue à (74),

$$(79) \qquad (\text{pour } t > 0) \quad \varphi = \frac{dq}{(2\sqrt{t})^m}\,\psi\left(\frac{r^2}{4t}\right).$$

Elle ne diffère de (74), à un facteur constant près, que par la sub-

stitution de ψ à une exponentielle. Or, comme, dans le problème des températures, (74) a dû son caractère d'élément naturel de la solution générale pour le cas où t est variable principale, à cette circonstance, qu'elle rendait finies les intégrales, alors équivalentes, $\int \varphi\, d\varpi$ ou $\int \varphi\sigma\, dr$ étendues à tout l'espace, c'est-à-dire l'intégrale proportionnelle

$$\int_0^\infty \varphi\, r^{m-1}\, dr,$$

de même, ici, la superposition d'une infinité de solutions élémentaires (79), dans lesquelles les distances r seront comptées à partir de tout autant de centres distincts, aura chance de conduire simplement à l'intégrale générale de (41) quand t sera variable principale, si l'expression (79) de φ rend, de même, finie et déterminée la somme $\int \varphi\, d\varpi$ étendue à tout l'espace, ou, du moins, ne la rend pas infinie.

Cela arrivera surtout si l'intégrale considérée $\int \varphi\, d\varpi$ admet une valeur limite indépendante de la forme de son champ $\int d\varpi$, et peut ainsi s'évaluer par décomposition de l'espace en bandes ou couches concentriques $\sigma\, dr$, donnant $\int \varphi\, d\varpi = \int_0^\infty \varphi\sigma\, dr$. Alors, en appelant K le rapport constant de σ à r^{m-1}, rapport égal à 2, à 2π, ou à 4π, suivant que le nombre m des dimensions de l'espace sera 1, 2 ou 3, l'on aura, vu (79),

$$(79\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \int \varphi\, d\varpi &= (dq)\mathrm{K}\int_{r=0}^{r=\infty} \psi\left(\frac{r^2}{4t}\right)\left(\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)^{m-1} d\left(\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)\\ &= (dq)\mathrm{K}\int_0^\infty \psi(\rho^2)\rho^{m-1}\, d\rho, \end{aligned}\right.$$

en désignant encore par ρ le rapport $\frac{r}{2\sqrt{t}}\cdot$

Dans le cas dont il s'agit, l'expression $\int_0^\infty \psi(\rho^2)\rho^{m-1} d\rho$ sera donc finie et déterminée, comme $\int \varphi\, d\varpi$ qu'elle représentera au facteur près K dq; et chacun de ses éléments exprimera, avec la même restriction, une partie toujours égale de la quantité invariable $\int \varphi\, d\varpi$, mais une partie réalisée à des distances $r = 2\sqrt{t}\rho$, de l'origine, d'autant plus faibles que les temps t seront eux-mêmes plus voisins de zéro. Ainsi l'on pourra dire que, dans chaque solution élémentaire (79), la quantité $\int \varphi\, d\varpi$, égale au dernier membre de (79 *bis*), se trouve, pour t infiniment petit, *concentrée* presque entièrement dans

un seul élément de volume $d\varpi$ entourant l'origine des distances r. Et si, après avoir divisé en éléments $d\varpi$ une région donnée quelconque d'émanation, puis marqué à l'intérieur de chacun d'eux un point $(\xi, \eta, \ldots)$, on veut, par la superposition d'une infinité de solutions contemporaines (79) dont les centres origines des distances r soient en ces points $(\xi, \eta, \ldots)$, former une solution plus générale

$$(80) \qquad (\text{pour } t > 0) \qquad \varphi = \frac{1}{(2\sqrt{t})^m} \int \psi\left(\frac{r^2}{4t}\right) dq$$

où φ reçoive initialement, en $(\xi, \eta, \ldots)$, une valeur arbitraire

$$F(\xi, \eta, \ldots),$$

il sera naturel d'admettre que, pour t évanouissant, les éléments $\varphi\, d\varpi$, ou $F(x, y, \ldots)\, d\varpi$, de la somme $\int \varphi\, d\varpi$ relative à cette solution plus générale, se réduiront, dans chaque petit espace $d\varpi$, à la part, $(dq)K\int_0^\infty \psi(\rho^2)\rho^{m-1}\,d\rho$, à fort peu près fournie par la solution élémentaire ayant son centre dans cet élément. On se trouvera donc conduit à poser, pour l'endroit quelconque $d\varpi$, à coordonnées $\xi, \eta, \ldots$, de la région d'émanation,

$$F(\xi, \eta, \ldots)\, d\varpi = (dq)K\int_0^\infty \psi(\rho^2)\rho^{m-1}\,d\rho,$$

ou à prendre $dq = \dfrac{F(\xi, \eta, \ldots)\, d\varpi}{K\int_0^\infty \psi(\rho^2)\rho^{m-1}\,d\rho}$ et, par suite, comme solution plus générale cherchée,

$$(81) \qquad (\text{pour } t > 0) \quad \varphi = \frac{1}{K\int_0^\infty \psi(\rho^2)\rho^{m-1}\,d\rho}\, \frac{1}{(2\sqrt{t})^m} \int F(\xi, \eta, \ldots)\psi\left(\frac{r^2}{4t}\right) d\varpi$$

Il reste à vérifier si cette intégrale sera une fonction de $x, y, \ldots, t$ continue même à la limite $t = 0$, et si elle se réduira bien alors à $F(x, y, \ldots)$. Dans ce but, posons, comme tout à l'heure quand nous avons transformé (76) ou (77) en (78),

$$\xi = x + 2\alpha\sqrt{t}, \qquad \eta = y + 2\beta\sqrt{t}, \quad \ldots, \quad d(\xi, \eta, \ldots) = 2\sqrt{t}\, d(\alpha, \beta, \ldots),$$

et, aussi, en appelant ρ la distance, à l'origine, d'un élément

$$d\varpi' = d\alpha\, d\beta \ldots$$

d'espace dont les coordonnées seraient α, β, ...,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{r^2}{4t} = \alpha^2 + \beta^2 + \ldots = \rho^2,\\ &d\varpi = d\xi\, d\eta \ldots = (2\sqrt{t})^m\, d\alpha\, d\beta \ldots = (2\sqrt{t})^m\, d\varpi'. \end{aligned}\right.$$

Le second membre de (81), où le dénominateur $K\int_0^\infty \psi(\rho^2)\rho^{m-1}d\rho$ n'est autre chose que l'intégrale $\int\psi(\rho^2)\,d\varpi'$ étendue à tout l'espace, deviendra

$$(82)\quad (\text{pour } t > 0)\quad \varphi = \frac{1}{\int\psi(\rho^2)\,d\varpi'}\int F(x + 2\alpha\sqrt{t}, y + 2\beta\sqrt{t}, \ldots)\psi(\rho^2)\,d\varpi'.$$

Or, sous cette forme, généralisée de (78), il est visible que, pour $t = 0$, la valeur de φ reste finie et déterminée si les fonctions F, ψ le sont elles-mêmes, et qu'elle se réduit bien, identiquement, à $F(x, y, \ldots)$.

Enfin, comme l'équation différentielle obtenue en annulant (43) [p. 454*] est du $n^{\text{ième}}$ ordre et donnera n expressions distinctes pour ψ, on conçoit que la superposition des n solutions particulières correspondantes de la forme (82), avec tout autant de fonctions arbitraires F, puisse permettre de choisir à volonté les valeurs initiales (c'est-à-dire relatives à $t = 0$) de la fonction φ et de ses $n - 1$ premières dérivées par rapport au temps t; ce qui suffira pour que la solution à n fonctions arbitraires ainsi formée soit l'intégrale générale de l'équation proposée (41) [p. 453*], de l'ordre $n^{\text{ième}}$ seulement en t.

Le problème du refroidissement d'un milieu indéfini, ou de la dissipation, au sein d'un tel milieu, d'une quantité de chaleur initialement réunie dans certaines de ses régions, nous fournirait l'application la plus facile de ces principes, si nous n'avions préféré le traiter d'abord et arriver par voie de généralisation aux principes dont il s'agit. Il est donc inutile de revenir à cette question.

469*. — Application au problème de la dissémination du mouvement transversal, le long d'une barre indéfinie.

Une deuxième application, presque aussi simple, des mêmes principes, se trouve dans le problème de la dissémination du mouvement transversal le long d'une barre indéfinie suivant les x tant négatifs que positifs, à la suite de certains déplacements initiaux

connus $\varphi = f(x)$ et de certaines vitesses initiales également données $\frac{d\varphi}{dt} = f_1(x)$. Nous supposerons celles-ci nulles en moyenne, ou telles, que $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = 0$: cette restriction, nécessaire pour que les intégrales résultant de la formule (82) soient convergentes, revient à admettre qu'aucun mouvement d'ensemble n'est imprimé à la barre. Nous verrons à la fin du numéro suivant (pp. 494* et 495*) comment on peut l'écarter, en donnant à une partie de la solution une forme qui implique, de plus que (82), une intégration par rapport au temps.

Les deux fonctions $f(x)$, $f_1(x)$, ainsi caractéristiques de l'état initial, seront continues mais d'ailleurs arbitraires, sous les réserves : 1° de devenir la première, constante, et la seconde, nulle, pour $x = \pm\infty$, par suite de la limitation supposée des régions d'ébranlement; 2° de réduire à zéro l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx$, comme il vient d'être dit.

Nous avons vu (p. 458*) que ψ est alors, à volonté, soit la fonction sinus, soit la fonction cosinus; et comme, de plus, m se réduisant à 1, l'on a $K = 2$, $\rho^2 = \alpha^2$ $\left[\text{d'où aussi} \int \psi(\rho^2)\,d\varpi' = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\alpha^2)\,d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right.$ d'après les formules (38) du n° 330* (p. 132*)$\Big]$, la somme des deux solutions de la forme (82) donne, en appelant F_1 la deuxième fonction arbitraire F,

$$(83)\quad \begin{cases} \varphi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(x + 2\alpha\sqrt{t}\right) \sin\alpha^2\,d\alpha \\ \qquad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_1\left(x + 2\alpha\sqrt{t}\right) \cos\alpha^2\,d\alpha. \end{cases}$$

En différentiant par rapport à t cette expression de φ, il vient aisément

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} F'\left(x + 2\alpha\sqrt{t}\right) d\cos\alpha^2 \\ \qquad + \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=\infty} F_1'\left(x + 2\alpha\sqrt{t}\right) d\sin\alpha^2, \end{cases}$$

ou encore, grâce à une intégration par parties qui ne donnera rien aux deux limites si $F'(\pm\infty) = 0$ et $F_1'(\pm\infty) = 0$ comme nous l'ad-

mettrons,

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F''\left(x+2\alpha\sqrt{t}\right)\cos\alpha^2\,d\alpha \\ & -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F''_1\left(x+2\alpha\sqrt{t}\right)\sin\alpha^2\,d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Pour $t=0$ les seconds membres de (83) et (84) sont respectivement $F(x)+F_1(x)$, $F''(x)-F''_1(x)$. On satisfera donc à l'état initial en les égalant, l'un, à $f(x)$, l'autre, à $f_1(x)$; et il viendra, pour déterminer les fonctions arbitraires F, F_1,

$$(85)\qquad F(x)+F_1(x)=f(x),\qquad F''(x)-F''_1(x)=f_1(x).$$

Or la deuxième de ces relations, multipliée par dx, puis intégrée à partir de la valeur $x=-\infty$ qui annule F', F'_1, devient

$$(85\ bis)\qquad F'(x)-F'_1(x)=\int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx\,;$$

et l'on peut observer que celle-ci, combinée avec la première (85) différentiée, savoir, avec $F'(x)+F'_1(x)=f'(x)$, donnerait bien pour $F'(x)$, $F'_1(x)$ des valeurs nulles aux deux limites $x=\pm\infty$ où s'évanouissent, par hypothèse, $f'(x)$, $f_1(x)$ et $\int_{-\infty}^{x} f_1(x)\,dx$. Enfin, une seconde multiplication par dx, suivie d'une nouvelle intégration en x, déduira de (85 *bis*), à une constante arbitraire près $2c$, la différence des deux fonctions $F(x)$, $F_1(x)$, dont la première équation (85) détermine déjà la somme $f(x)$; en sorte que, sauf le terme $+c$ dans $F(x)$, $-c$ dans $F_1(x)$, l'on connaîtra, d'abord, ces deux fonctions, puis l'expression cherchée (83) de φ, d'où s'élimineront les deux termes en c, savoir,

$$c\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\alpha^2\,d\alpha=c,\qquad -c\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\alpha^2\,d\alpha=-c,$$

dès lors sans importance.

On remarquera qu'une nouvelle différentiation par rapport au temps, effectuée sur (84) et suivie d'intégrations par parties comme celles qui ont permis de déduire (84) de (83), donnerait une dérivée deuxième de φ en t identique à ce que devient le second membre de (83) quand on y remplace F par $-F^{\text{IV}}$ et F_1 par $-F_1^{\text{IV}}$, ou égale et contraire à la dérivée quatrième de φ en x, $\Delta_2\Delta_2\varphi$. Ainsi se trouve vérifiée directement par (83) l'équation indéfinie du problème.

470*. — Application à la dissémination du mouvement transversal dans une plaque indéfinie.

La méthode se complique un peu ou, du moins, devient d'un emploi assez délicat, lorsqu'il s'agit, non plus d'une barre, mais d'une plaque indéfinie couvrant tout le plan horizontal des xy, et dont les divers points (ξ, η) compris dans une région *limitée* d'ébranlement ont initialement éprouvé certains déplacements verticaux $f(\xi, \eta)$, graduellement variables partout, en même temps qu'ils ont reçu certaines vitesses verticales non moins continues $f_1(\xi, \eta)$, supposées nulles en moyenne comme dans le cas de la barre.

Alors la fonction ψ est encore (pp. 458* et 459*) un simple sinus ou cosinus. Mais, m valant 2 (d'où $K = 2\pi$), il vient

$$\int \psi(\rho^2)\, d\varpi' = 2\pi \int_0^\infty (\sin\rho^2 \text{ ou } \cos\rho^2)\rho\, d\rho = \begin{cases} \text{soit } \pi(1 - \cos\rho^2) & \text{avec } \rho \text{ infini.} \\ \text{soit } \pi \sin\rho^2 & \text{avec } \rho \text{ infini.} \end{cases}$$

Ici, l'intégrale $\int \psi(\rho^2)\, d\varpi'$ n'est donc plus déterminée, ou n'a pas une valeur limite indépendante de la forme du champ. Toutefois, comme, dans l'hypothèse d'un champ $\int \sigma\, dr$ circulaire, elle oscille indéfiniment soit entre zéro et 2π, soit entre $-\pi$ et π, de manière à *rester finie,* l'on peut espérer que la mise en commun, pour ainsi dire, d'une infinité de solutions élémentaires à centres *différents,* empruntées à chacun des deux types, produira une certaine régularisation, ou une destruction mutuelle d'inégalités, propre à rendre les deux types encore utilisables. De plus, comme le premier, où $\psi(\rho^2) = \sin\rho^2$ et pour lequel $\int \psi(\rho^2) 2\pi\rho\, d\rho$ oscille entre zéro et 2π, c'est-à-dire de part et d'autre de π, semble ainsi devoir donner *en moyenne*

$$\int \psi(\rho^2)\, d\varpi' = \pi,$$

nous pourrons, sauf vérification ultérieure, y attribuer la valeur π au dénominateur du second membre de (82). Quant au second type, où $\psi(\rho^2) = \cos\rho^2$ et où, $\int \psi(\rho^2) 2\pi\rho\, d\rho$ oscillant de $-\pi$ à π, la valeur *moyenne* qui semble devoir être attribuée à $\int \psi(\rho^2)\, d\varpi'$ se réduit à zéro, il paraît, à première vue, pouvoir servir seulement quand l'expression de φ s'annulera à la limite $t = 0$. L'on n'a pas, dès lors, à y chercher pour cette fonction φ des valeurs initiales arbitraires $F(x, y)$; et il est sans inconvénient de lui attribuer, afin de maintenir sa symétrie avec la précédente, le dénominateur π, à la place de $\int \psi(\rho^2)\, d\varpi'$.

Si donc $F(\xi, \eta)$ désigne une fonction arbitraire continue, s'annulant pour ξ ou η infinis, la formule (82) fournira les deux solutions parti-

culières, que nous appellerons respectivement φ et φ_1,

$$(86)\quad (\text{pour } t > 0)\ \begin{cases} \varphi = \frac{1}{\pi} \int F(x + 2\alpha\sqrt{t},\ y + 2\beta\sqrt{t}) \sin\rho^2 \, d\varpi', \\ \varphi_1 = \frac{1}{\pi} \int F(x + 2\alpha\sqrt{t},\ y + 2\beta\sqrt{t}) \cos\rho^2 \, d\varpi', \end{cases}$$

où $d\varpi'$ désigne le produit $d\alpha\, d\beta$, ρ^2 la somme $\alpha^2 + \beta^2$ et où l'annulation de la fonction F pour α, β infinis permet d'étendre les intégrations à tout un plan dont les coordonnées seraient α, β.

Nous avons, en premier lieu, à reconnaître que les deux fonctions φ, φ_1 se réduisent bien, respectivement, pour t infiniment petit, à $\varphi = F(x, y)$ et à $\varphi_1 = 0$.

A cet effet, supposant t extrêmement petit, et x, y quelconques mais *fixes,* imaginons qu'on ajoute d'abord ensemble les éléments dont le champ $d\alpha\, d\beta$ est compris entre deux circonférences de rayons ρ et $\rho + d\rho$ décrites autour du point (x, y), choisi comme origine des coordonnées α, β. Les valeurs de $F(x + 2\alpha\sqrt{t},\ y + 2\beta\sqrt{t})$ qui y figureront seront évidemment celles que reçoit la fonction $F(\xi, \eta)$ en des points (ξ, η) uniformément répartis le long de la circonférence qui a pour centre (x, y) et le rayon $r = (2\sqrt{t})\rho$. Alors, si nous appelons $\mathcal{F}(r)$ ou $\mathcal{F}(2\rho\sqrt{t})$ la moyenne de ces valeurs, fonction *bien continue* de r [1], évidemment égale à $F(x, y)$ pour $r = 0$ et à zéro pour r infini, les éléments des seconds membres de (86) dont le

---

[1] On remarquera que cette continuité de $\mathcal{F}(r)$, sans laquelle, d'après les raisonnements ci-après, φ et φ_1 ne se réduiraient pas initialement à $F(x, y)$ et à zéro, subsiste, en général, même quand la fonction $F(x, y)$ n'est pas continue partout, notamment quand, au sortir de la région d'ébranlement, elle passe brusquement d'une valeur sensible à la valeur zéro. En effet, il suffit alors, pour la graduelle variation de $\mathcal{F}(r)$ avec r, que la partie des circonférences concentriques $2\pi r$ intérieure à cette région décroisse *peu à peu* jusqu'à zéro de l'une à l'autre, au delà du moins d'une certaine valeur de r; ce qui aura lieu, sauf quand la région dont il s'agit sera totalement ou partiellement circulaire, et que, de plus, le point choisi (x, y) coïncidera avec le centre d'une portion circulaire sensible de son bord.

Mais pour les points (x, y) du contour sur lequel $F(x, y)$ s'annule ainsi brusquement, ou de toute autre ligne de discontinuité, la fonction $\mathcal{F}(r)$ ne se réduit plus, quand r est infiniment petit, à $F(x, y)$; car il est clair que les valeurs de F spéciales aux deux régions contiguës que sépare la ligne de discontinuité entrent alors pour part égale dans la formation de cette moyenne : $\mathcal{F}(r)$ y devient donc la demi-somme des deux valeurs de $F(x, y)$ de part et d'autre de la ligne de discontinuité.

champ total est une zone infiniment étroite $2\pi\rho\, d\rho$, ou $\pi\, d(\rho^2)$, auront pour sommes respectives

$$\mathcal{F}(2\rho\sqrt{t})\sin\rho^2\, d(\rho^2) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}(2\rho\sqrt{t})\cos\rho^2\, d(\rho^2).$$

Donc, en posant $\rho^2 = \lambda$, puis faisant grandir λ de zéro à l'infini, ou du moins jusqu'à une valeur au-dessus de laquelle la fonction

$$\mathcal{F}(r) = \mathcal{F}(2\sqrt{t\lambda})$$

soit identiquement nulle, il viendra

$$(86\ bis)\quad \varphi = \int_0^\infty \mathcal{F}(2\sqrt{t\lambda})\sin\lambda\, d\lambda, \qquad \varphi_1 = \int_0^\infty \mathcal{F}(2\sqrt{t\lambda})\cos\lambda\, d\lambda.$$

Faisons successivement croître λ, dans la première intégrale, de zéro à π, de π à 2π, de 2π à 3π, ..., et, dans la seconde, de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$, de $\frac{3\pi}{2}$ à $\frac{5\pi}{2}$, ..., en y négligeant provisoirement un premier intervalle, moitié moindre, compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$. Comme le facteur $\mathcal{F}(2\sqrt{t\lambda})$ variera, d'un intervalle à l'autre, avec une lenteur infinie si t est infiniment petit, et que l'autre facteur $\sin\lambda$ ou $\cos\lambda$ prendra dans tous les mêmes suites de valeurs absolues, mais avec signes contraires dans deux consécutifs, les intégrales partielles successives ainsi obtenues seront en général finies et à signes alternés, mais de valeurs absolues infiniment peu variables d'un intervalle à l'autre. Par suite, chacune des deux intégrales (86 *bis*) constituera, si l'on fait, dans la seconde, abstraction d'une première partie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}(0)\cos\lambda\, d\lambda = \mathcal{F}(0) = \mathrm{F}(x,y),$$

une série à termes successifs de signes généralement contraires, mais presque de même grandeur absolue. D'ailleurs, le dernier de tous ces termes sera nul, et le premier vaudra, respectivement,

$$\int_0^{\pi} \mathcal{F}(0)\sin\lambda\, d\lambda = 2\mathcal{F}(0) = 2\mathrm{F}(x,y)$$

et

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathcal{F}(0)\cos\lambda\, d\lambda = -2\mathcal{F}(0) = -2\mathrm{F}(x,y).$$

Or il est facile de montrer que, dans ces conditions, chaque série se réduit à la moitié de son premier terme.

En effet, l'une quelconque des deux séries se compose généralement, si l'on y considère les termes dans l'ordre même où ils se suivent, d'un nombre fini de séries partielles, dont chacune, comprenant toujours, pour fixer les idées, un nombre pair de termes, aura ses termes de rang impair (le premier, le troisième, etc.) soit constamment décroissants de l'un à l'autre, pour la grandeur et le signe ou entre $+\infty$ et $-\infty$, soit constamment croissants, et, dans les deux cas, en nombre infini à la limite; vu que la différence des valeurs absolues de deux termes consécutifs de chaque série partielle ne doit, en général, varier d'un intervalle à l'autre que d'une fraction infiniment petite de sa propre valeur, par raison de continuité.

Cela posé, appelons la somme de l'une des séries partielles, S et, ses divers termes,

$$a,\quad -b,\quad c,\quad -d,\quad e,\quad -f,\quad \ldots,\quad g,\quad -h,\quad i,\quad -j,$$

après avoir toutefois détaché de la tête et de la queue de la série, quand la valeur absolue des termes y devient maximum ou minimum et que, par suite, la différence de deux d'entre eux consécutifs y tend vers zéro, assez de paires de termes (en nombre aussi grand qu'on voudra, mais fixe ou indépendant de t), pour ne laisser subsister que ceux dont les valeurs absolues ont déjà, de l'un à l'autre, une différence ne changeant successivement que très peu *par rapport à elle-même*. Alors les différences consécutives de ces valeurs *absolues*, entre a et i, seront (au facteur commun près ± 1)

$$a-b,\quad b-c,\quad c-d,\quad d-e,\quad \ldots,\quad h-i.$$

Elles se trouveront d'ailleurs, par hypothèse, soit toutes positives, soit toutes négatives. Donc, en raisonnant comme à la page 12 du tome I, on déduira, des rapports $\frac{a-b}{b-c}$, $\frac{c-d}{d-e}$, $\ldots$, $\frac{g-h}{h-i}$, presque identiques à l'unité, le nouveau rapport

$$\frac{a-b+c-d+\ldots+g-h}{b-c+d-e+\ldots+h-i},$$

infiniment peu différent, lui aussi, de 1. Enfin, comme le numérateur et le dénominateur de ce rapport sont identiquement $S-i+j$ et $a-S-j$, il viendra $S-i+j=a-S-j$, c'est-à-dire

$$S=\frac{1}{2}(a+i-2j)$$

ou, à très peu près, $S = \frac{1}{2}(a - j)$. Ainsi, *la série se réduit à la demi-somme algébrique de ses deux termes extrêmes.* Et l'on peut observer qu'il en est encore de même : 1° quand elle a un nombre impair de termes, cas où, si i désigne son dernier terme, le rapport précédent, sensiblement égal à 1, s'écrit $\frac{S - i}{a - S}$ et donne $S = \frac{1}{2}(a + i)$; 2° quand on restitue à la série les termes allant par couples, en nombre relativement insignifiant, qu'on avait supprimés à la tête et à la queue, termes, à somme algébrique négligeable, sensiblement identiques pour la valeur absolue, le premier, à a et, le dernier, à $-j$ ou à i.

Appliquons maintenant cette règle simple à la sommation de toutes les séries partielles dont se compose une même des deux séries considérées, et observons que, pour t infiniment petit, le dernier terme d'une série partielle égale le premier de la série suivante changé de signe. Il ne restera évidemment dans chaque somme définitive que la moitié, $F(x, y)$ ou $-F(x, y)$, du terme évalué ci-dessus dont le champ s'étend soit de $\lambda = 0$ à $\lambda = \pi$, soit de $\lambda = \frac{\pi}{2}$ à $\lambda = \frac{3\pi}{2}$, plus la moitié, ici nulle, d'un dernier terme correspondant à λ très grand ou infini. Et si, d'ailleurs, à la seconde série qui doit donner la valeur initiale de φ_1, l'on ajoute la partie $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{F}(0) \cos\lambda \, d\lambda$, égale à $F(x, y)$, on aura bien

$$(86\ ter) \qquad (\text{pour } t = 0) \qquad \varphi = F(x, y), \qquad \varphi_1 = 0.$$

Ainsi, les deux solutions particulières (86) conviendront, l'une, φ, quand il y aura des déplacements initiaux $f(\xi, \eta)$, l'autre, φ_1, quand il n'y en aura pas et que le mouvement sera dû exclusivement à des vitesses initiales $f_1(\xi, \eta)$ imprimées aux divers points (ξ, η) de la région d'ébranlement. Nous achèverons de préciser les conditions de leur emploi en cherchant, pour chacune, l'expression de la vitesse $\frac{d\varphi}{dt}$ ou $\frac{d\varphi_1}{dt}$.

Ces dérivées en t des seconds membres de (86) peuvent s'obtenir en procédant comme on l'a fait au n° précédent pour déduire (84) de (83), c'est-à-dire au moyen de différentiations sous les signes $\int\int$, suivies d'intégrations par parties en vue desquelles on observerait, par exemple, que $\alpha \cos\rho^2$ et $\beta \cos\rho^2$ sont les demi-dérivées de $\sin\rho^2$ en α et β. Mais il est beaucoup plus simple de prendre φ et φ_1 sous leur forme primitive, en les réduisant même à un seul élément (79)

[p. 481*]; ce qui, sans avoir seulement besoin de spécifier le nombre m des coordonnées figurant dans l'équation indéfinie $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\Delta_2\Delta_2\varphi$, donne, à un facteur constant près,

$$t^{-\frac{m}{2}}\sin\frac{r^2}{4t} \text{ pour } \varphi \quad \text{et} \quad t^{-\frac{m}{2}}\cos\frac{r^2}{4t} \text{ pour } \varphi_1.$$

La dérivée en t de ces expressions est

$$t^{-\frac{m}{2}}\left(-\frac{r^2}{4t^2}\cos\frac{r^2}{4t} - \frac{m}{2t}\sin\frac{r^2}{4t}\right) \quad \text{et} \quad t^{-\frac{m}{2}}\left(\frac{r^2}{4t^2}\sin\frac{r^2}{4t} - \frac{m}{2t}\cos\frac{r^2}{4t}\right),$$

quantités dont on reconnaît aisément l'identité à

$$\Delta_2\left(t^{-\frac{m}{2}}\cos\frac{r^2}{4t}\right) \quad \text{et à} \quad -\Delta_2\left(t^{-\frac{m}{2}}\sin\frac{r^2}{4t}\right),$$

c'est-à-dire, à

$$t^{-\frac{m}{2}}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{m-1}{r}\frac{d}{dr}\right)\cos\frac{r^2}{4t} \quad \text{et à} \quad -t^{-\frac{m}{2}}\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{m-1}{r}\frac{d}{dr}\right)\sin\frac{r^2}{4t}.$$

On aura donc, en général, pour des expressions analogues à φ et à φ_1, ou des deux formes respectives $\int\frac{dq}{(2\sqrt{t})^m}\left(\sin\frac{r^2}{4t}, \cos\frac{r^2}{4t}\right)$,

$$(87) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int\frac{dq}{(2\sqrt{t})^m}\sin\frac{r^2}{4t} = \Delta_2\displaystyle\int\frac{dq}{(2\sqrt{t})^m}\cos\frac{r^2}{4t}, \\ \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int\frac{dq}{(2\sqrt{t})^m}\cos\frac{r^2}{4t} = -\Delta_2\displaystyle\int\frac{dq}{(2\sqrt{t})^m}\sin\frac{r^2}{4t}; \end{cases}$$

relations qui, pour le dire en passant, montrent l'équivalence, sur ces sortes de fonctions, de deux différentiations successives en t, avec l'opération indiquée par le symbole $-\Delta_2\Delta_2$, conformément à l'équation aux dérivées partielles posée $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\Delta_2\Delta_2\varphi$. Et, quand on se borne au cas d'une coordonnée x, l'on reconnaît bien, en effet, dans chaque terme du second membre de la formule (84) ci-dessus [p. 486*], la dérivée $\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2}$, changée ou non de signe, du terme correspondant de (83) où l'on aurait substitué $\sin\alpha^2$ à $\cos\alpha^2$ ou *vice versa*.

Ainsi, les dérivées en t des seconds membres de (86) [p. 488*] seront

$$(87 \ bis) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \Delta_2\varphi_1, \qquad \frac{d\varphi_1}{dt} = -\Delta_2\varphi;$$

et, à la limite $t=0$ où φ_1 s'annule, tandis que φ y vaut $F(x, y)$, il viendra

$$(87\ ter)\quad (\text{pour } t=0)\quad \frac{d\varphi}{dt}=0,\quad \frac{d\varphi_1}{dt}=-\Delta_2 F(x,y)=-(F''_x+F''_y).$$

On voit que la fonction φ, en y prenant $F(\xi, \eta)=f(\xi, \eta)$, exprime la solution cherchée, dans le cas particulier de déplacements initiaux bien continus $f(\xi, \eta)$ communiqués aux divers points d'une région restreinte σ d'ébranlement, sans adjonction de vitesses initiales; et que la fonction φ_1 constituera de même la solution dans le cas contraire de déplacements initiaux nuls et de vitesses initiales $f_1(\xi, \eta)$ données pour une telle région σ, si l'on y détermine $F(x,y)$ par la condition $\Delta_2 F(x, y)=-f_1(x, y)$.

Or, pour vérifier celle-ci, il suffira, d'après la propriété caractéristique des *premiers* potentiels *cylindriques* ou logarithmiques à *deux* variables (p. 220*), d'égaler $F(x, y)$ au potentiel

$$(88)\quad F(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,f_1(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$$

d'une couche fictive $\int dm$ de matière étalée sur le plan des xy, et dont la densité superficielle, exprimée par $-\frac{1}{2\pi}f_1(\xi, \eta)$ en chaque point (ξ, η) de la région σ d'ébranlement, serait nulle partout ailleurs. Cette valeur de $F(x, y)$ tendra bien vers zéro pour x ou y infinis, comme on a dû l'admettre afin de vérifier la condition $\varphi_1=0$ à la limite $t=0$; car, l'annulation de l'intégrale $\int\!\int f_1(\xi, \eta)\,d\sigma$ donnant $\int dm=0$, le terme principal du potentiel cylindrique aux grandes distances ι de l'origine, savoir $(\int dm)\log\iota=(\int dm)\log\sqrt{x^2+y^2}$, disparaîtra ici, pour y donner

$$\left\{\begin{aligned} F(x,y)&=\int\left[\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}-\log\sqrt{x^2+y^2}\right]dm\\ &=\int\log\left[1-\frac{2x\xi+2y\eta-\xi^2-\eta^2}{\iota^2}\right]^{\frac{1}{2}}dm,\end{aligned}\right.$$

quantité tout au plus de l'ordre de $\frac{1}{\iota}$.

Ainsi, la solution partielle φ_1, formée au moyen de la fonction F définie par (88), ne sera pas moins satisfaisante que la solution partielle φ obtenue en posant $F=f$; et leur superposition donnera évidemment celle qui convient quand les ébranlements initiaux sont quelconques, sous la condition admise, toutefois, qu'aucune vitesse d'ensemble ne soit imprimée à la plaque.

Le problème abordé était, on le voit, plus difficile dans le cas du

mouvement produit par des impulsions, c'est-à-dire par des vitesses initiales, que dans le cas de mouvements consécutifs à de simples déplacements initiaux. Tandis que les intégrales définies de la XXXIIIe Leçon suffisaient pour résoudre celui-ci, l'autre a demandé, en outre, la mise en œuvre d'un potentiel logarithmique. Nous sommes donc conduits à des questions où il y a lieu d'employer simultanément des potentiels et des intégrales de la XXXIIIe Leçon. Les plus intéressantes de ces questions feront l'objet de la Leçon suivante.

Terminons celle-ci en observant qu'on pourrait, au prix d'une intégration, par rapport au temps, entre les limites zéro et t dont la seconde est *variable*, éliminer le potentiel logarithmique (88), c'est-à-dire éviter les deux intégrations qu'il implique, dans l'espace, entre des limites *fixes*. En effet, la dérivée $\frac{d\varphi_1}{dt}$, égale à $-\Delta_2\varphi$ d'après (87 *bis*) ou, identiquement, vu la première (86) [p. 488*], à

$$-\frac{1}{\pi}\int \Delta_2 F(x+2\alpha\sqrt{t},\ y+2\beta\sqrt{t}) \sin\rho^2\, d\varpi',$$

ne contient pas le potentiel (88), car la fonction $\Delta_2 F$ n'y est autre que $-f_1$. Donc la dérivée $\frac{d\varphi_1}{dt}$ se trouve immédiatement donnée par la formule

$$(88\ bis)\qquad \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{1}{\pi}\int f_1(x+2\alpha\sqrt{t},\ y+2\beta\sqrt{t}) \sin\rho^2\, d\varpi';$$

et une intégration par rapport à t, effectuée, après avoir multiplié par dt, à partir de la limite $t=0$ où φ_1 s'annule, en déduit

$$(88\ ter)\qquad \varphi_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^t dt \int f_1(x+2\alpha\sqrt{t},\ y+2\beta\sqrt{t}) \sin\rho^2\, d\varpi'.$$

C'est sous cette forme, facile à déduire directement de celle de φ (1),

---

(1) En effet, si l'on admet qu'on ait remplacé, dans φ, $F(\xi,\eta)$ par $f_1(\xi,\eta)$, cette expression (88 *ter*) de φ_1 ne sera autre que $\varphi_1 = \int_0^t \varphi\, dt$. Or, d'une part, comme la dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$ s'annule pour $t=0$, une telle valeur de φ_1 donne identiquement

$$\left\{\begin{aligned} \Delta_2\Delta_2\varphi_1 &= \int_0^t (\Delta_2\Delta_2\varphi)\, dt = -\int_0^t \frac{d^2\varphi}{dt^2}\, dt \\ &= -\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0}^{t=t} = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t \varphi\, dt = -\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

que Poisson a obtenu l'intégrale particulière appelée ici φ_1, en même temps que l'autre, plus simple, φ [1].

Il est à remarquer que, débarrassée ainsi de tout potentiel, mais compliquée d'une intégration en t, elle reste utilisable quand la fonction $f_1(\xi, \eta)$ cesse d'annuler l'intégrale $\int\int f_1(\xi, \eta)\, d\sigma$, pourvu qu'elle continue toujours à s'annuler elle-même aux distances infinies $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ de l'origine. On formerait aisément une intégrale analogue en x et t, pour le cas d'une barre qui aurait initialement reçu des vitesses transversales ne s'annulant pas en moyenne et tendant même, aux très grandes distances de l'origine, vers une valeur constante autre que zéro.

---

ce qui revient à dire qu'elle vérifie l'équation indéfinie $\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \Delta_2\Delta_2\varphi_1 = 0$; d'autre part, elle s'annule bien pour $t = 0$ et a sa dérivée $\frac{d\varphi_1}{dt}$, c'est-à-dire φ, égale à $F(x, y)$ ou à $f_1(x, y)$ pour $t = 0$.

(1) Par des méthodes basées principalement sur l'application de transformations imaginaires à l'intégrale générale (78) de l'équation des températures $\frac{d\varphi}{dt} = \Delta_2\varphi$ (*Mémoires de l'Académie des Sciences,* t. III, p. 154 ; 1820), Fourier avait trouvé de son côté la solution φ en se servant de sa célèbre formule, comme on verra à la fin de la XLIXe Leçon ; et il en avait déduit l'autre, φ_1, telle aussi que la donne (88 *ter*).

QUARANTE-HUITIÈME LEÇON.

SUITE DES PROCÉDÉS D'INTÉGRATION, POUR LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS D'ÉTENDUE INFINIE : ÉQUATIONS QUI S'INTÈGRENT PAR L'EMPLOI SIMULTANÉ DES POTENTIELS ET DES INTÉGRALES DÉFINIES DE LA XXXIII[e] LEÇON.

471*. — **Intégrations effectuables par l'emploi simultané des potentiels et des intégrales définies de la XXXIII[e] Leçon. — Équations du principal problème où elles se présentent, et qui est celui des ondes produites, à la surface d'un liquide pesant, par l'émersion d'un solide ou par une impulsion superficielle.**

Il nous reste encore à intégrer les équations des ondes produites à la surface d'un liquide pesant par l'émersion d'un solide ou par une impulsion comme celle d'un coup de vent. Ce sont les deux relations indéfinies (40), réductibles, comme on a vu (p. 453*), à

$$(89) \qquad \frac{d^4\varphi}{dt^4} + \Delta_2\varphi = 0, \qquad \frac{d^2\varphi}{dz^2} + \Delta_2\varphi = 0,$$

où paraît, pour définir le mouvement, une fonction φ de t, x et z, ou de t, x, y, z, finie et continue dans tout l'espace occupé par le fluide, savoir, du côté des z positifs, c'est-à-dire au-dessous de la surface libre de repos du liquide choisie comme plan des xy, et où, de plus, $\Delta_2\varphi$ désigne le paramètre différentiel du second ordre de φ pris seulement par rapport aux coordonnées x, y, c'est-à-dire dans le plan horizontal de chaque point (x, y, z). La fonction φ se trouve, en outre, astreinte à s'annuler asymptotiquement quand l'une quelconque de ses variables x, z et t, ou x, y, z, t, croît sans limite en valeur absolue. Enfin, elle vérifie les conditions initiales suivantes

$$(90) \quad \begin{cases} (\text{pour } t = 0 \text{ et quel que soit } z) \quad \varphi = 0, \quad \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = 0\,; \\ (\text{pour } t = 0 \text{ et } z = 0) \quad \dfrac{d\varphi}{dt} = \text{une fonction donnée } F(x) \text{ ou } F(x,y), \end{cases}$$

la fonction F, nulle pour les valeurs infinies soit de x, soit des deux coordonnées horizontales x, y, mais d'ailleurs arbitraire, exprimant : 1° dans le cas des ondes par émersion, l'ordonnée initiale z de la surface libre, ordonnée égale à zéro aux endroits que n'occupait pas le solide primitivement immergé, mais égale à la profondeur connue d'immersion de celui-ci aux parties de la surface qu'il occupait, et, 2° dans le cas des ondes par impulsion, l'*impulsion totale* (à un facteur constant près) exercée, à l'époque $t = 0$, sur l'unité d'aire de la surface libre en chaque point (x, y) de celle-ci.

Quant aux circonstances du mouvement, la fonction φ les représente au moyen de ses dérivées partielles premières $\frac{d\varphi}{d(x, y, z, t)}$ dans le cas des ondes par émersion, et au moyen des dérivées analogues $\frac{d}{d(x, y, z, t)} \frac{d\varphi}{dt}$ de sa dérivée première en t dans le cas des ondes par impulsion. En effet, ces dérivées respectives en x, y, z, t de φ ou de $\frac{d\varphi}{dt}$ expriment, savoir, les trois premières, les vitesses actuelles, suivant les x, y, z, de chaque molécule, supposée désignée ou définie par les coordonnées x, y, z de sa situation finale de repos, et, la quatrième, $\frac{d\varphi}{dt}$ ou $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, sa *dénivellation* actuelle, c'est-à-dire son abaissement, à l'époque t, au-dessous de cette situation finale. L'équation de la surface libre, qu'il suffira d'obtenir et de discuter pour connaître à chaque instant les ondes produites, se formera, sauf erreur négligeable, en calculant la dénivellation pour les molécules superficielles $(x, y, 0)$, et en la regardant comme identique à la petite ordonnée z de la surface sur la verticale même du point $(x, y, 0)$. Si donc l'on appelle h la valeur de $\frac{d\varphi}{dt}$ pour $z = 0$, ou si l'on définit cette fonction de x, y, t, dès lors la plus importante à déterminer dans le problème, en posant

$$h = \frac{d\varphi}{dt} \quad (\text{pour } z = 0), \tag{91}$$

l'équation de la surface libre sera $z = h$, lorsqu'il s'agira d'ondes par émersion, et $z = \frac{dh}{dt}$, quand il s'agira d'ondes par impulsion.

Les relations (89) et (90), avec les conditions que φ s'annule soit pour x, z ou t infinis, soit pour x, y, z ou t infinis, constituent un système plus difficile à intégrer que tous ceux dont nous nous étions occupés. Aussi devrons-nous y employer à la fois les deux sortes

d'intégrales définies qui, jusqu'ici, sauf dans une partie de la dernière question traitée (p. 493*), nous avaient suffi séparément ; et, dans le cas général où φ dépendra des deux coordonnées horizontales x, y, nous aurons même à y mettre en œuvre deux potentiels, sans compter deux intégrales de la forme (42) [p. 454*]. Au contraire, un de ces potentiels, le plus compliqué, devient inutile quand φ est fonction d'une seule des deux coordonnées horizontales, de x par exemple, circonstance se produisant pour les ondes cylindriques où tout est pareil aux divers points d'une parallèle quelconque à l'axe des y (comme il arrive fréquemment à l'intérieur des canaux de largeur constante dont les bords sont normaux à cet axe). Commençons donc par traiter ce cas moins épineux, où φ dépend seulement de x, z et t.

472*. — **Premier cas, n'exigeant pas de potentiel sphérique: ondes produites dans un canal étroit ou propagées suivant un seul sens horizontal.**

La première équation indéfinie (89), alors réduite à $\frac{d^4\varphi}{dt^4}+\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0$, et les deux premières conditions initiales (90), savoir $\varphi=0$ et $\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0$ (pour $t=0$), régissent les valeurs de φ relatives au niveau z, ou à un plan horizontal quelconque, indépendamment des valeurs analogues aux niveaux voisins ; car aucune dérivée de φ en z n'y paraît. Il y a donc lieu de former, pour ces relations prises à part, une intégrale aussi simple que possible, où z figure uniquement sous un signe de fonction arbitraire, en qualité de paramètre destiné à ne varier que lorsqu'on s'occupera des autres équations du problème. Or telle est précisément l'intégrale (54) [p. 460*] de l'équation indéfinie (53), quand on y permute x et t, ou que, changeant (53) en $\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^4\varphi}{dt^4}=0$, et faisant d'ailleurs figurer explicitement z, comme il vient d'être dit, dans la fonction arbitraire f, l'on pose

$$(92)\qquad \varphi=\int_0^{\infty}\left[f\left(x+\frac{\alpha^2}{2},\ z\right)+f\left(x-\frac{\alpha^2}{2},\ z\right)\right]\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha.$$

En effet, comme la fonction ψ [évaluable par les relations (56), (57), (66) des pp. 267* et 269*] a été choisie de manière que $\psi(0)=0$ et $\psi'(0)=0$, l'expression (92) de φ, différentiée deux fois en t par la règle du n° 346* (p. 179*), rendra bien φ et sa dérivée seconde relative à t nulles pour $t=0$. Mais, d'après une remarque terminant le n° 463* (p. 460*), cette expression (92) de φ ne vérifiera effectivement

l'équation indéfinie $\frac{d^4\varphi}{dt^4}+\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0$ que si l'on a $f'(-\infty,z)=f'(\infty,z)$, relation où $f'(x,z)$ désigne la dérivée de $f(x,z)$ par rapport à x. Or, c'est bien ce qui aura lieu en prenant $f(\pm\infty,z)=0$, comme il faudra le faire pour que, dans (92), la fonction sous le signe $\int$ puisse, quand x sera infini, s'annuler d'une manière continue et donner $\varphi=0$.

Déterminons maintenant la fonction f, au moyen de cette condition spéciale $f(\pm\infty,z)=0$, de la relation non moins évidente

$$f\left(x\pm\frac{\alpha^2}{2},\infty\right)=0,$$

sans laquelle φ ne s'annulerait pas pour $z=\infty$, de la dernière condition (90), $\frac{d\varphi}{dt}=F(x)$ pour t et z nuls, enfin, surtout, de la seconde équation indéfinie (89), devenue $\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0$. Or celle-ci sera satisfaite de la manière la plus simple, savoir, par chaque élément $f\left(x\pm\frac{\alpha^2}{2},z\right)\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$ de φ, en prenant la fonction f telle, que la somme algébrique de ses deux dérivées secondes directes, par rapport à ses deux variables $x\pm\frac{\alpha^2}{2}$ et z, soit identiquement nulle. Cela reviendra, si l'on considère la fonction de point $f(x,z)$ dans toute la partie du plan des xz où z est positif, à y annuler son paramètre différentiel du second ordre. Quant aux conditions $f(\pm\infty,z)=0$, $f(x,\infty)=0$, elles signifieront que cette même fonction $f(x,z)$ devra, en outre, s'annuler aux distances infinies de l'origine.

Pour achever de la déterminer au moyen d'une relation la concernant sur tout le reste $z=0$ du contour de l'espace où elle existe, nous avons enfin la dernière condition (90). Cherchons donc ce que devient celle-ci avec l'expression (92) de φ; et, à cet effet, évaluons, par la règle du n° 346* (p. 179*), la dérivée première en t du second membre de (92). Nous trouverons

$$(93)\qquad \frac{d\varphi}{dt}=\int_0^\infty\left[f\left(x+\frac{t^2}{2\alpha^2},z\right)+f\left(x-\frac{t^2}{2\alpha^2},z\right)\right]\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha,$$

et, par conséquent, à la limite $t=0$,

$$(94)\qquad (\text{pour } t=0)\quad \frac{d\varphi}{dt}=2f(x,z)\int_0^\infty\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha.$$

Or l'intégrale de $\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$ s'obtient en observant que, d'après la for-

mule de $\psi'(\gamma)$ déduite immédiatement de celle, (56) [p. 267*], de $\psi(\gamma)$, savoir

$$\left\{\begin{aligned}\psi'(\gamma) &= \int_0^{\sqrt{\gamma}} \cos(\gamma - m^2)\,dm\\ &= \cos\gamma \int_0^{\sqrt{\gamma}} \cos m^2\,dm + \sin\gamma \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin m^2\,dm,\end{aligned}\right.$$

on a identiquement

$$(95)\quad \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{d\alpha}\left[\left(\int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} \cos m^2\,dm\right)^2 + \left(\int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} \sin m^2\,dm\right)^2\right]$$

et, par suite, vu, finalement, les formules (32) de la page 127*,

$$(96)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^{\infty} \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha\\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\int_0^{\infty} \cos m^2\,dm\right)^2 + \left(\int_0^{\infty} \sin m^2\,dm\right)^2\right] = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.\end{aligned}\right.$$

Donc la relation (94) se réduit à

$$(97)\qquad (\text{pour } t = 0)\quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} f(x, z);$$

et la dernière condition (90), spéciale à $z = 0$, devient, si on la résout par rapport à $f(x, z)$,

$$(98)\qquad f(x, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} F(x).$$

En résumé, pour déterminer la fonction $f(x, z)$ dans toute la partie du plan des xz où z est positif, l'on a, comme équation indéfinie, l'égalité à zéro du paramètre Δ_2 de cette fonction, et comme conditions définies, l'égalité de f à $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} F(x)$, sur la partie $z = 0$ du contour de cet espace, avec son annulation (asymptotique) sur tout le reste. Or nous avons vu à la fin du n° 357* (p. 222*) que la dérivée en z du potentiel logarithmique $\int (\log r)\,dm$ d'une traînée $\int dm$ de matière, alignée le long de l'axe des x, et d'une densité linéaire partout exprimée par $\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} F(x)$, vérifiera toutes ces conditions au contour. En particulier, cette dérivée du potentiel logarithmique par rapport à z sera, pour chaque point de la traînée, celle que nous

appelions (p. 222*) $\frac{d\varphi}{dn}$, ou dont la valeur égale le produit de π par la densité linéaire, c'est-à-dire, ici, par $\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\mathrm{F}(x)$. Et, de plus, en tous les points (x, z), elle aura bien son paramètre Δ_2 identiquement égal à zéro, comme dérivée partielle du paramètre Δ_2, qu'on sait être nul, du potentiel $\int(\log r)\,dm$ lui-même.

Appelons ξ l'abscisse x d'un point quelconque de l'axe des x, et, par suite, $\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\mathrm{F}(\xi)\,d\xi$, la masse dm de l'élément de traînée compris entre ce point et celui dont l'abscisse est $\xi + d\xi$. Le potentiel logarithmique $\int(\log r)\,dm$ sera évidemment

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}(\log r)\mathrm{F}(\xi)\,d\xi, \qquad \text{avec} \qquad r = \sqrt{z^2 + (\xi - x)^2}.$$

Il viendra donc

$$(99)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x, z) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{\infty}(\log r)\mathrm{F}(\xi)\,d\xi \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\log r}{dz}\mathrm{F}(\xi)\,d\xi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z\mathrm{F}(\xi)\,d\xi}{z^2 + (\xi - x)^2}. \end{aligned} \right.$$

Comme la fonction $\mathrm{F}(\xi)$ s'annulera en dehors d'intervalles limités, cette valeur de $f(x, z)$, évidemment de l'ordre de z^{-1} aux grandes profondeurs z, se trouvera, de plus, comparable à l'inverse de x^2 aux très grandes distances horizontales $\pm x$ de l'axe des z. Or il résulte de là que l'expression (92) de φ constituera une intégrale finie et parfaitement déterminée ; car, si l'on y fait abstraction, sous le signe $\int$, du facteur ψ, toujours compris entre des limites restreintes, la fonction $f\left(x + \frac{\alpha^2}{2}, z\right) + f\left(x - \frac{\alpha^2}{2}, z\right)$ sera, pour $\pm\alpha^2$ très grand, de l'ordre de α^{-4}, alors qu'il lui suffirait d'être d'un ordre de petitesse supérieur à celui de α^{-1} pour assurer au second membre de (92) une valeur finie. Ce second membre admettra, d'ailleurs, un nombre quelconque de fois, malgré l'étendue infinie de son champ d'intégration, la règle de différentiation en t donnée dans le n° 346* (p. 179*), tantôt, à cause des changements de plus en plus fréquents de signe de $\psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$, ou de $\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$, $\psi''\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$, $\cdots$ quand α grandit, tantôt, à cause du rapide décroissement de la fonction $f\left(x \pm \frac{\alpha^2}{2}, z\right)$, ou de ses dérivées partielles, pour ces valeurs croissantes de α. Et elle l'ad-

mettra aussi quoique, à partir de la troisième différentiation en t, il s'y introduise sous le signe $\int$ un facteur ψ'', ou ψ''', ..., infini à une des deux limites ; car, en même temps, il y figurera un autre facteur, somme ou différence de fonctions f', ou f'', ... qui deviendront à cette limite incomparablement plus petites que ne sera grand le facteur ψ'', ou ψ''', ... On pourra, de même, différentier indéfiniment en x et en z, sous le signe $\int$, l'expression (92) de φ ; car de telles différentiations y introduiront, au lieu de f, ses dérivées partielles, de plus en plus petites pour les grandes valeurs absolues de ses variables.

Il ne reste plus qu'à s'assurer si, pour x, z ou t infinis, la fonction φ et ses dérivées, ainsi obtenues, s'annulent. Cet évanouissement asymptotique résulte, quand z est très grand, de la petitesse indéfinie que présentent alors f ou ses dérivées. Il résulte, lorsque $\pm x$ est très grand, de ce que les deux fonctions $f\left(x \mp \frac{\alpha^2}{2}, z\right)$, ou les deux fonctions $f\left(x \mp \frac{t^2}{2\alpha^2}, z\right)$, n'ont de valeurs sensibles que pour des valeurs modérées de $x \mp \frac{\alpha^2}{2}$ ou de $x \mp \frac{t^2}{2\alpha^2}$, lesquelles, existant seulement quand il s'agit de celle des deux fonctions considérées où le signe $\mp$ est contraire à celui de x, correspondent à des valeurs de α toutes comprises, dans le voisinage de la valeur particulière $\sqrt{\pm 2x}$ ou $\frac{t}{\sqrt{\pm 2x}}$, à l'intérieur d'un champ d'intégration de plus en plus étroit, de l'ordre de $\sqrt{\pm 2x}\left(\frac{1}{\pm x}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pm x}}$, ou de $\frac{t}{\sqrt{\pm 2x}}\left(\frac{1}{\pm x}\right)$ et, dans ce dernier cas, incomparablement plus petit même que l'intervalle existant entre o et $\frac{t}{\sqrt{\pm 2x}}$.

Enfin, quand t devient infini, les fonctions f, f', ... sous le signe $\int$, ne sont sensibles que pour des valeurs de α ou finies ou très grandes, suivant que ces fonctions ont les variables $x \pm \frac{\alpha^2}{2}$, z, ou $x \pm \frac{t^2}{2\alpha^2}$, z; et il suit de là que, dans les deux cas, la variable $\frac{t^2}{2\alpha^2}$ ou $\frac{\alpha^2}{2}$ du facteur ψ, ou ψ', ou ψ'', ... est extrêmement grande et incomparablement plus vite changeante que α. Par suite, ce facteur passe à tout instant du signe positif au signe négatif. L'intégrale est donc une somme de termes très petits, à signes alternés, se décomposant en un nombre fini de groupes dans chacun desquels la valeur absolue des termes va en croissant ou en décroissant, groupes qui, respectivement comparables à leur moins faible terme, donnent un total insensible.

Ainsi l'expression (92) de φ remplit bien toutes les conditions désirées. Éliminons-en la fonction f, dont la valeur est représentée par le dernier membre de (99); mais, auparavant, simplifions celui-ci en substituant à ξ, sous le signe $\int$, une nouvelle variable d'intégration, η, définie par la formule $\xi = x + z\eta$ (d'où $d\xi = z\,d\eta$), variable qui grandira, comme ξ, de $-\infty$ à $+\infty$, car z est positif en un point quelconque (x, z) de la partie considérée du plan des xz. Il viendra

$$(100) \qquad f(x, z) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(x + z\eta) \frac{d\eta}{1 + \eta^2}.$$

Remplaçons-y x par $x \pm \frac{\alpha^2}{2}$ et substituons enfin dans (92), à la somme $f\left(x + \frac{\alpha^2}{2}, z\right) + f\left(x - \frac{\alpha^2}{2}, z\right)$, sa valeur obtenue. Un changement dans l'ordre des intégrations donnera l'expression définitive cherchée de φ :

$$(101) \quad \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{1 + \eta^2} \int_0^{\infty} \left[F\left(x + \frac{\alpha^2}{2} + z\eta\right) + F\left(x - \frac{\alpha^2}{2} + z\eta\right)\right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha$$

473*. — Équation qui y régit les déformations de la surface libre et la marche des ondes.

Contentons-nous ici d'en déduire l'expression de la quantité particulièrement importante h, définie par (91), et dont dépend la forme de la surface libre. Pour $z = 0$, l'intégrale double, dans (101), se réduit évidemment au produit de deux intégrales simples, dont l'une, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{1 + \eta^2}$, égale $(\text{arc tang}\,\eta)_{-\infty}^{+\infty}$ ou π ; et, en différentiant d'ailleurs l'autre par rapport à t, l'on trouve

$$(102) \quad h = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \left[F\left(x + \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) + F\left(x - \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\right] \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

expression qui, pour $t = 0$, se réduit bien à $F(x)$, vu la valeur (96) de $\int_0^{\infty} \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha$.

Afin d'obtenir la forme naturelle de ses éléments, dédoublons-la en deux intégrales, ayant sous le signe $\int$, l'une, le facteur $F\left(x + \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)$, l'autre, le facteur $F\left(x - \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)$; et, dans chacune, appelons ξ, pour en faire la variable d'intégration, le binôme $x \pm \frac{t^2}{2\alpha^2}$ dont dépend la fonc-

tion F. Comme ce binôme varie de $\pm\infty$ à x quand α croît de zéro à ∞, et que, d'ailleurs, si r désigne la distance $\sqrt{(x-\xi)^2}$ des deux points de l'axe des x dont les abscisses sont x, ξ, la relation $x \pm \frac{t^2}{2\alpha^2} = \xi$ donne respectivement,

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{t}{\sqrt{2}}[\pm(\xi - x)]^{-\frac{1}{2}} = \frac{t}{\sqrt{2r}}, \\ d\alpha &= \mp \frac{t}{2\sqrt{2}}[\pm(\xi - x)]^{-\frac{3}{2}} d\xi = \mp \frac{t\,d\xi}{2r\sqrt{2r}}, \end{aligned}\right.$$

il viendra, toutes réductions faites, en appelant finalement dq la *dépression élémentaire* ou l'*impulsion élémentaire* $F(\xi)\,d\xi$ produite *initialement* sur chaque bande superficielle comprise entre deux abscisses consécutives ξ, $\xi + d\xi$,

$$(103) \qquad h = \frac{t}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi'\left(\frac{t^2}{4r}\right)\frac{F(\xi)\,d\xi}{r\sqrt{r}} = \frac{t}{\pi}\int \psi'\left(\frac{t^2}{4r}\right)\frac{dq}{r\sqrt{r}}.$$

Ainsi, l'élément naturel de la solution en ce qui concerne h, savoir, l'expression de h pour le cas d'une simple dépression ou impulsion initiale dq localisée sur une bande horizontale mince perpendiculaire aux x, est, à toute distance sensible r de cette bande, $\frac{t\,dq}{\pi r\sqrt{r}}\psi'\left(\frac{t^2}{4r}\right)$. Remplaçons-y la dérivée ψ' soit par son développement en série déduit de la formule (66) de la page 269*, soit par son expression asymptotique résultant de la formule (57) de la page 267*; et nous aurons, pour ce cas simple,

$$(104) \quad \left\{\begin{aligned} & h = \frac{dq}{\pi r}\left[\frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)}{1} - \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^3}{1.3.5} + \ldots \pm \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^{2n+1}}{1.3\ldots(4n+1)} \mp \ldots\right], \\ & \text{ou, si } \frac{t^2}{2r} \text{ est très grand,} \quad h = \frac{dq}{\sqrt{\pi r^2}}\left[\sqrt{\frac{t^2}{4r}}\cos\left(\frac{t^2}{4r} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Ces formules, dont la deuxième servira quand le calcul approché de h par la première serait trop laborieux, sont précisément celles que Poisson et Cauchy avaient obtenues vers le commencement de ce siècle, dans leurs grands Mémoires sur les ondes liquides [1], mais par

---

[1] Publiés aux Tomes I des deux *Recueils de l'Académie des Sciences de Paris*, savoir, celui de Poisson, au Tome I des *Mémoires des Membres*, et, celui de Cauchy, au Tome I des *Mémoires des Savants étrangers*.

des procédés compliqués, très délicats et d'une intelligence difficile. L'étude de leurs conséquences et de celles de la relation plus générale (101) nous mènerait trop loin : elle appartient d'ailleurs à l'Hydrodynamique [1].

474*. — **Deuxième cas, où devient nécessaire un potentiel sphérique : ondes produites dans un bassin et propagées suivant les deux sens horizontaux.**

Passons maintenant au cas où, dans les deux équations indéfinies (89) [p. 496*], complétées par les relations spéciales (90) et les conditions d'évanouissement asymptotique de φ quand une quelconque des variables proposées devient infinie, la fonction φ dépend des deux coordonnées horizontales x et y. Alors le second membre de (92) [p. 498*] a besoin d'être généralisé; car x ne peut évidemment plus y figurer d'une manière aussi simple. A cet effet, remplaçons-y x par une variable indépendante auxiliaire T, et, laissant provisoirement indéterminée la manière dont f dépendra de x, y, z, écrivons cette fonction, sous le signe $\int$, $f\left(\mathrm{T} \pm \frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right)$. Prenons, en d'autres termes,

$$(105)\quad \varphi = \int_0^\infty \left[f\left(\mathrm{T} + \frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) + f\left(\mathrm{T} - \frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right)\right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha.$$

Il est vrai que, de la sorte, la fonction φ dépend d'une variable de trop, mais on y obviera, en attribuant finalement, dans (105), à cette variable T, une valeur constante, savoir, la valeur zéro, plus propre que toute autre à simplifier les formules; ce qui, au fond, revient à faire porter les changements de la première variable de la fonction f, *dans* (105), sur la partie $\pm \frac{\alpha^2}{2}$, à laquelle seule, en définitive, il y aura lieu de donner diverses valeurs. Par contre, la forme ainsi conservée (105) offrira les avantages qu'avait précédemment (92). D'une part, elle satisfera identiquement aux deux premières conditions (90) et donnera de plus, d'après (97), à la dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$, l'expression initiale simple $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} f(\mathrm{T}, x, y, z)$. D'autre part, elle vérifiera l'équation

---

(1) On la trouve aux pages 608 à 639 et 648 à 651 du Volume intitulé *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des Notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse.*

$\frac{d^4 \varphi}{dt^4} = - \frac{d^2 \varphi}{dT^2}$ [si du moins $f'_T(\infty, x, y, z) = f'_T(-\infty, x, y, z)$] et permettra ainsi d'*abaisser au second ordre* la première des deux équations indéfinies proposées (89), en la ramenant à la forme de celle du son, intégrable par des potentiels sphériques,

$$(106) \qquad \frac{d^2 \varphi}{dT^2} = \Delta_2 \varphi, \qquad \text{ou, ici,} \qquad \frac{d^2 \varphi}{dT^2} = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2}.$$

Donc, *grâce à la variable en excès* T, *qui permet d'égaler la dérivée correspondante* $\frac{d^2 \varphi}{dT^2}$, *successivement, à* $- \frac{d^4 \varphi}{dt^4}$ *et à* $\Delta_2 \varphi$, *la difficulté que présentait l'intégration de la première équation* (89) *se trouve divisée au point d'être résolue,* car *cette intégration se dédouble en celles de deux équations déjà traitées.* Et, chose digne de remarque, le mode de variation de l'inconnue *unique* φ en fonction des *trois* variables z, T, t, *considérées à tour de rôle comme principales,* se trouve réglé par *tout autant d'équations indéfinies,* dont deux, savoir, la dernière (89) et (106), rattachent, *séparément,* les dérivées secondes de φ soit en z, soit en T, à son paramètre différentiel Δ_2 pris en x et en y, tandis que la troisième, $\frac{d^4 \varphi}{dt^4} = - \frac{d^2 \varphi}{dT^2}$, relie enfin la quatrième dérivée de φ en t à sa dérivée seconde en T. Autrement dit, à chaque variable indépendante autre que les coordonnées horizontales x, y, il correspond une équation distincte où elle joue le rôle de variable principale; et ce n'est pas le nombre des fonctions inconnues, mais seulement le nombre de ces sortes de variables, ou *des sens suivant lesquels on fait varier* φ *d'une manière déterminée,* qu'on accroît en introduisant la nouvelle relation (106). Quant à la possibilité d'accorder ensemble les trois manières distinctes dont φ devra changer, avec z, T et t, d'après les trois équations indéfinies posées et les conditions définies qu'on y adjoint, elle résultera de la formation même de la fonction φ.

Et d'abord, l'équation (106) sera satisfaite par l'expression adoptée (105) de φ, si elle l'est par chacun de ses éléments; ce qui aura lieu en posant $\left(\frac{d^2}{dT^2} - \Delta_2\right) f\left(T \pm \frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) = 0$, c'est-à-dire,

$$(107) \qquad \begin{cases} \left(\frac{d^2}{dT^2} - \Delta_2\right) f(T, x, y, z) = 0, \\ \text{ou, ici,} \\ \frac{d^2 f(T, x, y, z)}{dT^2} = \frac{d^2 f(T, x, y, z)}{dx^2} + \frac{d^2 f(T, x, y, z)}{dy^2}, \end{cases}$$

relations dans lesquelles T désigne la première variable tout entière de la fonction f, savoir, ce que nous réduirons finalement, dans (105), à $\pm \frac{\alpha^2}{2}$.

On voit que, si φ et, par suite, f ne dépendaient pas de y, la manière dont x et T entreraient dans f serait déterminée par l'équation $\frac{d^2 f}{dT^2} = \frac{d^2 f}{dx^2}$, à laquelle on satisferait le plus simplement possible en prenant f de la forme $f(x + T, z)$; et il n'y aurait plus qu'à poser ensuite, comme il a été dit, $T = 0$ dans (105) où les fonctions f seraient $f\left(x + T \pm \frac{\alpha^2}{2}, z\right)$, pour retomber sur l'expression (92) qui nous a précédemment suffi.

Or une telle solution particulière de (107), où ne figurera qu'une seule fonction arbitraire des coordonnées, continuera à suffire, car un choix convenable de cette fonction permettra encore de faire vérifier par l'expression de φ obtenue la seconde équation indéfinie (89) [p. 496*] avec la troisième condition spéciale (90), pour T nul, et celles d'évanouissement asymptotique pour x, y, z ou t infinis. Nous pourrons donc prendre comme intégrale de (107) un seul des deux termes du second membre de (38) [p. 446*], où il faudra d'ailleurs, ainsi qu'on l'a vu à la fin du n° 459* (p. 447*) pour le cas de la dernière équation (107), ne considérer sous les signes $\int\int$, dans les fonctions F et f, que les deux premières variables $x + r \cos\mu \cos\theta$, $y + r\cos\mu \sin\theta$, c'est-à-dire réduire la troisième, $z + r \sin\mu$, à z. Le terme à garder sera celui qui est une fonction paire de la variable r, dont le nom, ici, est T, savoir, le premier terme, devenu

$$(108) \quad \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dT} \left[T \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\mu \, d\mu \int_0^{2\pi} F(x + T\cos\mu\cos\theta, y + T\cos\mu\sin\theta, z)\, d\theta \right].$$

En effet, comme nous devons finalement poser, dans (105), $T = 0$, le binôme entre crochets, sous le signe $\int$, s'y réduit à

$$f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right) + f\left(-\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right),$$

fonction essentiellement paire de la première variable $\frac{\alpha^2}{2}$, et dans laquelle une partie de f impaire par rapport à cette variable, savoir, le dernier terme de (38), s'entre-détruirait identiquement.

Rappelons-nous d'ailleurs (p. 444*) que, pour $T = 0$, l'expression (108) de $f(T, x, y, z)$ se réduit à $F(x, y, z)$, de sorte que la fonction

arbitraire $F(x, y, z)$ est $f(0, x, y, z)$; et, en définitive, vu d'ailleurs l'égalité de $f\left(-\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right)$ à $f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right)$, la formule utilisable, déduite de (105), à adopter pour φ sera

$$(109) \qquad \varphi = 2\int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right)\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha,$$

avec l'expression suivante de la fonction f, quant à sa première variable,

$$(110)\ f(T,x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dT}\int_0^{\frac{\pi}{2}} T\cos\mu\, d\mu \int_0^{2\pi} f(0, x+T\cos\mu\cos\theta, y+T\cos\mu\sin\theta, z)\,d\theta.$$

Déterminons maintenant $f(0, x, y, z)$ au moyen des conditions non encore employées, et, notamment, de la seconde équation indéfinie (89). On voit que celle-ci sera satisfaite par chaque élément de l'intégrale (105) et, par suite, de l'intégrale (109), si les trois dérivées secondes directes en x, y, z de la fonction $f\left(T \pm \frac{\alpha^2}{2}, x, y, z\right)$ ou $f(T, x, y, z)$ ont leur somme algébrique nulle; ce qui, d'après (110), aura également lieu, pourvu qu'il en soit de même des trois dérivées secondes directes de la fonction

$$f(0, x + T\cos\mu\cos\theta, y + T\cos\mu\sin\theta, z),$$

ou, évidemment, de $f(0, x, y, z)$, par rapport à leurs trois dernières variables.

Ainsi la seconde équation indéfinie (89) se trouvera vérifiée par (105), si le paramètre différentiel Δ_2, en x, y, z, de la fonction de point $f(0, x, y, z)$, est identiquement nul.

D'ailleurs, la dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$ se réduisant, pour $T = 0$ et $t = 0$, à $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} f(0, x, y, z)$ d'après ce que l'on a vu un peu avant (106), la dernière condition spéciale (90), qu'il restait à remplir, devient $f(0, x, y, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} F(x, y)$. Donc la fonction de point $f(0, x, y, z)$, à paramètre Δ_2 nul dans tout l'espace où z est positif, devra, à la surface $z = 0$ de cet espace, se réduire à la fonction donnée $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} F(x, y)$; et elle sera enfin tenue de s'évanouir en tous les points (x, y, z) du même espace infiniment éloignés de l'origine, pour y assurer l'annulation asymptotique des expressions (110) de f et (105)

ou (109) de φ. Or, on sait (p. 224*) que le potentiel ordinaire ou inverse $\int \frac{dm}{r}$ d'une couche $\int dm$ étalée sur le plan des xy, et dont la densité superficielle en chaque point (ξ, η) de ce plan serait $-\frac{\sqrt{2}}{\pi^2} F(\xi, \eta)$, aurait, du côté des z positifs, au sortir de la couche, sa dérivée en z égale au produit de cette densité pour -2π, c'est-à-dire précisément, en $(x, y, 0)$, à la fonction donnée $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} F(x, y)$; et comme, d'une part, la même dérivée $\frac{d}{dz}\int \frac{dm}{r}$ vérifierait l'équation $\Delta_2 \frac{d}{dz}\int \frac{dm}{r} = 0$, équivalente à $\frac{d}{dz}\Delta_2 \int \frac{dm}{r} = 0$ identiquement satisfaite à cause de $\Delta_2 \int \frac{dm}{r} = 0$; comme, d'autre part, elle s'évanouirait aux distances infinies de la couche $\int dm$, on remplira toutes les conditions voulues en prenant effectivement pour $f(0, x, y, z)$ la dérivée dont il s'agit, c'est-à-dire en posant

$$(111)\quad f(0, x, y, z) = \frac{d}{dz}\int \frac{dm}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\frac{d}{dz}\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{z^2 + (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}.$$

Grâce à cette expression de $f(0, x, y, z)$, qui sera de l'ordre de petitesse de z^{-2} aux grandes profondeurs z et de l'ordre encore plus élevé de $\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{-3}$ aux grandes distances horizontales de l'axe des z, l'évanouissement de $f(T, x, y, z)$ et de φ, pour x, y ou z infinis, se trouvera bien assuré.

De plus, la valeur (110), paire en T, de $f(T, x, y, z)$, s'évanouira si T y croît indéfiniment, et elle tendra ainsi vers une limite *déterminée* $f(\pm\infty, x, y, z)$, circonstance d'où résultera, en appelant f' la dérivée de $f(T, x, y, z)$ par rapport à T, l'égalité

$$f'(+\infty, x, y, z) = f'(-\infty, x, y, z),$$

reconnue indispensable pour la vérification par (105) de l'équation $\frac{d^2\varphi}{dT^2} + \frac{d^4\varphi}{dt^4} = 0$. En effet, quand T est très grand, l'intégrale double qui paraît dans le second membre de (110) peut être réduite à ses éléments correspondant aux très petites valeurs de $\cos\mu$, ou aux valeurs de μ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et toute limite fixe μ_1 choisie peu inférieure à $\frac{\pi}{2}$; car, pour les autres valeurs de μ, la fonction f y est de l'ordre de $f(0, T, T, z)$, c'est-à-dire comparable à T^{-3}, et les éléments

de l'intégrale double, de champ invariable, où se trouve en outre le facteur T, ont en tout leur somme comparable à T^{-2}, c'est-à-dire seulement du second ordre de petitesse. Or, pour les très petites valeurs de $\cos\mu$, la différentielle $d\mu$, ou, sensiblement, $\sin\mu\, d\mu$, revient à $-d\cos\mu$; et, si l'on pose $T\cos\mu = \tau$ $\left(\text{d'où } d\mu = -\frac{d\tau}{T}\right)$, la nouvelle variable τ décroîtra, T étant supposé assez grand, depuis une valeur très élevée jusqu'à zéro, pendant que μ grandira de μ_1 à $\frac{\pi}{2}$. Donc les éléments en question donneront à fort peu près le quotient, par T, de l'intégrale

$$\int_0^\infty \tau\, d\tau \int_0^{2\pi} f(0, x + \tau\cos\theta, y + \tau\sin\theta, z)\, d\theta,$$

finie et déterminée par suite de ce que

$$\tau f(0, x + \tau\cos\theta, y + \tau\sin\theta, z)$$

est de l'ordre de τ^{-2} quand τ devient très grand. Ainsi, pour les fortes valeurs absolues de T, l'intégrale dont la dérivée en T figure au second membre de (110) se trouve comparable à T^{-1}, comme la somme de ses éléments les plus influents; d'où il suit que ce second membre doit être, lui-même, comparable à T^{-2}, et, la fonction f, dans (105), de l'ordre de α^{-4} pour α très grand, ainsi qu'il arrivait (p. 501*) sous le signe $\int$ de (92), dans le cas précédent d'une seule coordonnée horizontale. La détermination parfaite des intégrales figurant aux seconds membres de (105) et de (109) est donc, de même, assurée, comme la légitimité des règles de différentiation suivies, telles qu'elles ont été données au n° 346* (p. 179*).

Enfin, l'annulation du second membre de (105) ou, par suite, de (109) pour t infini s'expliquera par les mêmes raisons que dans ce cas précédent (p. 502*).

475* — Équation qui y règle les déformations de la surface libre et le transport apparent des ondes.

Bornons-nous à former complètement l'expression de la dérivée h de φ en t à la limite $z = 0$, fonction de x, y, t dont dépendent les déformations de la surface libre et la marche des ondes superficielles. La dérivée du second membre de (109) par rapport à t étant, pour $z = 0$,

$$(112) \qquad 2\int_0^\infty f\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}, x, y, 0\right)\psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

il suffira de prendre aussi $z=0$ dans la formule (111), qui donnera $f(0, x, y, 0) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} F(x, y)$; après quoi il résultera, de (110),

$$f(\mathrm{T}, x, y, 0) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{d}{d\mathrm{T}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{T} \cos\mu \, d\mu \int_0^{2\pi} F(x + \mathrm{T}\cos\mu\cos\theta, y + \mathrm{T}\cos\mu\sin\theta)\, d\theta,$$

ou, en posant $\mathrm{T} = \frac{t^2}{2\alpha^2}$,

$$(113) \quad \left\{ \begin{aligned} & f\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}, x, y, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \frac{d}{d\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2\alpha^2} \cos\mu \, d\mu \\ & \qquad \times \int_0^{2\pi} F\left(x + \frac{t^2\cos\mu}{2\alpha^2}\cos\theta, y + \frac{t^2\cos\mu}{2\alpha^2}\sin\theta\right) d\theta. \end{aligned} \right.$$

Or, le temps t n'entre dans l'intégrale double du second membre que par la première des trois variables $\frac{t^2}{2\alpha^2}$, x, y dont dépend cette intégrale, et l'on peut obtenir sa dérivée relative à $\frac{t^2}{2\alpha^2}$ en faisant croître t de dt sans que α, x, ni y varient, puis, en divisant l'accroissement obtenu par celui, $\frac{2t\,dt}{2\alpha^2}$ ou $\frac{t}{\alpha^2}\,dt$, de $\frac{t^2}{2\alpha^2}$. Autrement dit, le signe de différentiation $\frac{d}{d\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)}$ y revient à $\frac{\alpha^2}{t}\frac{d}{dt}$. Alors, le facteur α^2 pouvant même passer sous le signe $\frac{d}{dt}$ et sous le suivant, $\int$, d'intégration, qui ne s'y rapportent pas, on trouve

$$(114) \quad \left\{ \begin{aligned} & f\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}, x, y, 0\right) = \frac{1}{\pi^2\sqrt{2}} \frac{1}{t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos\mu \, d\mu \\ & \qquad \times \int_0^{2\pi} F\left(x + \frac{t^2\cos\mu}{2\alpha^2}\cos\theta, y + \frac{t^2\cos\mu}{2\alpha^2}\sin\theta\right) d\theta. \end{aligned} \right.$$

Donc l'expression (112) de h devient, en groupant sous le dernier signe $\int$ tous les facteurs variables de la fonction à intégrer,

$$(115) \quad \left\{ \begin{aligned} & h = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \int_0^{2\pi} d\theta \\ & \qquad \times \int_0^{\infty} t^2 \cos\mu . \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) F\left(x + \frac{t^2\cos\mu}{2\alpha^2}\cos\theta, y + \frac{t^2\cos\mu}{2\alpha^2}\sin\theta\right) d\alpha. \end{aligned} \right.$$

Pour simplifier cette expression, adoptons, au lieu de α, comme variable de la première intégration, la quantité $\frac{t^2 \cos\mu}{2\alpha^2}$, que nous appellerons r, et qui décroît de l'infini à zéro quand α grandit de zéro à l'infini. L'égalité $r = \frac{t^2 \cos\mu}{2\alpha^2}$, ou $\alpha = \sqrt{\frac{t^2 \cos\mu}{2}}\, r^{-\frac{1}{2}}$, donnant $d\alpha = -\frac{\sqrt{t^2 \cos\mu}}{2r\sqrt{2r}}\, dr$, l'intégrale en θ et α, dans (115), prend la forme

$$(116)\quad \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \left(\frac{t^2 \cos\mu}{2r}\right)^{\frac{3}{2}} \psi'\left(\frac{t^2 \cos\mu}{4r}\right) \mathrm{F}(x + r\cos\theta,\ y + r\sin\theta)\, dr.$$

On voit que, si r, sur le plan des xy, désigne la droite de jonction du point considéré (x, y) aux divers autres points, dont j'appellerai ξ, η les coordonnées, et si θ désigne l'angle de cette droite r avec l'axe des x, l'intégrale double

$$(117)\qquad \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{t^2 \cos\mu}{2r}\right)^{\frac{3}{2}} \psi'\left(\frac{t^2 \cos\mu}{4r}\right) \frac{\mathrm{F}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{r},$$

où t et μ seraient deux constantes, deviendra précisément (116) par la substitution, aux coordonnées rectangles ξ, η, de coordonnées polaires r, θ comptées à partir du point (x, y) comme pôle. Donc cette intégrale double (117) peut remplacer (116) dans (115) ; et, en appelant dq la *dépression élémentaire* ou l'*impulsion élémentaire* $\mathrm{F}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$ produite initialement en chaque endroit (ξ, η) de la surface, la formule (115) de h sera enfin, sous une forme aussi réduite que possible,

$$(118)\qquad h = \frac{4}{\pi^2 t} \frac{d}{dt} \int \frac{dq}{r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t^2 \cos\mu}{4r}\right)^{\frac{3}{2}} \psi'\left(\frac{t^2 \cos\mu}{4r}\right) d\mu,$$

où le premier signe $\int$ de sommation s'étend à toutes les dépressions ou impulsions élémentaires, dq, produites initialement (c'est-à-dire pour $t = 0$) sur la surface libre, aux diverses distances r du point quelconque (x, y) de celle-ci.

Ainsi, l'élément naturel de la solution cherchée, expression de h pour le cas d'une seule dépression ou impulsion initiale dq localisée à l'origine des distances r, est

$$(119)\ h = \frac{4\, dq}{\pi^2 r t} \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma^{\frac{3}{2}} \psi'(\gamma)\, d\mu, \qquad \text{si l'on pose} \qquad \gamma = \frac{t^2}{4r} \cos\mu.$$

Développons-la suivant les puissances impaires de t^2, et, dans ce

but, remplaçons $\psi'(\gamma)$, sous le signe $\int$, par sa valeur déduite de la formule (66) de la page 269*. Il viendra

$$\gamma^{\frac{3}{2}}\psi'(\gamma) = \frac{1}{4}\left[\frac{(2\gamma)^2}{1} - \frac{(2\gamma)^4}{1.3.5} + \ldots \pm \frac{(2\gamma)^{2n+2}}{1.3.5\ldots(4n+1)} \mp \ldots\right].$$

Substituons-y $\frac{t^2}{2r}\cos\mu$ à 2γ, puis multiplions par $d\mu$ et intégrons en nous souvenant (p. 60) que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}\mu\, d\mu = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n+1}{2n+2}.$$

Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma^{\frac{3}{2}}\psi'(\gamma)\, d\mu = \frac{\pi}{8}\Bigg[&\frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^4}{2.4.5} + \ldots \\ &\pm \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^{2n+2}}{2.4\ldots(2n+2)(2n+3)(2n+5)\ldots(4n+1)} \mp \ldots\Bigg], \end{aligned}\right.$$

série dont la dérivée en t, portée dans (119), donne finalement

$$(120)\quad \left\{\begin{aligned} h = \frac{dq}{2\pi r^2}\Bigg[&\left(\frac{t^2}{2r}\right) - \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^3}{2.5} + \ldots \\ &\pm \frac{\left(\frac{t^2}{2r}\right)^{2n+1}}{(2.4.6\ldots2n)(2n+3)(2n+5)\ldots(4n+1)} \mp \ldots\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Cette formule est, comme la première (104) [p. 504*], d'un calcul laborieux quand le rapport $\frac{t^2}{2r}$ devient considérable. Mais alors γ, sous le signe $\int$ de la première (119), le devient lui-même, sauf près de la limite supérieure où la fonction $\gamma^{\frac{3}{2}}\psi'(\gamma)$ cesse d'être grande et finit même par s'annuler. Or, eu égard surtout à la forte valeur de l'intégrale, on peut bien négliger ces éléments, voisins de la limite $\frac{\pi}{2}$, et dont le champ total est très faible. Quant aux autres, le facteur $\psi'(\gamma)$, exprimé, d'après la formule (57) de la page 267*, par

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right),$$

y change de signe à chaque instant, et de plus en plus souvent à me-

sure que μ grandit ou que $\cos\mu$ varie plus vite. Comme d'ailleurs γ décroît en même temps, ces éléments forment une série de termes à signes alternés, dont la valeur absolue diminue, de l'un à l'autre, très graduellement, dès que μ devient sensible, et dont ceux d'un ordre un peu élevé sont absolument négligeables devant les premiers.

On peut donc se borner à ceux-ci, c'est-à-dire aux éléments correspondant aux petites valeurs de μ, qui font varier $\cos\mu$ et $\psi'(\gamma)$ avec une rapidité bien moindre que les autres. Or ces valeurs rendent γ sensiblement égal à $\frac{t^2}{4r}\left(1-\frac{\mu^2}{2}\right)$ ou à $\frac{t^2}{4r}-\frac{t^2\mu^2}{8r}$, expression dont le second terme acquerra, si $\frac{t^2}{8r}$ est assez grand, des valeurs sensibles quelconques, malgré la petitesse de μ. De plus $\psi'(\gamma)$ y est réductible à

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\left(\frac{t^2}{4r}-\frac{\pi}{4}-\frac{t^2\mu^2}{8r}\right)\\&\quad=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\cos\left(\frac{t^2}{4r}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{t^2\mu^2}{8r}+\sin\left(\frac{t^2}{4r}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{t^2\mu^2}{8r}\right].\end{aligned}\right.$$

Par suite, l'intégrale paraissant dans la première (119) devient, à une faible erreur relative près, vu que le facteur $\gamma^{\frac{3}{2}}$ ou $\left(\frac{t^2}{4r}\cos\mu\right)^{\frac{3}{2}}$ se confond presque avec $\frac{t^3}{8r\sqrt{r}}$ pour les éléments principaux considérés,

$$\frac{t^3\sqrt{\pi}}{16r\sqrt{r}}\left[\cos\left(\frac{t^2}{4r}-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^\infty\cos\frac{t^2\mu^2}{8r}\,d\mu+\sin\left(\frac{t^2}{4r}-\frac{\pi}{4}\right)\int_0^\infty\sin\frac{t^2\mu^2}{8r}\,d\mu\right],$$

ou bien, par l'emploi des formules (32) de la page 127*, dans lesquelles on fera $x=\mu$, $b=\frac{t^2}{8r}$,

$$\frac{\pi t^2}{16r}\left[\cos\left(\frac{t^2}{4r}-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{t^2}{4r}-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{t^2}{4r}\sin\frac{t^2}{4r}\right).$$

Et la dérivée de cette fonction par rapport à t sera sensiblement, à cause de la très grande valeur supposée de $\frac{t^2}{4r}$, $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{t^2}{4r}\cos\frac{t^2}{4r}\right)\frac{t}{2r}$. On aura donc, en définitive, comme forme asymptotique de l'expression (119) de h,

$$(121)\qquad \left(\text{pour } \frac{t^2}{2r} \text{ très grand}\right)\quad h=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dq}{\pi r^2}\left(\frac{t^2}{4r}\cos\frac{t^2}{4r}\right).$$

Telle est la formule qui, analogue à la seconde (104) [p. 504*], tiendra lieu de la série (120) quand celle-ci sera trop lentement convergente.

Les deux expressions (120) et (121) de h concordent avec celles que Poisson et Cauchy avaient obtenues par des méthodes bien plus longues et très difficiles à comprendre. La première, (120), est due à Poisson, qui l'a établie [1] en supposant l'expression initiale de h, du second degré en x et y dans la petite étendue où on la donne différente de zéro ; on voit qu'elle s'applique au cas d'une dépression ou d'une impulsion élémentaires dq quelconques. La seconde, (121), est précisément celle dont Cauchy, après y être parvenu, a déduit, par voie de superposition [2], les lois des ondes d'émersion circulaires, ou autres à profil horizontal également courbe, pour diverses formes du solide immergé et, en particulier, pour celle d'un paraboloïde ayant son axe vertical, qu'avait déjà considérée Poisson.

---

[1] A la page 153 de son *Mémoire sur les ondes* (t. I du *Recueil de l'Académie*).

[2] *Voir* les pages 242 à 279 de son *Mémoire sur les ondes* (dans le t. I du *Recueil des Savants étrangers*) ou les pages 247 à 285 du t. I des *Œuvres complètes de Cauchy,* éditées par MM. Gauthier-Villars et fils.

QUARANTE-NEUVIÈME LEÇON.

RÉSULTATS GÉNÉRAUX CONCERNANT LA NATURE DES INTÉGRALES, DANS LES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE RELATIFS AUX CORPS OU MILIEUX INDÉFINIS; EMPLOI DE LA FORMULE DE FOURIER POUR RÉSOUDRE CES PROBLÈMES.

476*. — Des solutions simples naturelles, dans les problèmes relatifs aux corps ou milieux indéfinis.

Jetons maintenant un coup d'œil d'ensemble sur les nombreux problèmes traités dans les trois dernières Leçons, afin de dégager le caractère le plus général des solutions obtenues. Si l'on excepte les cas de potentiels sphériques, où figurent des intégrations s'étendant à une surface mobile et variable, ces solutions, exprimées par des potentiels ou par d'autres intégrales définies, se sont trouvées soit dès l'abord, soit finalement (après des calculs plus ou moins longs), d'un degré de multiplicité égal au nombre des variables indépendantes *non principales* du problème, qui sont, par exemple, les coordonnées x, y parallèles à un plan, ou même les trois coordonnées x, y, z, dans l'étude d'états permanents se réglant à partir soit de ce plan $z = 0$ (pp. 429* à 441*), soit d'un espace triplement étendu (pp. 441* à 443*). Mais une plus grande variété de cas se produit dans l'étude d'états non permanents; car les variables non principales y sont, tantôt, les coordonnées des divers points de l'espace comprenant et entourant une région assignée d'émanation (pp. 478* à 495*), tantôt seulement, même dans un espace triplement étendu, les coordonnées x, y parallèles à un plan $z = 0$, quand la région d'émanation se trouve toute sur ce plan (nº 452*, pp. 430*, 444*; et nºs 471* à 475*, pp. 496* à 515*), cas où z a autant que t le rôle de variable principale, tantôt enfin le temps t lui-même (pp. 460* à 478*), lorsque les faits dont il s'agit dépendent d'une succession donnée de circonstances produites en un seul endroit.

D'ailleurs, dans tous ces cas, les variables indépendantes non principales sont celles qui définissent, par diverses de leurs valeurs, les différentes parties de la *région d'émanation* ou de la *durée de*

création du phénomène; mais, supposées ici variables de $-\infty$ à ∞, elles peuvent sortir et, d'ordinaire, sortent en effet du champ généralement restreint de cette région ou de cette durée. C'est donc des variables non principales, en nombre égal au degré de multiplicité des intégrales fournissant la solution, que dépendent les fonctions arbitraires par lesquelles s'exprime, pour la valeur zéro des variables principales z, t ou r (quand il y en a de telles), l'état initial, c'est-à-dire relatif à l'instant ou au lieu de départ, état que l'on peut regarder comme la cause et la source du phénomène. Seulement, il nous a fallu leur donner, dans les fonctions arbitraires dont il s'agit, des désignations spéciales, telles que ξ, η, ζ, τ, à la place de x, y, z, t, pour éviter de confondre les circonstances *primitives,* censées connues *a priori* et susceptibles d'être choisies à volonté, avec les circonstances *dérivées* ou consécutives, qui constituent les faits cherchés à l'expression desquels on consacre les lettres x, y, z, t. Et nous avons reconnu que l'on pouvait prendre justement comme variables d'intégration les quantités ξ, η. ..., ou τ; après quoi chaque terme infiniment petit de la solution était le produit d'une valeur $F(\xi, \eta, \ldots)$, ou $F(\tau)$, de l'une des fonctions arbitraires, par le champ élémentaire $d\xi\, d\eta \ldots$, ou $d\tau$, où cette valeur se réalise, et par une certaine fonction, déterminée pour chaque problème, des variables principales, z, t, ou r, et des différences $x-\xi$, $y-\eta, \ldots$, ou $t-\tau$. La solution se compose ainsi d'autant de ces solutions élémentaires, qu'il y a de fonctions arbitraires, et que la région totale d'émanation $\int\int \ldots d\xi\, d\eta \ldots$, ou la durée totale de création $\int d\tau$, comprend d'éléments où les fonctions arbitraires diffèrent de zéro [1].

---

[1] *Exemple d'un problème d'état non permanent où il n'y a pas de variable principale : températures d'un milieu sillonné par une source calorifique.*

Certains problèmes d'état non permanent où, comme dans la plupart de ceux d'état permanent, *aucune* variable *principale* ne figure, offrent ce caractère, qu'*une seule* des variables indépendantes s'y trouve *non principale* au sens où nous l'entendons ici, *toutes* pouvant, il est vrai, se suppléer dans ce rôle, quoique l'une d'elles, le temps t par exemple, le remplisse plus naturellement que les autres, qui sont alors les coordonnées $x, y, \ldots$. Le seul exemple de ce cas rencontré plus haut, et que même nous avons seulement indiqué (n° 468*, p. 478*), est le problème des températures dans un milieu indéfini à m dimensions, sillonné par une source calorifique, mobile suivant une trajectoire donnée. Alors, en effet, si ξ, $\eta, \ldots$, fonctions connues de τ, désignent les coordonnées qu'avait cette source à l'époque τ, alors que son débit par unité de temps, également connu, était $F(\tau)$, la solution se forme, comme on a dit, en superposant des solutions élémentaires *successives* (74) [p. 475*], après y avoir remplacé t par $t-\tau$ et dq par $F(\tau)\,d\tau$.

C'est naturellement chacun de ces éléments de l'intégrale générale qu'il conviendra d'appeler une *solution simple* de la question. On voit

---

On obtient ainsi une intégrale de la forme (73), savoir

$$(a) \qquad \varphi = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^m} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \frac{F(\tau)\, d\tau}{(\sqrt{t-\tau})^m},$$

mais où l'origine des rayons vecteurs r, au lieu d'être fixe, a maintenant ses coordonnées ξ, η, ... fonctions de τ. Dans la fraction négative affectant l'exponentielle, *le rayon* r, exprimé par

$$(b) \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \dots},$$

ne peut donc plus se substituer à x, y, ... comme variable indépendante et *cesse* par conséquent *d'être variable principale, sans qu'aucune coordonnée le devienne,* la fonction arbitraire $F(\tau)$ ne se rapportant à une valeur initiale constante d'aucune. D'autre part, le temps t, qui joue le rôle de variable indépendante *non principale,* puisqu'il paraît seul (sous le nom de τ) dans la fonction arbitraire du problème, pourrait céder ce rôle à l'une quelconque des coordonnées ξ, η, ... de la source, qui lui sont liées. Donc la question n'admet *aucune variable principale* et comporte *une seule variable non principale,* qui peut être l'une quelconque des coordonnées ou le temps, mais est de préférence ce dernier.

Il faut s'assurer toutefois, par une vérification directe, si le second membre de (a) constitue bien une intégrale simple déterminée, et satisfaisant aux conditions du problème. D'une part, ce second membre est déterminé et fini, malgré le dénominateur $(\sqrt{t-\tau})^m$ nul à la limite supérieure $\tau = t$; car l'exponentielle à exposant négatif qui figure au numérateur s'y annule aussi, et nous savons qu'elle devient alors infiniment plus petite que tout dénominateur algébrique. Il ne reste donc qu'à voir si la même intégrale définie exprime bien la température, primitivement égale à zéro, d'un milieu où se trouve créée à chaque instant τ, par unité de temps, la quantité de chaleur $F(\tau)$, à l'endroit alors défini par les coordonnées ξ, η, ...

Pour le reconnaître, nous aurons à différentier le second membre de (a); et il sera utile d'introduire dans ce second membre une continuité parfaite, en remplaçant provisoirement, à la limite supérieure, l'époque actuelle t par une autre un peu antérieure $t-\varepsilon$, afin d'éviter la valeur critique $\tau = t$ qui rend la fonction sous le signe $\int$ infinie au point $(x = \xi, y = \eta, \dots)$ présentement occupé par la source. Nous appellerons, à l'occasion, T cette nouvelle limite supérieure $t-\varepsilon$, caractéristique d'une époque *infiniment récente* par rapport à *l'époque actuelle* t, et, R, la distance du point quelconque $(x, y, \dots)$ de l'espace à la situation correspondante $(\xi, \eta, \dots)$ que *vient de quitter la source,* ou que celle-ci occupait pour $\tau = t - \varepsilon$. Ayant ainsi posé provisoirement, au lieu de (a),

$$(a') \qquad \varphi = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^m} \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} e^{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}} \frac{F(\tau)\, d\tau}{(\sqrt{t-\tau})^m},$$

nous obtiendrons évidemment le paramètre différentiel $\Delta_2\varphi$ par la différentiation sous le signe $\int$; et, vu l'équation $\Delta_2\varphi = \frac{d\varphi}{dt}$ que vérifie la solution élémentaire

qu'il constituerait, à lui seul, la véritable solution du problème, si toutes les fonctions arbitraires à considérer s'annulaient identiquement à l'exception de celle, F, qui y figure, et si, même, celle-ci se

---

(74) employée dans (a'), ce paramètre $\Delta_2\varphi$ égalera le résultat de la différentiation de φ par rapport à t effectuée également sous le signe $\int$, c'est-à-dire la dérivée $\frac{d\varphi}{dt}$ diminuée du terme aux limites qu'y ajoute la variation de la limite supérieure $t-\varepsilon$. Comme ce terme est évidemment, en supposant ε indépendant de t, $\frac{F(t-\varepsilon)}{(2\sqrt{\pi\varepsilon})^m}e^{-\frac{R^2}{4\varepsilon}}$, la fonction φ définie par (a') satisfait en réalité, dans tout l'espace, à l'équation

$$(c)\qquad \frac{d\varphi}{dt}-\Delta_2\varphi=\frac{F(T)}{(2\sqrt{\pi\varepsilon})^m}e^{-\frac{R^2}{4\varepsilon}}\qquad (\text{où } T=t-\varepsilon).$$

Or c'est l'équation aux dérivées partielles de la température quand on suppose créée sans cesse par unités d'espace et de temps, en chaque endroit $(x, y, \ldots)$, une quantité de chaleur égale au second membre, dans lequel R désigne la distance du point *fixe* $(x, y, \ldots)$ au point *mobile* $(\xi, \eta, \ldots)$ considéré à l'époque récente $\tau=t-\varepsilon$. D'ailleurs cette chaleur, ainsi produite actuellement dans le milieu en couches concentriques de rayon R, d'épaisseur dR et d'étendue $\left(\frac{\sigma}{r^{m-1}}\right)R^{m-1}dR$, a comme valeur totale par unité de temps, si l'on pose finalement $\frac{R}{2\sqrt{\varepsilon}}=\rho$,

$$\left(\frac{\sigma}{r^{m-1}}\right)\frac{F(T)}{(\sqrt{\pi})^m}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{R}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^m}\left(\frac{R}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^{m-1}\frac{dR}{2\sqrt{\varepsilon}}=\left(\frac{\sigma}{r^{m-1}}\right)\frac{F(T)}{(\sqrt{\pi})^m}\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^{m-1}\,d\rho.$$

Et elle se trouve, avec une erreur relative évanouissante, infiniment condensée autour du point $(\xi, \eta, \ldots)$, considéré, comme on vient de dire, à l'époque récente T; car, pour ε assez petit, la valeur $\frac{R}{2\sqrt{\varepsilon}}$ de ρ dépasse déjà toute grandeur assignable dès que les distances R sont même à peine sensibles. Ainsi, on peut admettre que la chaleur créée à l'époque t l'est tout entière à l'endroit que quitte à l'instant le point mobile; et vu d'ailleurs, d'une part, les trois valeurs respectives $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ trouvées au bas de la page 475* pour l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\rho^2}\rho^{m-1}d\rho$ dans les cas $m=1$, $m=2$, $m=3$, d'autre part, les trois valeurs correspondantes 2, 2π, 4π, du rapport $\frac{\sigma}{r^{m-1}}$, cette chaleur totale créée par unité de temps égale bien F(T) ou, à la limite, $F(t)$, c'est-à-dire, comme il s'agissait de le démontrer, le débit même que la source déverse à chaque instant dans le milieu à l'endroit qu'elle occupe momentanément.

En quittant les applications des solutions élémentaires, telles que les secondes (74) [p. 475*] et (67) [p. 470*], de l'équation de la chaleur $\frac{d\varphi}{dt}=\Delta_2\varphi$ pour les milieux indéfinis, je remarquerai que la présence, dans ces solutions relatives à

trouvait nulle sauf dans une infiniment petite partie $d\xi\, d\eta \ldots$, ou $d\tau$, de son champ de variation.

Le produit $F(\xi, \eta, \ldots)\, d\xi\, d\eta \ldots$, ou $F(\tau)\, d\tau$, auquel une telle solution simple est proportionnelle, produit que nous avons appelé (sauf parfois un facteur constant) dm quand il était représenté par une masse potentiante (pp. 430*, 433*, 435*, 436*, 442*, etc.), dq dans les autres cas (pp. 470*, 475*, 481*, 504*, etc.), mesure, en quelque sorte, l'importance des phénomènes émanés de l'élément de champ $d\xi\, d\eta \ldots$ ou $d\tau$ dont il s'agit. Ce produit, que l'on pourra toujours désigner par dq, constitue pour ainsi dire l'élément de la quantité totale $\int dq$ d'action en jeu dans l'espace et la durée où se déroule le phénomène, action dont les effets totaux, calculables (vu la forme linéaire des équations) en superposant algébriquement des solutions simples, varient suivant son mode de répartition aux divers points $(\xi, \eta, \ldots)$ ou τ de la région ou de la durée qui la manifestent. Et l'on s'explique d'ailleurs que ces effets soient exprimés par une même fonction de z, t, ou r, et de $x - \xi$, $y - \eta$, ..., ou $t - \tau$, pour chaque action élémentaire dq, quels que soient l'endroit $(\xi, \eta, \ldots)$ de la région d'émanation et l'instant τ du temps où elle se révèle; car tous ces endroits ou instants se trouvent dans les mêmes conditions et jouissent des mêmes propriétés, tous étant pareillement, c'est-à-dire (par hypothèse) infiniment, éloignés des limites du corps ou du temps à considérer. Donc, si l'on prend pour origine des espaces ou des temps l'endroit ou l'instant d'une action élémentaire quelconque dq, la fonction qui représentera ses effets, c'est-à-dire la solution élémentaire, aura bien une expression indépendante de cet endroit ou de cet instant.

On s'explique également que cette fonction soit assez simple et d'une interprétation abordable, même dans des cas difficiles, comme

---

$t > 0$, et sauf au point d'origine $r = 0$, d'une exponentielle dont l'exposant négatif est proportionnel à l'inverse de t, leur procure, dans leurs rapports avec la solution $\varphi = 0$ propre aux époques antérieures, *un de ces contacts d'ordre infini*, ou *de ces raccordements parfaits* entre les deux parties d'un phénomène régies par deux lois différentes, qui s'étaient offerts à notre attention dès le n° 92 (t. I, p. 148). Nous les y avions, en effet, reconnus sur des exponentielles à exposant affecté de l'inverse d'une puissance de la variable, exponentielles que peut évidemment multiplier, sans rendre fini l'ordre du contact, un facteur algébrique quelconque. Il est d'ailleurs aisé de voir, par la différentiation, relative à t, des formules (65) [p. 469*] et (72*) [p. 474*], que celles-ci jouissent, encore pour l'époque $t = 0$, de la même propriété; ce qui montre que les solutions élémentaires (67) et (74) la communiquent à certaines, tout au moins, des intégrales plus ou moins complexes formées par leur superposition en nombre infini.

celui des ondes liquides [formules (104), (120) et (121), pp. 504*, 513* et 514*]; car elle exprime, pour ainsi dire, la propagation, dans des espaces ou des temps de plus en plus étendus mais *toujours semblables à eux-mêmes*, de faits issus d'un endroit ou d'un instant uniques. Or on sent quelle puissante cause de simplification doit être l'absence de toute hétérogénéité, de toute limite, qui, inégalement distante des diverses parties du champ d'action, établirait entre elles des différences et modifierait à son approche les phénomènes.

Ces considérations, évidemment générales dans le cas d'un corps à dimensions indéfinies, s'appliquent même aux phénomènes régis par l'équation du son ou par d'autres analogues, quoique alors les intégrales exprimant la solution ne concernent, à chaque instant, qu'une section, sans cesse variable, de la région d'émanation, c'est-à-dire d'ébranlement, et non toute son étendue. En effet, quand on veut s'y rendre nettement compte de la signification des formules, l'on ne peut s'empêcher, comme on a vu (pp. 448* et 450*), d'y supposer d'abord la région d'ébranlement infiniment petite en tous sens, pour passer de là, par superposition de solutions analogues, au cas d'une région d'ébranlement quelconque.

C'est ce que l'on fait même dans les problèmes dont les équations aux dérivées partielles s'intègrent sous forme finie, comme celui des cordes vibrantes (p. 363*). On y considère, en effet, comment se déplace d'un instant à l'autre *chaque valeur* de l'une quelconque, $f(x \pm at)$, etc., des fonctions arbitraires de point introduites par l'intégration ; ce qui revient à *abstraire,* pour un moment, les autres valeurs, comme si celle-là était la seule différente de zéro, pour s'occuper ensuite de ces autres valeurs à leur tour et superposer enfin toutes les solutions élémentaires qu'elles fournissent en étant ainsi prises à part.

Seulement, dans ces cas où il n'y a pas, sur le chemin suivi par le phénomène, dissémination des effets, chaque solution simple reste indéfiniment discontinue, puisque la fonction qui la représente ne diffère à chaque instant de zéro que dans une étendue infiniment petite où elle passe brusquement à ses plus grandes valeurs ; et la superposition d'une infinité de solutions simples est nécessaire, pour établir, dans les formules, une continuité que supposent toujours les équations aux dérivées partielles et même les circonstances physiques.

Au contraire, dans tous les autres cas étudiés ici, où la solution générale se trouve exprimée par des intégrales à limites constantes s'étendant à la totalité de la région d'émanation ou de la durée de production du phénomène, la solution simple constitue une fonction bien continue, sauf au premier moment ou au point de départ, quelquefois

aussi aux grandes distances ou aux époques éloignées (comme on verra ci-après). En d'autres termes, elle ne s'annule pas identiquement, dès que l'on sort de régions restreintes; et elle implique, par le fait même, une dissémination à tout instant infinie du phénomène primitivement localisé en un point. Ce n'est donc qu'au début et aussi, parfois, au loin dans l'espace ou dans la durée, qu'elle a besoin d'être unie à d'autres pour donner une solution continue réalisable.

Cette circonstance, remarquons-le, facilite la formation de la solution générale pour un état primitif quelconque : elle permet de l'obtenir en superposant des solutions simples dont la somme ne corresponde pas à l'état initial proposé, mais seulement à un autre dont les écarts d'avec le proposé ne s'annulent *qu'en moyenne* dans toute petite partie de la région d'émanation ou de la durée de création du phénomène. En effet, grâce à la *dissémination,* infiniment active au début ou au départ, il arrivera que les inégalités d'état initial, même très grandes, mais de signes contraires pour des points ou des instants voisins, s'effaceront pour ainsi dire en un clin d'œil, par neutralisation mutuelle ; ce qui n'aurait pas lieu, comme on sait (p. 449*), dans les phénomènes de propagation régis par l'équation du son ou par d'autres du même genre.

Toutefois, cette remarque, pleinement applicable quand les solutions simples sont affectées, comme dans la théorie de la chaleur, d'exponentielles décroissantes, sans intérêt au-dessous d'un certain degré de petitesse, est sujette à quelques restrictions, pour les fortes valeurs des variables, quand ces solutions simples contiennent des fonctions, comme $\sin\frac{r^2}{4t}$ (p. 492*), $\cos\frac{t^2}{4r}$ (p. 514*), etc., à variations rapides lorsque r ou t deviennent très grands. Alors, en effet, de légers écarts sur r ou t qui sont élevés au carré, c'est-à-dire de petites erreurs sur la situation (dans l'espace ou dans le temps) du point origine de chaque solution simple et, par conséquent, sur celle des inégalités de l'état initial, modifient notablement le résultat et finiraient même, sans les neutralisations mutuelles dues aux solutions simples superposées, par le rendre pratiquement discontinu, à moins que, en réalité, des circonstances négligées dans les équations admises (telles que frottements, etc.) n'éteignent ou n'altèrent auparavant le phénomène.

477*. — Double raison de la différence de nature existant entre ces solutions simples et celles des problèmes relatifs aux corps limités.

On comprend aisément pourquoi les solutions simples dont il vient d'être parlé, ou qui figurent naturellement et utilement dans les solu-

tions générales des problèmes relatifs aux corps indéfinis, ne conviennent pas pour des corps limités. Dans ceux-ci, en effet, les différents points de la *région* dite *d'émanation* sont inégalement distants des surfaces qui la bornent ou qui terminent le corps dans les divers sens. Par suite, les phénomènes produits à partir de ces points n'évoluent pas de la même manière, influencés qu'ils sont par le voisinage plus ou moins grand de la surface, par sa forme et par les circonstances extérieures. Il n'y a donc plus de formule *commune* pour exprimer les faits issus d'une région infiniment petite *quelconque*.

On s'explique avec une facilité égale que les solutions simples convenant aux corps limités perdent leur importance quand il s'agit de corps indéfinis. Ces solutions simples représentent, au moins dans les questions assez peu complexes (pp. 389* et 403*), des cas où les fonctions qui expriment l'état initial, c'est-à-dire relatif à la valeur zéro de la variable principale t ou z, ne s'annulent sur aucune fraction finie de toute la région possible d'émanation, mais se trouvent choisies, d'après la forme du corps et les conditions régissant sa surface, de manière que les rapports de leurs valeurs respectives aux divers points (x, y, z) ou (x, y) de cette région, soient gardés par les valeurs correspondantes mêmes des fonctions inconnues à des distances t ou z quelconques, dans le temps ou dans l'espace, de l'époque ou de la surface prises pour origine de la variable principale t ou z : en d'autres termes, les effets étudiés s'y transforment, à partir de l'instant initial $t = 0$, ou s'y propagent, à partir du plan $z = 0$, sans que leurs rapports pour les divers systèmes de valeurs des variables non principales x, y, z, ou x, y, s'altèrent jamais. Or, quand le corps devient indéfini, ses limites et celles de la région possible d'émanation perdent, en s'évanouissant, toute forme distincte. Donc les solutions simples appropriées à chaque forme déterminée de la surface, et à des conditions définies telles que l'annulation, sur cette surface, de chaque fonction inconnue, cessent d'avoir aucun rapport *spécial* avec le phénomène, qui, pour ainsi dire, les accepte indifféremment toutes.

On ne peut pas même, en superposant un nombre très grand, mais fixé, de pareilles solutions simples formées pour un corps de dimensions finies, espérer reproduire avec quelque approximation la solution simple qui convient au cas du corps indéfini. Car celle-ci implique, pour la valeur zéro de la variable principale t ou z, l'annulation de chaque fonction inconnue, en tous les points (x, y, z) ou (x, y), *hormis un seul,* d'un réseau à mailles étroites et uniformes s'étendant à tout l'espace solide ou plan : condition à laquelle, évidemment, on ne

satisfera, même d'une manière approximative, que si l'on dispose d'un nombre illimité de constantes arbitraires ou d'une infinité de solutions particulières convenablement choisies.

Toutefois, si les solutions simples propres aux corps indéfinis sont ainsi irréductibles à celles qui concernent les corps limités, jusqu'à ne pouvoir pas s'y ramener, par approximation, au sens où la somme limite de toute série *sensiblement* convergente se ramène à un nombre *assignable* de ses termes, il n'en est pas de même quand on les compose de telles solutions simples, mais infiniment petites et ayant leur forme graduellement variable de l'une à l'autre ; ce qui en fait, à volonté, soit des intégrales définies, soit des séries dont la convergence est infiniment faible et ne commence, en général, qu'après une infinité de termes. En effet, comme il revient au même (p. 427*) de supposer le milieu indéfini, et les phénomènes, émanés d'une région finie, avec extinction asymptotique aux grandes distances de cette région, ou, au contraire, le corps de dimensions finies, et les phénomènes localisés, soit à son intérieur, soit près de sa surface $z=0$, dans une étendue infiniment restreinte, la solution simple pour le milieu indéfini n'est pas autre chose qu'un cas *limite* de l'intégrale générale relative au corps de dimensions finies, savoir, le cas où les fonctions arbitraires qui y expriment l'état initial sont nulles partout, sauf en un point (ξ, η, ζ) de l'intérieur ou (ξ, η) de la surface. Or, un état initial aussi discontinu, surtout aussi *localisé*, s'éloignant infiniment de tous ceux qu'expriment une solution simple quelconque et même la somme, *essentiellement continue*, de tout ensemble *fini* de solutions simples rangées suivant l'ordre des valeurs croissantes de leur paramètre caractéristique β (pp. 391* et 404*), l'intégrale correspondante, supposée formée d'abord dans l'hypothèse d'une localisation moins grande de l'état initial, ne fera, à mesure que se complétera cette localisation, qu'emprunter de plus en plus ses éléments aux solutions simples rapidement variables dont le rang est infiniment élevé, et les répartir sur un nombre aussi de plus en plus grand de ces solutions ; ce qui la transformera bien, à la limite, en séries d'une convergence infiniment peu accusée et à termes infiniment petits.

478*. — Leur formation possible, par la formule de Fourier, au moyen de certaines des solutions simples convenant aux corps limités.

La possibilité d'attribuer au milieu que l'on veut rendre indéfini une forme quelconque et de choisir, pour les conditions concernant les parties éloignées de sa surface, toute relation susceptible d'en-

traîner l'évanouissement asymptotique des fonctions inconnues, permet souvent d'y faire servir la formule de Fourier (pp. 169* et 175*) à l'expression de l'état initial et à la recherche des solutions simples naturelles.

Supposons, par exemple, que, les variables non principales étant x, y, ... et la variable principale s'appelant t, il y ait à déterminer une seule fonction inconnue, φ, et que l'équation indéfinie en φ, linéaire à coefficients constants, contienne, dans tous ses termes, soit la fonction φ, soit un de ses paramètres différentiels d'ordre pair, $\Delta_2\varphi$, ou $\Delta_2\Delta_2\varphi$, ..., soit enfin des dérivées, en t, de φ ou de ces paramètres. Si nous appelons Φ toute fonction des variables non principales x, y, ... à laquelle soit proportionnel son paramètre différentiel Δ_2, ou telle que $\Delta_2\varphi$ vaille le produit d'une constante $-k$ par Φ, nous pourrons vérifier l'équation indéfinie au moyen de solutions simples de la forme $\varphi = \mathrm{T}\Phi$, où T désignera certaines fonctions de t et de k ayant soit leur valeur initiale (pour t nul) égale à 1, soit leur dérivée première en t, ou telle autre dérivée en t qu'on voudra, initialement égale à 1. En effet, vu la relation $\Delta_2\Phi = -k\Phi$ (d'où $\Delta_2\Delta_2\Phi = k^2\Phi, \ldots$), toute dérivée de la forme $\dfrac{d^n\,\Delta_2\,\Delta_2\ldots\varphi}{dt^n}$ devient $\dfrac{d^n\mathrm{T}}{dt^n}(-k)(-k)\ldots\Phi$ par la substitution de $\mathrm{T}\Phi$ à φ ; et l'équation indéfinie, après qu'on en a supprimé le facteur commun Φ, se réduit à une équation linéaire en T, sans second membre, dont les coefficients dépendent de k. D'ailleurs les solutions simples de celle-ci étant généralement soit de la forme $e^{\mathrm{K}t}$, soit de la forme double $e^{\mathrm{K}t}(\cos\mathrm{L}t$ ou $\sin\mathrm{L}t)$ avec K, L fonctions de k, il suffira de prendre tantôt $\mathrm{T} = e^{\mathrm{K}t}$ ou $\mathrm{T} = e^{\mathrm{K}t}\cos\mathrm{L}t$, tantôt $\mathrm{T} = \dfrac{e^{\mathrm{K}t}}{\mathrm{K}}$ ou $\mathrm{T} = e^{\mathrm{K}t}\dfrac{\sin\mathrm{L}t}{\mathrm{L}}$, etc., tantôt $\mathrm{T} = \dfrac{e^{\mathrm{K}t}}{\mathrm{K}^2}$ ou $\mathrm{T} = e^{\mathrm{K}t}\dfrac{\cos\mathrm{L}t}{\mathrm{K}^2-\mathrm{L}^2}$, etc., ..., pour que, initialement, T, ou sa dérivée première $\mathrm{T}' = \dfrac{d\mathrm{T}}{dt}$, ou sa dérivée seconde $\mathrm{T}'' = \dfrac{d^2\mathrm{T}}{dt^2}$, ..., se réduisent à l'unité.

Cela posé, attribuons au corps la forme rectangulaire, avec des limites dont les équations s'obtiennent en égalant x, y, ... à des constantes d'une très grande valeur absolue : et, d'une part, la relation $\Delta_2\Phi = -k\Phi$ se trouvera identiquement satisfaite, quelles que soient les constantes α, β, ..., ξ, η, ..., par l'expression

$$(122)\quad \Phi = \cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)\ldots,\quad \text{pourvu que l'on prenne}\quad k = \alpha^2+\beta^2+\ldots;$$

d'autre part, nous pourrons, au moins provisoirement, regarder la

même expression (122) comme vérifiant la condition $\Phi = 0$ aux limites $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty, \ldots$, soit parce que les facteurs $\cos\alpha(x-\xi)$, ou $\cos\beta(y-\eta)$, ... s'y annuleront *en moyenne,* soit parce qu'il suffirait de modifier infiniment peu α et ξ, ou β et η, ..., tout en les laissant indépendants de x, y, ..., pour rendre, à ces très grandes limites respectives, les produits $\alpha(x-\xi)$, ou $\beta(y-\eta), \ldots$, des multiples impairs exacts de $\frac{\pi}{2}$. Une telle manière de procéder se justifie par cette circonstance, que les solutions simples à introduire en nombre infini sont tenues, non pas de vérifier elles-mêmes la condition $\varphi = 0$ aux limites du corps infiniment éloignées, mais seulement de fournir des sommes qui y satisfassent ; ce que suffisent à faire augurer les considérations précédentes, en attendant, dans chaque cas, une vérification directe, qui semble indispensable ([1]).

([1]) *Sur l'intégration générale, en séries d'exponentielles et par la formule de Fourier, de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles.*

Ces sortes de solutions, dont les facteurs sont des exponentielles, cosinus ou sinus de fonctions linéaires des variables, s'obtiennent de la manière la plus générale, pour un système quelconque d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants et sans seconds membres, en égalant les diverses fonctions inconnues $\varphi, \chi, \ldots$, qui y figurent, au produit de tout autant de constantes imaginaires M, N, ... par une même exponentielle, $e^{ax+by+\cdots+kt}$, dont l'exposant soit une fonction linéaire, à coefficients $a, b, \ldots, k$ imaginaires aussi, des variables indépendantes proposées $x, y, \ldots, t$. Cette exponentielle s'élimine, comme facteur commun, de toutes les équations, qui deviennent de simples relations algébriques (en M, N, ..., $a, b, \ldots, k$) propres généralement à déterminer k et les rapports mutuels de M, N, ..., en fonction de $a, b, \ldots$ restés arbitraires. Si alors on sépare dans $\varphi, \chi, \ldots$ les parties réelles et les parties imaginaires, les premières vérifient séparément les équations, et les secondes les vérifient de même après suppression du facteur $\sqrt{-1}$: car il est évident que chaque équation du système prendra la forme $U + V\sqrt{-1} = 0$, le terme U se trouvant fourni par les premières seules, le terme $V\sqrt{-1}$, par les secondes seules ; et l'on sait d'ailleurs que l'équation $U + V\sqrt{-1} = 0$ implique, par définition, celles-ci, $U = 0$, $V = 0$. Or les parties soit réelles, soit affectées de $\sqrt{-1}$, dans $\varphi, \chi, \ldots$, constituent justement les solutions cherchées, à facteurs exponentiels ou trigonométriques.

Bornons-nous au cas de deux variables indépendantes x, t, et admettons que l'une d'elles, t, puisse jouer le rôle de variable principale ; ce qui aura permis *d'abaisser au premier ordre, par rapport à t,* toutes les équations du système, en introduisant au besoin des fonctions inconnues auxiliaires, égales aux dérivées les moins hautes (en t) des inconnues proposées. Le coefficient a de x, dans l'exponentielle, étant arbitraire, prenons-le de la forme $\alpha\sqrt{-1}$, avec α réel, et substituons d'ailleurs $x - \xi$ à x, par un déplacement d'origine qui ne modifie pas les équations aux dérivées partielles, ou par un changement de M, N, ... dans un

Cela posé, si ξ, η, ... désignent les coordonnées des divers points d'une région limitée d'émanation et $F(\xi, \eta, \ldots)$ une fonction arbitraire à l'intérieur de cette région, mais nulle au dehors, il sera possible, grâce à la formule de Fourier, de composer avec les solutions simples précédentes $T\Phi$ une solution plus complète, soit égale initialement à $F(x, y, \ldots)$, soit ayant ou sa dérivée première en t, ou sa dérivée seconde, etc., égale de même à $F(x, y, \ldots)$, pour $t = 0$. Appelons, en effet, c la constante arbitraire infiniment petite (fonction de α, β, ... et de ξ, η, ...) que nous attribuerons à chaque solution élémentaire $T\Phi$; et, d'après le choix que nous aurons fait de T, ou bien la solution plus complète obtenue $\varphi = \Sigma c T\Phi$ se réduira, pour $t = 0$, à $\Sigma c\Phi$, ou bien ce sera soit sa dérivée première en t, soit sa dérivée seconde, etc., qui alors deviendra $\Sigma c\Phi$. Dans tous les cas,

---

même rapport quelconque. Les parties soit réelles, soit imaginaires, de φ, χ, ... se réduiront évidemment, pour la valeur initiale *zéro* de t, à des binômes ayant comme termes les produits respectifs de $\cos\alpha(x - \xi)$ et de $\sin\alpha(x - \xi)$ par des coefficients tous proportionnels à une constante arbitraire commune c; et les unes ou les autres de ces parties, à volonté, composeront une solution simple du système.

Or, si p désigne le nombre des équations du système ou le nombre des fonctions φ, χ, ..., on conçoit qu'en ajoutant les $2p$ solutions analogues, formées avec mêmes valeurs de α et de ξ, mais avec les différentes racines k de l'*équation caractéristique,* du degré p, qui donnera ce paramètre, on disposera précisément des $2p$ constantes arbitraires généralement indispensables pour pouvoir annuler *initialement* les deux termes en $\cos\alpha(x - \xi)$ et $\sin\alpha(x - \xi)$ de toutes les fonctions inconnues φ, χ, ..., à l'exception d'une seule d'entre elles, désignée *à volonté,* φ par exemple, et pour y réduire même celle-ci à la forme $c\cos\alpha(x - \xi)$. Alors il suffira de superposer une infinité de telles solutions où, successivement, ξ recevra toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et α toutes les valeurs positives, pour que l'attribution, à c, de l'expression (124) ci-après, c'est-à-dire $\frac{F(\xi)\,d\xi}{\pi}\,d\alpha$, assigne dans cette solution plus générale, à l'inconnue choisie φ, la valeur initiale arbitraire $F(x)$, celle des autres, χ, ..., étant encore nulle. Et, après en avoir formé d'analogues où χ, ..., à leur tour, soient initialement arbitraires, il ne restera évidemment qu'à les ajouter toutes, pour obtenir la solution générale du système, savoir celle où les fonctions inconnues φ, χ, ... se réduisent, pour $t = 0$, à tout autant de fonctions quelconques données de x. Mais les intégrales doubles exprimant ces solutions devront, quand t différera de zéro, admettre des valeurs finies, bien déterminées; sans quoi les formules obtenues de φ, χ, ... seraient illusoires.

Nous jetterons ci-après, dans une seconde note (p. 528*), un coup d'œil sur le cas particulièrement important où le système se réduit, par l'élimination de $p - 1$ fonctions inconnues, à une seule équation, en φ, aux dérivées partielles, d'ordre p : c'est précisément le cas dont traite le numéro actuel 478* du texte, mais en supposant plus de deux variables x, t et seulement au point de vue de la formation d'intégrales qui ne sont pas toujours générales, quoique pourvues d'une fonction arbitraire.

il s'agira donc de déterminer c, de manière qu'on ait

$$\Sigma c\Phi = \mathrm{F}(x, y, \ldots),$$

ou

$$(123) \qquad \Sigma c \cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)\ldots = \mathrm{F}(x, y, \ldots)$$

Or la formule de Fourier (pp. 168* et 175*), toujours applicable quand la fonction finie $\mathrm{F}(\xi, \eta, \ldots)$ ne diffère, comme ici, de zéro que dans une certaine étendue, montre qu'on y parviendra si, faisant, avec continuité, croître $\xi, \eta, \ldots$ de $-\infty$ à $+\infty$, mais $\alpha, \beta, \ldots$ depuis zéro jusqu'à des valeurs infinies *constantes* (c'est-à-dire indépendantes, chacune, des autres variables), l'on prend, pour tout système de valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \xi, \eta, \ldots,$

$$(124) \qquad c = \frac{\mathrm{F}(\xi, \eta, \ldots)\, d\xi\, d\eta \ldots}{\pi^m}\, d\alpha\, d\beta \ldots,$$

où m désigne un exposant égal au nombre des variables non principales $x, y, \ldots$. Le signe Σ devient d'ailleurs l'équivalent du système de $2m$ signes $\int$, $\int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \int_{\beta=0}^{\beta=\infty} \cdots \int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} \int_{\eta=-\infty}^{\eta=\infty} \ldots$, indiquant que l'expression $c\mathrm{T}\Phi$ est alors l'élément d'une intégrale de l'ordre de multiplicité $2m$ (¹).

(¹) Plaçons ici quelques réflexions analogues à celles qui terminent la note précédente (p. 527*), et propres à les éclaircir *en les spécifiant*, quoique la présence, dans l'équation unique actuellement considérée, de plusieurs variables *non principales* $x, y, \ldots$ (qui, il est vrai, y figurent seulement par le symbole Δ_2) doive les rendre à un certain point de vue plus générales.

Si p désigne l'ordre, par rapport à t, de l'équation proposée aux dérivées partielles, et, par suite, de l'équation différentielle en T obtenue, on pourra évidemment, en choisissant pour T une solution non pas toujours simple, mais plus ou moins complexe, de cette équation différentielle, réduire initialement à zéro $p-1$ quelconques des quantités $\mathrm{T}, \mathrm{T}', \mathrm{T}'', \ldots, \mathrm{T}^{(p-1)}$, et à l'unité la $p^{\text{ième}}$. Alors la solution correspondante, en intégrale définie $2m^{\text{ième}}$, de l'équation aux dérivées partielles, avec fonction arbitraire $\mathrm{F}(\xi, \eta, \ldots)$, jouira évidemment, quand elle ne sera pas illusoire, de la propriété d'annuler, pour $t=0$, $p-1$ des fonctions φ, $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{p-1}\varphi}{dt^{p-1}}$, et d'y rendre la $p^{\text{ième}}$ égale à $\mathrm{F}(x, y, \ldots)$. Donc la superposition des p solutions formées de la sorte, si elles sont toutes bien déterminées et finies, constituera l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles, dans l'hypothèse que le temps t joue le rôle de variable principale.

Mais il est des cas, par exemple celui du numéro suivant (479*), où la seule solution (avec fonction arbitraire), utile à former, n'annule, pour $t=0$, aucune des fonctions φ, $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \ldots$, tandis que des solutions où s'annulerait initiale-

Ce mode de formation d'une solution φ affectée d'une fonction arbitraire a été découvert par Fourier. Mais comme le résultat y constitue une intégrale très complexe, d'une signification difficile à saisir et souvent même douteuse tant qu'on n'en a pas notablement abaissé l'ordre, son emploi devra être spécialement justifié sur chaque résultat.

C'est ce qu'il sera facile de faire quand l'intégrale deviendra accessible dans le cas de la solution simple propre au corps indéfini, savoir, dans l'hypothèse que la fonction $F(\xi, \eta, \ldots)$ s'annule hors d'un élément $d\xi\, d\eta \ldots$ de la région d'émanation. Alors, en appelant dq, comme il a été convenu (p. 520*), le produit $F(\xi, \eta, \ldots)\, d\xi\, d\eta \ldots$ de cette valeur par l'élément d'espace $d\xi\, d\eta \ldots$ où elle existe initialement, et en choisissant celui-ci comme origine des coordonnées afin de réduire à $x, y, \ldots$ les différences $x-\xi, y-\eta, \ldots$, l'expression $\Sigma c T \Phi$ de φ se réduira elle-même, évidemment, à l'intégrale du $m^{\text{ième}}$ degré de multiplicité,

$$(125) \qquad \varphi = \frac{dq}{\pi^m} \overline{\int \cdots \int_0^{+\infty}} T \cos \alpha x \cos \beta y \ldots d\alpha\, d\beta \ldots.$$

Il faudra donc pouvoir effectuer les m intégrations en $\alpha, \beta, \ldots$ pour rendre réellement utilisable la solution simple ainsi formée. Alors on s'assurera si, pour t quelconque, φ s'annule bien aux limites $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$, etc.; ce que l'on n'a pu faire, grâce à la formule de Fourier, que pour $t = 0$.

Voici quatre exemples, relatifs, le premier, à un état permanent, les trois autres, à des états variables, où les intégrations dont il s'agit sont assez faciles. Elles n'y conduisent d'ailleurs qu'à des solutions simples auxquelles nous étions parvenus plus directement par les potentiels ou par les intégrales définies de la XXXIII[e] Leçon.

479*. — Exemple de cette formation dans le problème de températures stationnaires résolu au n° 452*.

Notre premier exemple aura pour sujet la question du n° 452*, où les variables non principales sont les deux coordonnées x, y, la variable principale, que nous appelons ici t, une ordonnée positive z normale

---

ment l'une de celles-ci, exigeraient l'emploi, sous les signes $\int$, d'exponentielles croissantes de nature à rendre illusoires, ou du moins bien difficiles à interpréter, les intégrales définies introduites.

au plan des xy, sur toute l'étendue duquel ξ, η désigneront les coordonnées x, y, et où, enfin, l'équation indéfinie étant avec nos notations actuelles $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Delta_2\varphi = 0$, la dérivée première de φ en t (c'est-à-dire en z) égale de plus, initialement, une fonction donnée $-f(\xi, \eta)$.

La substitution de $\mathrm{T}\Phi$ à φ dans l'équation indéfinie donne $\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2} = k\mathrm{T}$, équation dont les solutions *simples*, à dérivée initialement égale à 1, ont la forme $\frac{e^{\mathrm{K}t}}{\mathrm{K}}$, avec $\mathrm{K} = \pm\sqrt{k} = \pm\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Mais les valeurs de K positives sont exclues par une des conditions du problème, savoir, par la relation $\varphi = 0$ pour $t = \infty$ (c'est-à-dire pour $z = \infty$), non moins obligée que les conditions $\varphi = 0$ pour x ou y infinis. En effet, le produit $\mathrm{T}\Phi$, nul asymptotiquement quand l'exposant $\mathrm{K}t$ devient infini négatif, croît, au contraire, sans limite (en valeur absolue), quand le même exposant devient infini positif. Il faudra donc prendre, dans (125), $\mathrm{T} = \frac{e^{-t\sqrt{k}}}{-\sqrt{k}} = \frac{e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$. Si l'on y remplace d'ailleurs l'exposant m par 2, et dq, ou $\mathrm{F}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$, c'est-à-dire $-f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$, par $-dm$, en faisant ainsi $f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = dm$, il viendra, comme solution simple cherchée,

$$(126)\qquad \varphi = \frac{dm}{\pi^2}\int\!\!\int_0^{+\infty} \frac{e^{-z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cos\alpha x \cos\beta y \, d\alpha\, d\beta.$$

Assimilant les variables d'intégration α et β aux deux coordonnées rectangles d'un plan, étendons, à tout le plan, l'intégration qui n'est indiquée que pour l'angle des coordonnées positives; ce qui, vu l'expression, paire en α et β, de la fonction sous les signes $\int$, reviendra à multiplier l'intégrale par 4. Puis dédoublons-la en deux, par la substitution, à $\cos\alpha x \cos\beta y$, de $\frac{1}{2}\cos(\alpha x + \beta y) + \frac{1}{2}\cos(\alpha x - \beta y)$; et, dans chacune, remplaçons tant les coordonnées rectangles x, y, que celles d'intégration α, β, par des coordonnées polaires R et θ, ρ et ω, donnant

$$x = \mathrm{R}\cos\theta, \qquad y = \mathrm{R}\sin\theta; \qquad \alpha = \rho\cos\omega, \qquad \beta = \rho\sin\omega.$$

Il faudra donc substituer $\rho\, d\omega\, d\rho$ à $d\alpha\, d\beta$, ρ à $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, enfin, $\rho\mathrm{R}\cos(\omega \mp \theta)$ à $\alpha x \pm \beta y$. D'ailleurs, comme l'exponentielle décroissante placée sous les signes $\int$ y assure la convergence de la somme des

éléments même pris en valeur absolue, la forme du champ infini d'intégration est indifférente, et l'on peut y remplacer les côtés rectilignes $\alpha = \text{const.} = \pm\infty$, $\beta = \text{const.} = \pm\infty$, par une circonférence

$$\alpha^2 + \beta^2 = \text{une const. } \rho^2 = \infty\,;$$

ce qui donnera comme nouvelles limites, aussi constantes, $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, $\rho = 0$ et $\rho = \infty$. Enfin, les intégrations, relatives à ω, d'expressions périodiques par rapport à $\omega \mp \theta$, et dans toute l'étendue d'une période 2π, pourront se faire de $\omega = \theta$ à $\omega = \theta + 2\pi$, dans la première intégrale, où figurera le facteur $\cos(\omega - \theta)$, et de $\omega = -\theta$ à $\omega = -\theta + 2\pi$ dans la seconde, où paraîtra, au contraire, le facteur $\cos(\omega + \theta)$; de manière à permettre, en posant $\omega \mp \theta = \omega'$ et $d\omega = d\omega'$, d'intégrer, dans les deux cas, depuis $\omega' = 0$ jusqu'à $\omega' = 2\pi$. Si l'on observe alors que les fonctions sous les signes $\int$ seront paires par rapport à $\cos\omega'$, ou que le quart de chaque intégrale, entre les limites zéro et 2π, s'obtiendra en faisant varier ω' seulement de zéro à $\frac{\pi}{2}$, l'expression (126) de φ sera, en définitive,

$$(127) \qquad \varphi = \frac{dm}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega' \int_0^{\infty} e^{-z\rho}\cos(\rho R\cos\omega')\,d\rho.$$

L'intégrale relative à ρ s'y trouve de la forme $\int_0^\infty e^{-a\rho}\cos b\rho\,d\rho$, avec $a = z$, $b = R\cos\omega'$, et sa valeur [p. 68, formules (20)] est $\frac{a}{a^2+b^2}$, c'est-à-dire $\frac{z}{z^2 + R^2\cos^2\omega'}$. On a donc, au lieu de (127),

$$(128) \qquad \varphi = \frac{dm}{\pi^2 z}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega'}{1 + \frac{R^2}{z^2}\cos^2\omega'},$$

c'est-à-dire, d'après la formule (25) de la page 26,

$$\varphi = \frac{dm}{\pi^2\sqrt{R^2+z^2}}\left[\text{arc tang}\left(\frac{z\,\text{tang}\,\omega'}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\right]_{\omega'=0}^{\omega'=\frac{\pi}{2}} = \frac{dm}{\pi^2\sqrt{R^2+z^2}}\,\frac{\pi}{2}.$$

Et si, enfin, l'on observe que $\sqrt{R^2+z^2}$ exprime la distance r du point quelconque (x, y, z) du corps à l'élément plan $d\xi\,d\eta$ choisi comme origine des coordonnées, il vient

$$(129) \qquad \varphi = \frac{1}{2\pi}\,\frac{dm}{r};$$

ce qui est bien l'élément du potentiel inverse employé au n° 452* [formule (1), p. 430*].

480*. — **Exemples de la même formation, dans les problèmes du refroidissement des milieux et de la dissémination du mouvement transversal le long d'une barre ou à la surface d'une plaque.**

Fourier lui-même a obtenu, par le procédé indiqué ici et qu'il a découvert à cette occasion ([1]), les intégrales de trois problèmes d'états variables, traités dans les n°s 468* (p. 479*), 469*, 470*, auxquels nous nous proposons encore d'appliquer la formule (125).

Le premier est celui de la diffusion de la chaleur à l'intérieur d'un milieu de une, deux ou trois dimensions. On y a comme équation indéfinie $\frac{d\varphi}{dt} = \Delta_2 \varphi$ et, comme relation d'état initial, $\varphi = F(\xi, \eta, \ldots)$ pour $t = 0$. Donc la substitution de $T\Phi$ à φ donne

$$\frac{dT}{dt} = -kT = -(\alpha^2 + \beta^2 + \ldots)T;$$

et, afin que, de plus, T se réduise à 1 pour $t = 0$, il faut prendre $T = e^{-(\alpha^2+\beta^2+\ldots)t} = e^{-\alpha^2 t} e^{-\beta^2 t} \ldots$. La formule (125) devient immédiatement

$$(130) \qquad \varphi = \frac{dq}{\pi^m} \int_0^\infty e^{-t\alpha^2} (\cos x\alpha)\, d\alpha \int_0^\infty e^{-t\beta^2} (\cos y\beta)\, d\beta \ldots.$$

Le second membre se décompose ainsi, de lui-même, en facteurs qui sont des intégrales simples. Appliquons à chacune d'elles la seconde formule (37) du n° 328* [p. 131*], après avoir, dans celle-ci, introduit un paramètre *positif* a, d'ailleurs quelconque, et un second paramètre, b, entièrement arbitraire, grâce aux substitutions $x = u\sqrt{a}$, $\alpha = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, qui la changent en cette autre

$$(131) \qquad \int_0^\infty e^{-au^2} \cos bu\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Nous aurons, en nous rappelant finalement que $x^2 + y^2 + \ldots$ est le carré de la distance r du point quelconque $(x, y, \ldots)$ à l'élément

---

([1]) *Théorie analytique de la chaleur;* 1822. *Voir* notamment les n°s 397 et 398, 405 et 406, 411 et 412 (pp. 463, 476, 487 de l'édition de 1888).

d'espace $d\xi\, d\eta\ldots$ pris pour origine,

$$(132)\qquad \varphi = \frac{dq}{\pi^m}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{y^2}{4t}}\right)\ldots = \frac{dq}{(2\sqrt{\pi t})^m}e^{-\frac{r^2}{4t}},$$

résultat bien identique à celui que donne la seconde formule (74) [p. 475*].

Notre second exemple d'état variable concernera la dissémination, le long d'une barre s'étendant à l'infini suivant l'axe des x, du mouvement transversal que provoquent, *sans l'adjonction d'aucune vitesse initiale,* des déplacements initiaux donnés $\varphi = f(\xi)$ s'étendant à une région de longueur finie dont ξ désigne les abscisses. L'équation indéfinie étant $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Delta_2\Delta_2\varphi = 0$ avec $m = 1$, la substitution de $\mathrm{T}\Phi$ à φ donne $\frac{d^2\mathrm{T}}{dt^2} + k^2\mathrm{T} = 0$; d'où résulte pour T l'expression, initialement égale à 1 et tenue d'ailleurs (vu l'absence supposée de vitesses initiales) d'avoir sa dérivée première en t nulle, $\mathrm{T} = \cos kt = \cos\alpha^2 t$. Donc la formule (125) se réduit à

$$(133)\qquad \varphi = \frac{dq}{\pi}\int_0^\infty \cos t\alpha^2 \cos x\alpha\, d\alpha,$$

où dq désigne l'élément d'action, différent de zéro, $f(\xi)\,d\xi$, supposé avoir eu son champ $d\xi$ choisi pour origine des x.

L'intégrale définie s'y évalue par l'une des deux formules (42) de la page 134*, qui, en posant, comme quand on a obtenu (131), $x = u\sqrt{a}$ et $\alpha = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, deviennent

$$(134)\qquad \int_0^\infty (\cos au^2 \text{ ou } \sin au^2)\cos bu\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{b^2}{4a} \pm \sin\frac{b^2}{4a}\right).$$

La première de celles-ci réduit, en effet, la formule (133), où l'on peut finalement remplacer x par $\pm\sqrt{r^2}$, à

$$(135)\qquad \varphi = \frac{dq}{2\sqrt{2\pi t}}\left(\cos\frac{r^2}{4t} + \sin\frac{r^2}{4t}\right).$$

Or cette expression de φ est identique à la solution simple résultant de la formule (83) [p. 485*], où, en vertu de (85) et (85 *bis*) [p. 486*],

l'annulation des vitesses initiales $f_1(\xi)$ conduit à prendre

$$F(\xi) = F_1(\xi) = \tfrac{1}{2} f(\xi),$$

et, par suite, grâce à la substitution de ξ, sous les signes $\int$ de (83), à $x + 2\alpha\sqrt{t}$ $\left[\text{d'où } d\alpha = \frac{d\xi}{2\sqrt{t}},\ \alpha^2 = \frac{(x-\xi)^2}{4t} = \frac{r^2}{4t}\right]$,

$$(136) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos\frac{r^2}{4t} + \sin\frac{r^2}{4t}\right) f(\xi)\, d\xi \\ &= \int \frac{dq}{2\sqrt{2\pi t}} \left(\cos\frac{r^2}{4t} + \sin\frac{r^2}{4t}\right), \end{aligned} \right.$$

somme d'éléments qui ont bien la forme (135).

Après avoir ainsi obtenu, pour une barre, l'intégrale (136), Fourier a traité la question analogue pour une plaque élastique couvrant tout le plan horizontal des xy et mise transversalement en vibration par des déplacements initiaux $\varphi = f(\xi, \eta)$, connus en fonction des coordonnées horizontales ξ, η de la région d'ébranlement. Comme l'expression de T, encore égale à $\cos kt$, est alors $\cos(\alpha^2 t + \beta^2 t)$, la relation (125) y devient, en appelant dq le produit $f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$,

$$(137) \qquad \varphi = \frac{dq}{\pi^2} \int\!\!\int_0^{+\infty} \cos(t\alpha^2 + t\beta^2) \cos x\alpha \cos y\beta\, d\alpha\, d\beta.$$

En vertu de la formule même de Fourier, qui a conduit à cette expression (137) de φ, l'intégrale double doit s'y évaluer dans l'hypothèse d'une forme *rectangulaire* du champ $\int\int d\alpha\, d\beta$, c'est-à-dire en attribuant, aux limites supérieures, des valeurs α, β constantes, que l'on fait croître à l'infini. Alors, vu, d'une part, la réduction de l'intégrale double à la différence de deux autres par la substitution de $\cos t\alpha^2 \cos t\beta^2 - \sin t\alpha^2 \sin t\beta^2$ à $\cos(t\alpha^2 + t\beta^2)$, d'autre part, la décomposition immédiate de chacune de celles-ci en un produit d'intégrales simples évaluables par les formules (134), il vient, tous calculs faits, pour l'intégrale double dont il s'agit, $\frac{\pi}{4t}\sin\frac{x^2+y^2}{4t}$ ou $\frac{\pi}{4t}\sin\frac{r^2}{4t}$; valeur d'où résulte, d'après (137), la solution simple

$$(138) \qquad \varphi = \frac{dq}{4\pi t} \sin\frac{r^2}{4t},$$

bien d'accord avec celle qu'implique la première formule (86)

[p. 488*] où l'on a vu qu'il fallait faire $F(\xi, \eta) = f(\xi, \eta)$. En effet, la substitution, à α et à β, des deux variables d'intégration $\xi = x + 2\alpha\sqrt{t}$, $\eta = y + 2\beta\sqrt{t}$, donne à la première (86), en observant que ρ^2 y devient $\frac{r^2}{4t}$ et, $d\varpi'$, $\frac{d\xi\, d\eta}{4t}$, la forme

$$\varphi = \frac{1}{4\pi t} \int\int \sin\frac{r^2}{4t} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \frac{1}{4\pi t} \int \sin\frac{r^2}{4t}\, dq.$$

composée d'éléments tout pareils à (138).

COMPLÉMENT A LA CINQUANTIÈME LEÇON.

APPLICATION DU CALCUL DES VARIATIONS AUX PROBLÈMES DES SURFACES A AIRE MINIMA, DES COURBES DOUÉES DE DIVERSES PROPRIÉTÉS DE MAXIMUM OU DE MINIMUM ET A EXTRÉMITÉS MOBILES, DES LIGNES GÉODÉSIQUES, DE LA MOINDRE ACTION, DE LA STABILITÉ DE FORME DE L'ONDE SOLITAIRE, DES TEMPÉRATURES PERMANENTES D'UN SOLIDE, ETC.

483*. — **Justification directe de la méthode des variations** ([1]).

Toutefois, l'application, ainsi faite, de la règle usuelle des maxima et minima démontrée pour les fonctions d'un nombre *fini* de variables *entièrement* indépendantes, à une fonction d'une *infinité* de variables qui, sans être liées par aucune relation précise, sont les valeurs *successives* d'une même fonction *continue*, peut laisser quelques doutes dans l'esprit. Il suffirait, pour les lever, de considérer d'abord, au lieu de l'intégrale $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$, une des sommes, de la forme $\sum f\left(x, y, \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\Delta x$, dont elle constitue la limite, somme pour laquelle on formerait sans difficulté des conditions de maximum ou de minimum finalement confondues avec l'équation différentielle (7) ou (8) [p. 251] que nous avons trouvée. Mais on peut aussi justifier comme il suit ce résultat.

Et d'abord, la manière même dont on a obtenu la formule (6) du changement élémentaire que font éprouver à l'intégrale $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ les très petites variations quelconques δy de la fonction y démontre l'exactitude de cette formule, quant à la partie du changement en question qui est du premier ordre de petitesse, c'est-à-dire comparable à $\int_{x=a}^{x=b} \delta y$. Or il n'est pas moins aisé de reconnaître directement que l'annulation du coefficient de δy, dans (6), est néces-

---

([1]) *Voir* la *Partie élémentaire*, p. 251.

saire *tout le long de la courbe cherchée* AMB ; sans quoi l'intégrale correspondante $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ ne serait ni un maximum ni un minimum. En effet, si, entre certaines valeurs de x, ce coefficient différait de zéro, il suffirait d'y prendre les δy, qui sont arbitraires, une première fois, partout de même signe que lui, puis, une seconde fois, partout de signe contraire, pour que le second membre de (6) se composât d'éléments tous positifs dans le premier cas, tous négatifs dans le second, et eût ainsi des valeurs totales de signes *variés,* exprimant à très peu près les changements correspondants de l'intégrale $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$. En conséquence, celle-ci, dans son état actuel, ne se trouverait pas soit constamment plus grande, soit constamment plus petite, que dans *tous* ses états infiniment voisins : elle ne serait ni maximum, ni minimum.

La règle ordinaire des maxima et des minima n'est donc rendue nullement inapplicable par cette circonstance, que la fonction, devenue à la limite une intégrale définie, a besoin, pour y conserver un sens précis malgré l'infinité du nombre de ses variables PM, QN, ... (p. 248), que leur ensemble forme sans cesse une série bien continue et même graduellement variable au passage d'un terme à l'autre. Or une telle continuité apporte, il est bon de le voir, une restriction à l'indépendance des variables PM, QN, ..., supposée absolue dans la règle ordinaire des maxima ou des minima ; et cette restriction a d'ailleurs les plus heureuses conséquences sur les résultats, par la graduelle variation qu'elle y introduit et qui condense en une équation différentielle unique (7) [p. 251] une infinité de conditions de maximum ou de minimum, dont la complexité serait, sans cela, généralement inextricable.

Nous avons vu au n° 440* (p. 379*) comment une condition de continuité analogue s'introduit dans les systèmes d'une infinité d'équations différentielles qu'on peut, à la limite, changer en un nombre fini d'équations aux dérivées partielles.

On conçoit aisément que de pareilles restrictions ou conditions de continuité, *assez larges* pour n'introduire aucune relation précise et pour permettre, ici, *l'annulation des variations partout, sauf dans telle petite région que l'on veut,* n'empêchent pas d'appliquer, à ces cas d'une infinité de variables, une propriété qui, pour le cas d'un nombre *fini* de variables, avait été justement démontrée (t. I, p. 172) *en annulant toutes leurs différentielles, sauf une seule.* Aussi verrons-nous bientôt que la règle usuelle des maxima et minima relatifs

(t. I, p. 180) ne s'applique pas moins que celle des maxima et minima absolus aux intégrales définies, quand les fonctions dont celles-ci dépendent cessent d'être arbitraires (au moins entre certaines limites), pour s'astreindre à vérifier certaines relations.

485*. — **Extension de la méthode au cas d'une intégrale multiple; problème général des surfaces à aire minima, reliant un contour donné.**

Pour montrer comment le calcul des variations, exposé au n° 482 sur une intégrale simple, s'étend de lui-même au cas d'une intégrale multiple et à la recherche de ses maxima ou minima, généralisons la question précédente ([1]), en cessant de nous borner aux surfaces de révolution ; et proposons-nous le problème, célèbre depuis que Lagrange l'a abordé vers 1760, de faire passer par un contour fermé quelconque la surface continue dont l'aire, à l'intérieur de ce contour, est la plus petite possible.

Une telle surface d'aire minimum existe évidemment ou, du moins, il y a toujours une surface, reliant les diverses parties du contour proposé, telle, que nulle autre terminée au même contour n'a une aire moindre ; et il est clair aussi que toute portion de cette surface constitue également la superficie la plus restreinte qui joigne ses bords. Si donc, afin de simplifier et de fixer les idées, nous considérons seulement une de ces parties, choisie, autour d'un point quelconque de la surface, assez petite dans tous les sens pour que chacune de ses ordonnées z, construite par rapport à un système d'axes rectangles des x, y, z et prolongée indéfiniment, ne la rencontre qu'en un seul point, cette partie aura l'aire la moins étendue possible terminée à son contour. D'ailleurs son expression, en appelant $d\sigma$ un élément quelconque de sa projection totale σ sur le plan des xy et $\int_\sigma$ une somme relative à toute cette projection, sera l'intégrale double

$$\int_\sigma \sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma, \tag{12}$$

où p et q désignent les deux dérivées premières en x et y de l'ordonnée z qui est la fonction inconnue, à déterminer, de x et de y.

Or, si l'on allonge (positivement ou négativement) chaque ordonnée z, d'une *variation* arbitraire infiniment petite δz, qui changera,

---

([1]) *Voir* le n° 484 de la *Partie élémentaire,* p. 254.

comme z, avec x et y, les dérivées partielles p et q s'accroîtront des *variations* $\delta p = \frac{d\,\delta z}{dx}$, $\delta q = \frac{d\,\delta z}{dy}$, et l'élément, $\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma$, de la surface aura lui-même pour accroissement ou *pour variation*

$$\begin{cases} \left(\frac{d\sqrt{1+p^2+q^2}}{dp}\delta p + \frac{d\sqrt{1+p^2+q^2}}{dq}\delta q\right) d\sigma \\ \quad = \left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{d\,\delta z}{dx} + \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\frac{d\,\delta z}{dy}\right) d\sigma. \end{cases}$$

Comme, d'ailleurs, $\frac{(-p, -q)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ sont les cosinus des angles α, β faits avec les x et les y positifs par la normale menée à la surface du côté des z positifs, cette variation d'un élément de l'aire pourra s'écrire, un peu plus brièvement, $-\left(\cos\alpha\frac{d\,\delta z}{dx} + \cos\beta\frac{d\,\delta z}{dy}\right) d\sigma$; et l'on aura, pour la variation de l'intégrale (12), la formule

$$(13) \qquad \delta\int_\sigma \sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma = -\int_\sigma \left(\cos\alpha\frac{d\,\delta z}{dx} + \cos\beta\frac{d\,\delta z}{dy}\right) d\sigma.$$

Il manque au second membre, comme plus haut à la dernière partie de (2) [p. 249], pour être une différentielle totale réduite à sa forme la plus simple, de ne contenir explicitement que des variations *arbitraires,* savoir, les diverses valeurs de δz seules. Il y a donc lieu de transformer chaque partie de ce second membre de (13), comme on l'a fait pour le dernier terme de (2), de manière à en éliminer la dérivée partielle de δz qui y figure. A cet effet, on emploiera encore, soit, après avoir remplacé $d\sigma$ par $dx\,dy$, le procédé intuitif suivi (p. 250) pour le dernier terme de (2), soit plus simplement celui de l'intégration par parties, que nous avons vu revenir au même, et qui consistera ici à dédoubler $-(\cos\alpha)\frac{d\,\delta z}{dx}$, $-(\cos\beta)\frac{d\,\delta z}{dy}$ en

$$-\frac{d(\cos\alpha.\delta z)}{dx} + \frac{d\cos\alpha}{dx}\delta z \quad \text{et en} \quad -\frac{d(\cos\beta.\delta z)}{dy} + \frac{d\cos\beta}{dy}\delta z,$$

puis à intégrer séparément, dans chaque cas, les deux termes ainsi obtenus. Or le premier, $-\frac{d(\cos\alpha.\delta z)}{dx}d\sigma$ ou $-\frac{d(\cos\beta.\delta z)}{dy}d\sigma$, se trouve exactement intégrable une fois après la substitution de $dx\,dy$ à $d\sigma$ et donne, par le procédé du n° 313* (p. 92*), une intégrale simple prise tout le long du contour de σ.

Appliquons, pour plus de simplicité, cette méthode de l'intégration

par parties; et comme, sur tout le contour de σ, le terme exactement intégré une fois, savoir, $-(\cos\alpha.\delta z)\,dy$ ou $-(\cos\beta.\delta z)\,dx$, se trouvera nul à raison de la fixité admise, dans l'espace, du bord donné qui s'y projette et pour tout lequel on a ainsi $\delta z = 0$, il ne restera que les deux termes $\int_\sigma \frac{d\cos\alpha}{dx}\delta z\,d\sigma$, $\int_\sigma \frac{d\cos\beta}{dy}\delta z\,d\sigma$. Donc la variation cherchée de (12) sera, sous sa forme définitive où le coefficient de chaque variation arbitraire δz est mis en évidence,

$$(14) \qquad \delta\int_\sigma \sqrt{1+p^2+q^2}\,d\sigma = \int_\sigma \left(\frac{d\cos\alpha}{dx}+\frac{d\cos\beta}{dy}\right)\delta z\,d\sigma.$$

La règle générale des maxima et des minima, ou bien le raisonnement direct exposé au n° 483* (p. 537*), montrent qu'il faut annuler ce coefficient de δz dans tout l'intérieur du champ σ, c'est-à-dire en tous les points de la surface. L'équation *indéfinie* de celle-ci sera donc

$$(15) \qquad \frac{d\cos\alpha}{dx}+\frac{d\cos\beta}{dy} = 0,$$

ou encore, après substitution des valeurs $\frac{(-p,\,-q)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ à $\cos\alpha$, $\cos\beta$, suivie du calcul de leurs dérivées respectives en x et y et de la multiplication du résultat par le facteur $-(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}$, toujours différent de zéro,

$$(16) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

r, s, t désignant, suivant l'usage, les trois dérivées partielles secondes de z, ou les quatre dérivées partielles premières respectives de p et de q en x et y.

Telle est l'équation aux dérivées partielles du second ordre obtenue par Lagrange pour caractériser les surfaces à aire minima. *Elle exprime*, comme l'a remarqué Meusnier, *l'annulation,* partout, *de la courbure moyenne,* c'est-à-dire, *l'égalité, en valeur absolue, avec signes contraires, des deux rayons principaux de courbure de la surface en tous ses points.* Il suffit, pour le reconnaître, de se reporter aux expressions de la somme des deux courbures principales que nous avons obtenues dans le tome Ier (p. 262*), et dont l'une se confond, au signe près, avec le premier membre de (15).

Les considérations exposées au n° 440* (p. 378*) font d'ailleurs comprendre comment, cette équation *indéfinie* (16) aux dérivées partielles étant du *second* ordre en x et y, l'on n'aura, pour déterminer

les deux fonctions arbitraires introduites par son intégration, qu'à lui adjoindre *une* relation *définie* concernant *tout le contour* du *champ* σ, comme sera, par exemple, de s'y donner directement la fonction z elle-même. Or, celle-ci, en effet, s'y trouve bien connue, quand le contour de σ est justement la projection, sur le plan des xy, de la courbe fermée dont la surface minima en question doit relier les diverses parties.

Malheureusement, l'intégration générale de (16) sous forme finie, que Monge, Legendre, etc., ont effectuée au moyen des procédés exposés dans la XLIII[e] Leçon (n[os] 431* et 434*), n'a pu aboutir qu'à la manière de celle de l'équation très simple $r+t=0$ par des termes empruntés à l'expression symbolique $f\left(y \pm x\sqrt{-1}\right)$ [p. 368*]. Son résultat se trouve, de même, compliqué d'imaginaires dont l'élimination n'est possible qu'après spécification de la forme des fonctions arbitraires ; ce qui contribue à en rendre l'usage difficile, vu surtout la condition au contour (où l'on doit se donner à volonté z), qui, même avec des intégrales indéfinies beaucoup plus simples, serait encore d'une vérification embarrassante (1).

Aussi me bornerai-je à signaler les deux cas particuliers les plus simples de surfaces minima, cas d'ailleurs évidents tous les deux, du moins après la détermination (p. 252) de la courbe plane qui engendre la surface de révolution minimum.

Le premier est le cas où l'on se donne un contour situé tout entier dans un même plan et où la surface, pouvant avoir par suite ses deux courbures principales nulles, se réduit à la partie de ce plan comprise à l'intérieur du contour.

Le deuxième est celui où le contour proposé se compose de deux cercles parallèles dont les centres soient sur un axe perpendiculaire à leurs plans ; cas où, le contour donné étant une figure de révolution autour de cet axe, la surface l'est elle-même, par raison de symétrie. Choisissons-le pour axe des y, et prenons un plan méridien pour plan des xy. Alors les deux rayons principaux de courbure égaux et contraires seront évidemment, pour un point quelconque de la généra-

(1) On conçoit, du reste, aisément que l'équation (16) ne comporte pas plus d'intégrale générale réelle *en termes finis* que l'équation même $r+t=0$; car celle-ci n'en est qu'un cas particulier, savoir, le cas limite qui se produit quand la surface minima s'écarte peu d'un plan et a par rapport à ce plan, supposé choisi pour celui des xy, des pentes $\sqrt{p^2+q^2}$ infiniment faibles, rendant négligeables dans (16), *à côté* des deux termes r, t, les trois autres $q^2 r$, $-2pqs$, $p^2 t$, affectés des très petits coefficients q^2, $-2pq$, p^2.

trice comprise dans ce plan, l'un, le rayon même de courbure de la génératrice, exprimé par la valeur absolue de $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\pm y''}$ si l'équation inconnue de cette courbe est supposée mise sous la forme $y=f(x)$, l'autre, le segment de normale compris entre le même point (x, y) et l'axe de révolution ou des y, segment égal en valeur absolue à $\frac{x\sqrt{1+y'^2}}{\mp y'}$, car sa projection sur l'axe des x est l'abscisse positive x et se fait sous l'angle aigu ayant pour tangente $-\frac{1}{y'}$ ou pour cosinus $\frac{\mp y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, le signe supérieur correspondant au cas de y' négatif et le signe inférieur au cas de y' positif. Comme, d'ailleurs, les sens de ces deux rayons principaux se trouvent opposés, la courbe $y=f(x)$ tourne sa concavité vers les x positifs, et les valeurs positives de y' sont visiblement décroissantes quand x croît, les valeurs négatives visiblement croissantes; en sorte que y' et y'' ont signes contraires (ce que nous avons indiqué, sur les formules des deux rayons de courbures, par les doubles signes alternés $\pm$ et $\mp$ mis devant les dérivées y'' et y' pour exprimer leurs valeurs absolues). Il vient donc, en égalant à zéro l'excédent, sur la seconde courbure, de la première, que nous compterons positivement, et en multipliant par $\pm x\,dx$,

$$(17)\qquad x\frac{y''\,dx}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}dx=0,\qquad\text{ou}\qquad x\,d\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}+\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}dx=0.$$

On est bien, ainsi, conduit à poser $d\left(\frac{xy'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$ ou $d\left(x\frac{dy}{ds}\right)=0$, c'est-à-dire, précisément, l'équation différentielle du second ordre déjà obtenue au n° 484 (p. 253) comme caractérisant la courbe génératrice de la surface minima de révolution. En conséquence, la chaînette, que nous avons reconnu au même numéro être cette courbe, a son rayon de courbure partout égal et contraire à sa normale, prolongée jusqu'à la perpendiculaire à son axe de symétrie, dite sa *base* ou sa *directrice,* et dont les distances à la courbe, mesurées parallèlement à l'axe de symétrie, s'expriment par le cosinus hyperbolique des distances relatives de la courbe au même axe.

488*. — Maxima ou minima des intégrales à champ d'intégration variable, et qui dépendent de fonctions variables aussi aux limites de ce champ.

La variation de l'intégrale proposée $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ s'accroît

naturellement de quelques termes nouveaux, quand la courbe AMB (p. 248) représentative de la fonction *déformable* y, a ses extrémités A, B non plus fixes, mais mobiles soit arbitrairement, soit d'après des conditions désignées, comme, par exemple, le long de deux certaines *directrices* EE′, FF′ (*fig.* 50). Alors, en effet, les transformations ou variations $\delta y = MM'$ de la fonction, corrélatives au changement de AMB en A′M′B′, entraînent en général un déplacement des limites Oα, Oβ, que nous appellerons x_0 et x_1, au lieu de a et b, ici où elles sont variables et deviennent Oα', Oβ'.

Nous emploierons, en général, l'indice 0 pour désigner les valeurs prises par les variables ou par les fonctions à la limite inférieure de l'intégrale, c'est-à-dire en A, et l'indice 1 pour désigner leurs valeurs à la limite supérieure, c'est-à-dire en B.

D'une part, il y aura ainsi accroissement algébrique des limites, savoir, pour l'une, x_0, la variation $\delta x_0 = \alpha\alpha'$, pour l'autre, x_1, la variation analogue $\delta x_1 = \beta\beta'$; et, en conséquence, un élément correspon-

Fig. 50.

dant au champ *acquis* δx_1, savoir, très sensiblement,

(20) $$f(x_1, y_1, y'_1)\,\delta x_1,$$

sera gagné par l'intégrale proposée $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx$, tandis que l'élément

(21) $$f(x_0, y_0, y'_0)\,\delta x_0,$$

qui correspondait au champ δx_0, sera perdu par elle.

D'autre part, entre les primitives limites, les éléments de l'intégrale les plus voisins de celles-ci varieront incomparablement plus que dans

le cas où les extrémités A, B étaient fixes; car l'allongement δy de chaque ordonnée aura cessé d'être nul pour les abscisses extrêmes x_0, x_1. A la limite $x = x_0 = \mathrm{O}\alpha$, cet allongement AI, très sensiblement pareil à l'accroissement analogue voisin I'A', sera l'excès, JA' — JI', de la *variation totale* $\mathrm{JA}' = \alpha'\mathrm{A}' - \alpha\mathrm{A}$, que j'appellerai δy_0, de la *première* ordonnée $y_0 = \alpha\mathrm{A}$ (devenue $\alpha'\mathrm{A}'$) figurant dans l'intégrale, sur la *différentielle* correspondante $\mathrm{JI}' = (\tang \mathrm{JAI}') \times \alpha\alpha' = y'_0\,\delta x_0$ de la même ordonnée. On aura donc

$$(22) \qquad \delta y = \delta y_0 - y'_0\,\delta x_0 \qquad (\text{pour } x = x_0);$$

et, à la limite supérieure $x_1 = \mathrm{O}\beta$, on trouvera de même, pour l'allongement δy, BK ou $\mathrm{K}'\mathrm{B}' = \mathrm{LB}' - \mathrm{LK}'$, c'est-à-dire

$$(23) \qquad \delta y = \delta y_1 - y'_1\,\delta x_1 \qquad (\text{pour } x = x_1),$$

δy_1 désignant pareillement la *variation totale* $\beta'\mathrm{B}' - \beta\mathrm{B}$ de la *dernière* ordonnée, y_1, de la courbe considérée dans ses divers états successifs.

Par suite, attribuons à l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\,dx$ les limites fixes $\mathrm{O}\alpha$ et $\mathrm{O}\beta$, sauf à lui ajouter ensuite la différence de l'élément gagné (20) à l'élément perdu (21); et, comme cette intégrale devra être prise, dans son nouvel état, le long de l'arc IK, au lieu de l'être le long de AB, sa variation se calculera de la même manière qu'au n° 482 dans l'hypothèse d'extrémités A, B fixes, c'est-à-dire, d'abord, au moyen de la formule (2) [p. 249]. Mais quand, par le raisonnement direct exposé à la page 250 ou en recourant à l'intégration par parties employée ensuite, on transformera le dernier terme de (2), afin d'en éliminer la variation $\delta y'$ dont le produit par dx n'est pas autre chose que la différentielle essentiellement dépendante ou non arbitraire $d\,\delta y$, le terme aux limites obtenu $\left(\frac{df}{dy'}\,\delta y\right)_{x=x_0}^{x=x_1}$, le premier du second membre de (5), ne sera plus nul; car le facteur δy y aura les deux valeurs respectives (23) et (22), au lieu de zéro. Ce double terme se trouvera donc en plus, dans le second membre de (6).

En y joignant l'excédent de (20) sur (21), puis groupant les parties affectées soit de δx_1, soit de δx_0, et affectant les fonctions $\frac{df}{dy'}$, $f - y'\,\frac{df}{dy'}$ des deux accents 0 ou 1 pour signifier qu'on les prend à la limite inférieure ou à la limite supérieure, il viendra, comme expres-

sion à la fois simple et explicite de la variation complète de l'intégrale proposée,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}\delta\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,y')\,dx = &\left[\left(f-y'\frac{df}{dy'}\right)_1\delta x_1+\left(\frac{df}{dy'}\right)_1\delta y_1\right]\\ &-\left[\left(f-y'\frac{df}{dy'}\right)_0\delta x_0+\left(\frac{df}{dy'}\right)_0\delta y_0\right]\\ &+\int_{x=x_0}^{x=x_1}\left(\frac{df}{dy}\,dx-d\,\frac{df}{dy'}\right)\delta y.\end{aligned}\right.$$

Quand on demande un minimum ou maximum *aussi absolu que possible,* c'est-à-dire quand la valeur de l'intégrale doit, prise le long de AMB, être ou plus petite, ou plus grande que prise le long de *toute autre courbe* A′M′B′ *du plan,* δx_0 et δy_0, δx_1 et δy_1 ne sont pas moins arbitraires que ne l'est δy dans l'intervalle des limites; et l'on peut aussi bien annuler δy partout *sauf dans le voisinage de chaque limite,* de manière à réduire très sensiblement le second membre de (24) aux termes en δx_0, δy_0, δx_1 et δy_1, qu'annuler, au contraire, ces quatre variations et réduire le second membre à son dernier terme ou même aux éléments de ce dernier terme compris dans telle petite partie que l'on veut du champ de l'intégrale. Ainsi, tout le second membre de (24) est assimilable à la différentielle totale d'une fonction de variables *indépendantes.* Et les solutions maxima ou minima cherchées en annuleront *séparément* chaque partie; sans quoi les éléments différents de zéro suffiraient, en y affectant de signes convenables les variations δx_0, δx_1, δy_0, δy_1, δy, pour faire, à volonté, tantôt croître et tantôt décroître l'intégrale à partir de sa valeur actuelle.

On aura donc encore, comme dans le cas d'extrémités A, B fixes, l'équation différentielle ou indéfinie $\frac{df}{dy}dx - d\frac{df}{dy'} = 0$; mais les deux constantes introduites par l'intégration, au lieu de se calculer par les conditions que, pour deux valeurs données $x = a$ et $x = b$, ou $x = x_0$ et $x = x_1$, la fonction y prenne deux valeurs connues $y_0 = \alpha A$ et $y_1 = \beta B$, se détermineront en annulant dans (24) les coefficients de δx_0, δy_0, δx_1, δy_1, c'est-à-dire en choisissant pour les quatre constantes x_0, y_0, x_1, y_1 celles qui vérifieront les équations ainsi obtenues,

$$(25)\quad \left(f-y'\frac{df}{dy'}\right)_0=0,\quad \left(\frac{df}{dy'}\right)_0=0,\quad \left(f-y'\frac{df}{dy'}\right)_1=0,\quad \left(\frac{df}{dy'}\right)_1=0.$$

Abstraction faite du cas singulier où la pente y' serait infinie à une limite, ces conditions expriment évidemment que la fonction f et sa

dérivée partielle relative à y' devront s'annuler à chaque bout de la courbe.

Si, au contraire, les extrémités A, B, ou seulement l'une d'elles, cessaient d'être soit complètement fixées, soit complètement libres, pour se trouver, par exemple, sur certaines courbes EE', FF' du plan des xy, l'équation de ces courbes, de la forme $\Phi(x_0, y_0) = 0$ ou $\Phi(x_1, y_1) = 0$, donnerait évidemment $\delta\Phi = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{d\Phi}{dx_0}\delta x_0 + \frac{d\Phi}{dy_0}\delta y_0 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\Phi}{dx_1}\delta x_1 + \frac{d\Phi}{dy_1}\delta y_1 = 0;$$

et l'on voit que l'une des variations δx_0, δy_0, ou δx_1, δy_1, savoir, par exemple, δy_0 ou δy_1, cesserait d'être arbitraire, pour devenir fonction de l'autre. Après avoir ainsi éliminé δy_0 ou δy_1, on n'aurait à annuler que le coefficient total des variations restées arbitraires; ce qui donnerait, en x_0, x_1, y_0, y_1, un système insuffisant d'équations, mais exactement complété par les relations $\Phi = 0$ admises.

Et si d'autres relations comme celles dont il a été parlé à un numéro précédent (p. 256), telles que la constance d'une certaine intégrale $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$, s'adjoignaient aux conditions de liberté ou d'assujettissement concernant les limites, le maximum ou minimum cherché, devenu dès lors ou relatif, ou *plus relatif* encore qu'il n'était déjà, permettrait de nouvelles éliminations de variations désormais dépendantes, avec suppression de tout autant d'équations de maximum ou de minimum dont tiendraient lieu ces relations mêmes. En effectuant d'ailleurs les éliminations, ou du moins les dernières, par la méthode des facteurs indéterminés (mais constants) λ, μ, ..., on serait conduit, si, par exemple, l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ devait garder une valeur donnée K, à considérer la somme

$$\int_{x_0}^{x_1} [f(x, y, y') + \lambda F(x, y, y')]\,dx$$

et à annuler sa variation, dont la formule, sauf la substitution de $f + \lambda F$ à f, serait toute pareille à (24) et se traiterait de même.

Enfin, il peut arriver que la fonction sous le signe $\int$ dépende aussi de certaines valeurs *particulières*, changeantes, des variables $x, y, \ldots$, comme, par exemple, de la limite inférieure x_0, ou qu'elle soit de la forme $f(x, y, y', x_0)$. Il est clair que chaque élément $f\,dx$ de l'intégrale a alors sa variation propre accrue de $\left(\frac{df}{dx_0}\delta x_0\right)dx$;

en sorte que le second membre de (24) comprend en plus le terme

$$(26)\qquad \left(\int_{x_0}^{x_1} \frac{df}{dx_0}\,dx\right)\delta x_0,$$

qui s'y joint à celui où figurait déjà δx_0 et change, par exemple, la première équation (25) en celle-ci,

$$(27)\qquad \left(f - y'\frac{df}{dy'}\right)_0 - \int_{x_0}^{x_1} \frac{df}{dx_0}\,dx = 0.$$

Il resterait maintenant à donner des applications de ces principes. Mais, pour les plus intéressantes d'entre elles, où le rôle de la variable indépendante n'est, naturellement, pas plus dévolu à x qu'à y, les formules gagnent sous les rapports tant de la symétrie que de la facilité d'interprétation géométrique à être obtenues et présentées d'une autre manière, un peu moins simple théoriquement, à laquelle nous nous bornerons.

489*. — Autre méthode, impliquant le choix de variables indépendantes qui assurent l'invariabilité du champ d'intégration; application à l'intégrale $\int F(x, y, z)\,ds$ prise le long d'une courbe.

La méthode dont il s'agit, la plus élégante quand l'intégration s'étend à tout un espace continu comme ligne, surface ou solide, sans qu'aucune des coordonnées paraisse désignée de préférence aux autres pour les rôles de variable indépendante ou de fonction, se rattache au procédé de différentiation des intégrales qui consiste (p. 159) à considérer celles-ci comme formées sans cesse d'un même nombre d'éléments et, pour ainsi dire, des mêmes éléments, mais graduellement transformables *par variation et déplacement de leur champ* non moins que par changement de la fonction sous les signes $\int$. On a vu (p. 114*) que cela revient, au fond, à introduire de nouvelles variables d'intégration, généralement différentes de coordonnées géométriques *actuelles* comme x, y, z, et à valeurs limites toujours les mêmes quand l'intégrale change.

Si l'on étudie, par exemple, une intégrale se rapportant soit à une courbe, soit à une surface, soit à un volume qui se déforment, et que ses éléments aient leurs champs respectifs bornés par divers points de ces figures, on pourra toujours attribuer son changement, en tant qu'il dépendra de circonstances géométriques, à des déplacements continus des points dont il s'agit. Alors, on adoptera, par exemple, comme variables indépendantes propres à définir ceux-ci et à distin-

guer, avec eux, les uns des autres, les espaces élémentaires intercalés, tout en échappant elles-mêmes aux transformations, soit les trois coordonnées *primitives* s'il est question d'un volume, soit une ou deux d'entre elles si la figure se réduit à une ligne ou à une surface, ces coordonnées *primitives* étant celles des points, dans un certain état (pris comme *type* ou comme *repère*) du *lieu* géométrique qu'ils jalonnent ensemble. On concevra, d'ordinaire, choisi pour cet état *primitif*, celui même qu'on cherche, c'est-à-dire qui correspond au maximum ou minimum proposé, et les variables propres à définir un champ d'intégration fixe seront ainsi, en définitive, des coordonnées *actuelles* de la figure que l'on veut finalement considérer, mais actuelles *pour elle seule* et non pour ses transformées successives.

Il est clair d'ailleurs que l'on pourra substituer à ces coordonnées d'autres variables corrélatives, en même nombre et plus commodes ; que, par exemple, s'il s'agit d'une courbe plane ou gauche, son arc, compté à partir de sa première extrémité et dans l'état *primitif*, tiendra lieu avantageusement de l'abscisse x relative au même état et assurera aux formules plus de symétrie, en laissant à x un rôle pareil à ceux de y et z. En d'autres termes, les variables indépendantes choisies seront des quantités propres à caractériser les divers points de la figure dans son état primitif et pourront, au sens large du mot, s'appeler des *coordonnées* de cette figure; mais elles différeront généralement de celles qui se prennent par rapport à des axes rectilignes.

Dès lors, les trois coordonnées x, y, z seront, au même titre, pendant les déformations de la figure, des fonctions pourvues tout à la fois : 1° de différentielles dx, dy, dz relatives à chaque variable d'intégration, différentielles, pour ainsi dire *actuelles,* représentant à tout instant, dans la figure *telle qu'elle est alors,* les accroissements élémentaires de x, y, z le long du chemin où cette variable change seule, et aussi, 2°, de variations δx, δy, δz, accroissements corrélatifs à la *déformation élémentaire* de la figure et qu'on peut regarder encore comme des différentielles partielles, mais relatives à un paramètre tout différent des variables d'intégration, tel qu'est, par exemple, le temps, si les déformations sont supposées se succéder pendant que la durée s'écoule.

D'ailleurs, lorsque les suites de points (x, y, z) ne se trouvent astreintes, par les conditions du problème, qu'à la loi de continuité, les coordonnées x, y, z constituent évidemment trois fonctions *arbitraires* des variables d'intégration, et il en est de même de leurs variations, ou des déplacements élémentaires δx, δy, δz, du moins dans

leurs rapports mutuels, c'est-à-dire abstraction faite de leur infinie petitesse.

Cela posé, chaque élément de l'intégrale dépendra, quant à son champ, des distances mutuelles des points mobiles (x, y, z) qui en marqueront les sommets. Si, de plus, la fonction qui y multiplie ce champ ne varie qu'avec des circonstances géométriques, ou réductibles à des conditions de situation (x, y, z), comme, par exemple, avec les coordonnées d'un des sommets du champ élémentaire dont il s'agit, la variation de l'intégrale, évaluée par la même méthode des numéros précédents que dans les cas d'une fonction inconnue unique, admettra évidemment une expression linéaire par rapport aux variations δx, δy, δz des coordonnées de tous les sommets infiniment voisins ainsi considérés. On devra donc, quand le maximum ou le minimum cherchés seront absolus, annuler les coefficients de toutes ces variations ; ce qui donnera, en particulier, autant d'équations indéfinies (contenant x, y, z et leurs différentielles ou dérivées premières, secondes, etc.) qu'il y a de fonctions inconnues x, y, z des variables indépendantes adoptées.

Mais ces équations ne sauraient être toutes distinctes. En effet, les variables indépendantes dont il s'agit, assujetties uniquement à garder leurs valeurs ou systèmes de valeurs *aux limites* de l'intégrale, et dès lors susceptibles d'être remplacées, dans leurs rôles, par telles qu'on voudra de leurs fonctions, sans modifier en rien l'expression de l'intégrale, sont, au fond, très indéterminées; et les équations fournies par l'annulation des coefficients de δx, δy, δz ne peuvent, par suite, définir x, y, z en tant que fonctions de variables si peu spécifiées, mais uniquement quant à leurs relations mutuelles cherchées, indépendantes du choix de ces variables. Donc les équations indéfinies qu'on obtiendra se trouveront assez peu distinctes, pour qu'on puisse y en joindre d'autres en nombre égal à celui des variables indépendantes et destinées à définir presque arbitrairement celles-ci dans leurs rapports avec x, y, z.

Fixons les idées en nous bornant au cas d'une seule variable indépendante, c'est-à-dire à celui d'une intégrale prise le long d'un arc $\int ds$. Généralisons, par exemple, le problème du n° 484 (p. 252), où l'expression considérée revenait à $\int x\, ds$, et, dans ce but, remplaçons l'abscisse x par une fonction continue quelconque $F(x, y, z)$ des coordonnées de chaque élément de l'arc $\int ds$, devenu lui-même quelconque, c'est-à-dire gauche. Nous aurons donc à former la variation de l'intégrale ainsi obtenue $\int F(x, y, z)\, ds$, dont le champ $\int ds$ comprendra toujours un même nombre de parties ds, droites de jonc-

tion de sommets successifs infiniment voisins (x, y, z) formant une file continue. Ceux-ci, tous mobiles, auront leurs déplacements δx, δy, δz astreints uniquement à varier d'une manière graduelle le long de la file, dont on pourra, afin d'introduire une variable d'intégration σ à limites fixes, définir ou distinguer les sommets les uns des autres de la manière suivante. On imaginera un premier état de la courbe $\int ds$ où ils soient tous équidistants, et on les caractérisera désormais par des numéros d'ordre égaux à leurs distances mêmes, que j'appellerai σ, *mesurées pour cet état* et le long de la file ou de la courbe, à partir d'un premier sommet arbitraire pris comme origine. Il est clair que les coordonnées x, y, z seront, *après des déformations quelconques*, pour les divers points de la file, trois fonctions continues arbitraires de leur numéro d'ordre σ, et que, par suite, leurs changements élémentaires δx, δy, δz égaleront, à un facteur infiniment petit près, des fonctions non moins arbitraires de σ.

De ces fonctions dépendra immédiatement, pour chaque élément $F(x, y, z)\, ds$ de l'intégrale, le changement

$$\delta F = \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z \tag{28}$$

de son premier facteur. Quant au second facteur, ds, distance des deux sommets, à numéros σ, $\sigma + d\sigma$, dont les coordonnées sont présentement

$$x,\quad y,\quad z \qquad \text{et} \qquad x + dx,\quad y + dy,\quad z + dz,$$

pour devenir dans un instant

$$x + \delta x,\quad y + \delta y,\quad z + \delta z$$

et

$$(x + \delta x) + d(x + \delta x),\quad (y + \delta y) + d(y + \delta y),\quad (z + \delta z) + d(z + \delta z),$$

sa valeur actuelle résulte de l'équation

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{29}$$

et, ensuite, son accroissement ou *variation* $\delta\, ds$, de l'équation analogue

$$(ds + \delta\, ds)^2 = (dx + d\,\delta x)^2 + (dy + d\,\delta y)^2 + (dz + d\,\delta z)^2,$$

dont la différence à (29), qui revient à différentier celle-ci en δ, donne, sauf erreur relative évidemment négligeable, après division finale par $2\,ds$,

$$\delta\, ds = \frac{dx}{ds}\, d\,\delta x + \frac{dy}{ds}\, d\,\delta y + \frac{dz}{ds}\, d\,\delta z. \tag{30}$$

Chaque élément F ds de l'intégrale, devenu $(F + \delta F)(ds + \delta\, ds)$, aura ainsi grandi de $ds\,\delta F + F\,\delta\, ds$ (à un terme près d'ordre supérieur), et la variation de l'intégrale tout entière sera $\int ds\,\delta F + \int F\,\delta\,ds$. On aura donc, vu les valeurs (28) et (30) de δF et de $\delta\,ds$,

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\int F(x, y, z)\,ds = &\int\left(\frac{dF}{dx}\,ds\,\delta x + \frac{dF}{dy}\,ds\,\delta y + \frac{dF}{dz}\,ds\,\delta z\right)\\ &+\int F\,\frac{dx}{ds}\,d\delta x + \int F\,\frac{dy}{ds}\,d\delta y + \int F\,\frac{dz}{ds}\,d\delta z. \end{aligned}\right.$$

Intégrons, par parties, les trois derniers termes, afin d'éliminer, comme il a été indiqué (p. 250), des différentielles *non arbitraires* de variations; et, en affectant encore des indices 0, 1 les résultats que l'on devra prendre à la limite inférieure σ_0 ou à la limite supérieure σ_1, il viendra la formule définitive

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\int F(x,y,z)\,ds = \quad & F_1\left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z\right)_1\\ &- F_0\left(\frac{dx}{ds}\,\delta x + \frac{dy}{ds}\,\delta y + \frac{dz}{ds}\,\delta z\right)_0\\ &-\int\left[d\left(F\,\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dF}{dx}\,ds\right]\delta x\\ &-\int\left[d\left(F\,\frac{dy}{ds}\right) - \frac{dF}{dy}\,ds\right]\delta y\\ &-\int\left[d\left(F\,\frac{dz}{ds}\right) - \frac{dF}{dz}\,ds\right]\delta z. \end{aligned}\right.$$

Si donc il s'agit de considérer la courbe au moment où l'intégrale $\int F\,ds$ est un maximum ou minimum absolu, et que l'on se borne d'abord, pour simplifier, au cas d'extrémités (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) fixes, de manière à avoir $\delta(x_0, y_0, z_0) = 0$, $\delta(x_1, y_1, z_1) = 0$, ou à réduire le second membre de (32) à ses trois derniers termes, l'annulation obligée des coefficients de δx, δy, δz donnera les *trois* équations indéfinies

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} d\left(F\,\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dF}{dx}\,ds = 0,\\ d\left(F\,\frac{dy}{ds}\right) - \frac{dF}{dy}\,ds = 0,\\ d\left(F\,\frac{dz}{ds}\right) - \frac{dF}{dz}\,ds = 0. \end{aligned}\right.$$

Cependant, l'état primitif dans lequel a été choisie la variable indépendante σ se trouvant arbitraire, il est impossible, comme nous l'avions prévu (p. 549*), que ces trois équations relient à σ, d'une ma-

nière précise, les fonctions x, y, z; ce qu'elles feraient, à quelques constantes près introduites par leur intégration, si elles étaient toutes les trois distinctes. Donc elles ne le sont pas. Et, en effet, après avoir substitué aux trois termes $d\left[\mathrm{F}\frac{d(x,y,z)}{ds}\right]$ leurs développements $\frac{d(x,y,z)}{ds}d\mathrm{F}+\mathrm{F}\,d\frac{d(x,y,z)}{ds}$, multiplions respectivement ces trois équations par $\frac{1}{\mathrm{F}}\frac{d(x,y,z)}{ds}$, puis ajoutons les résultats : il viendra, vu (29), l'*identité*

$$\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds}=0, \tag{34}$$

à laquelle conduit la différentiation de la somme

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2,$$

constamment égale à 1 quelle que soit la variable σ.

Ainsi deux quelconques des trois équations (33) entraînent la troisième; ce qui permettra de choisir, dans chaque cas, les deux plus faciles à intégrer. Si, par exemple, $z=0$ et que F dépende seulement de x, comme dans le problème du n° 484 (p. 252) où $\mathrm{F}=x$, l'équation (dès lors unique) à considérer sera la seconde (33), réduite à $d\left(\mathrm{F}\frac{dy}{ds}\right)=0$ et qui donne $\mathrm{F}\frac{dy}{ds}=$ une const. c, ou $\frac{\mathrm{F}^2y'^2}{1+y'^2}=c^2$ conformément à (9) [p. 253].

Dans tous les cas, les deux équations du second ordre (33) choisies, où σ ne figure pas explicitement et d'où ds s'élimine par (29), constitueront bien, entre x, y et z, les deux relations propres à définir la courbe; car les quatre constantes arbitraires que leur intégration introduira se détermineront, si x, par exemple, y est pris comme variable, en exprimant que, pour $x=x_0$ et pour $x=x_1$, les deux fonctions y et z de x doivent recevoir les valeurs respectives données $y=y_0$, $z=z_0$, et $y=y_1$, $z=z_1$.

Pour plus de symétrie, on pourra encore garder la variable indépendante σ choisie en premier lieu, mais en imaginant que l'état *primitif* de la courbe dans lequel σ désignait son arc s soit justement l'état cherché. Cela permettra de faire $\sigma=s$ et aussi, pour caractériser un tel choix en reliant σ à x, y, z, de joindre la troisième équation

$$x'^2+y'^2+z'^2=1$$

à deux quelconques des précédentes (33) où $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ s'écriront dès lors x', y', z'.

Le cas de maximum ou de minimum le plus simple que l'on puisse avoir à traiter, pour une intégrale de la forme $\int F(x, y, z)\,ds$, s'obtient en posant $F = 1$, ou en cherchant le trajet minimum $\int ds$ entre deux points donnés. Les équations (33) s'y trouvent réduites à

$$d\frac{dx}{ds} = 0, \quad d\frac{dy}{ds} = 0, \quad d\frac{dz}{ds} = 0, \quad \text{ou à} \quad dx' = 0, \quad dy' = 0, \quad dz' = 0,$$

et conduisent immédiatement à prendre des valeurs constantes pour les trois cosinus directeurs x', y', z' de la tangente à la ligne cherchée. Celle-ci n'est donc autre que la droite joignant les deux points, comme on le savait.

490*. — Conditions de maximum ou de minimum relatives aux limites, pour des intégrales prises le long de lignes ayant leurs extrémités mobiles sur des courbes ou des surfaces données.

Afin de donner des exemples de maximum ou minimum d'intégrales à limites variables, rendons maintenant mobiles les deux extrémités (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) de la courbe $\int ds$ le long de laquelle nous prenons la somme $\int F(x, y, z)\,ds$, mais en astreignant chacune d'elles à se trouver ou sur une ligne donnée, ou sur une surface donnée, c'est-à-dire à vérifier les relations, de la forme $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$ ou $\varphi(x_1, y_1, z_1) = 0$, qui définissent ces figures, et qui se réduisent à une seule dans le cas d'une surface, mais sont au nombre de deux dans celui d'une courbe.

Nous aurons toujours les équations indéfinies (33). Mais les conditions aux limites ne consisteront plus à se donner x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1, c'est-à-dire à annuler leurs six variations. Car elles obligeront seulement les trois premières de celles-ci à vérifier, pour chaque équation correspondante assignée $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$, la relation $\delta\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{d\varphi}{dx_0}\,\delta x_0 + \frac{d\varphi}{dy_0}\,\delta y_0 + \frac{d\varphi}{dz_0}\,\delta z_0 = 0,$$

et, les trois dernières, à vérifier une ou deux équations linéaires analogues en δx_1, δy_1, δz_1; ce qui laissera subsister autant de variations arbitraires, à chaque extrémité, qu'il manquera d'équations pour la fixer elle-même pleinement. Donc l'annulation, dans le second membre de (32), du coefficient total de chaque variation indépendante, après

élimination des autres, complétera le nombre des relations nécessaires à cet effet.

On voit, avant toute élimination, que les deux premiers termes triples du second membre de (32) seront séparément nuls, chacun d'eux n'étant relatif qu'à une extrémité ; et comme, généralement, le facteur F y différera de zéro, les conditions aux limites deviendront, en supposant d'ailleurs l'arc s de la courbe cherchée pris pour variable indépendante,

$$(35)\qquad x'_0\,\delta x_0 + y'_0\,\delta y_0 + z'_0\,\delta z_0 = 0, \qquad x'_1\,\delta x_1 + y'_1\,\delta y_1 + z'_1\,\delta z_1 = 0.$$

Or $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$, ou $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$, sont les trois projections, sur les axes, de tout déplacement élémentaire, qu'on peut appeler δs_0 ou δs_1, de l'extrémité (x_0, y_0, z_0) ou (x_1, y_1, z_1) sur la figure où elle est mobile à partir de sa position cherchée ; et la somme respective de leurs produits par les trois cosinus directeurs, x'_0, y'_0, z'_0, ou x'_1, y'_1, z'_1, de la première ou dernière tangente à la courbe, exprime la projection, sur cette tangente, du déplacement δs_0 ou δs_1, projection nulle en vertu de (35), ou impliquant la perpendicularité, à la tangente, de tous les déplacements respectifs δs_0 ou δs_1 possibles.

Donc, *la courbe $\int ds$, qui rend maxima ou minima l'intégrale $\int F(x, y, z)\,ds$, se trouve, en chacun de ses deux points extrêmes, normale à la figure (ligne ou surface) sur laquelle ce point est astreint à se mouvoir*. On le savait déjà, par le Calcul différentiel (t. I, pp. 166 et 177), dans le cas particulier de la ligne $\int ds$ minima.

Cette condition serait profondément modifiée pour une extrémité, (x_0, y_0, z_0) par exemple, si chaque élément $F(x, y, z)\,ds$ de l'intégrale devenait fonction des coordonnées x_0, y_0, z_0 de cette extrémité mobile et, par suite, fournissait dans le second membre de (32) un élément au terme triple affecté des variations de ces coordonnées, conformément à l'indication donnée plus haut (p. 547*), lors de l'établissement de la formule (27) consacrée au cas le plus simple offrant cette particularité remarquable.

Supposons, pour fixer les idées, que l'intégrale soit de la forme

$$(36)\qquad \int F(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\,ds,$$

et que, par suite, la fonction sous le signe $\int$, dépendant seulement des différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, ait ses dérivées en x_0, y_0, z_0 égales à $-\dfrac{dF}{d(x, y, z)}$. La variation de chaque élément $F\,ds$ s'accroîtra évidemment de

$$-\frac{dF}{dx}\,\delta x_0\,ds - \frac{dF}{dy}\,\delta y_0\,ds - \frac{dF}{dz}\,\delta z_0\,ds$$

et, par suite, celle de l'intégrale tout entière, de

$$-\left(\int \frac{dF}{dx}\, ds\right)\delta x_0 - \left(\int \frac{dF}{dy}\, ds\right)\delta y_0 - \left(\int \frac{dF}{dz}\, ds\right)\delta z_0.$$

Donc, dans le second membre de (32), le terme total en δx_0, δy_0, δz_0 sera

$$(37)\quad -\left(F_0 x'_0 + \int \frac{dF}{dx}\, ds\right)\delta x_0 - \left(F_0 y'_0 + \int \frac{dF}{dy}\, ds\right)\delta y_0 - \left(F_0 z'_0 + \int \frac{dF}{dz}\, ds\right)\delta z_0.$$

Or les équations (33), que l'on peut écrire

$$(38)\quad \frac{dF}{dx}\, ds = d(F x'), \qquad \frac{dF}{dy}\, ds = d(F y'), \qquad \frac{dF}{dz}\, ds = d(F z'),$$

intégrées d'une limite à l'autre, donnent

$$(39)\quad \begin{cases} \int \frac{dF}{dx}\, ds = F_1 x'_1 - F_0 x'_0, \\ \int \frac{dF}{dy}\, ds = F_1 y'_1 - F_0 y'_0, \\ \int \frac{dF}{dz}\, ds = F_1 z'_1 - F_0 z'_0, \end{cases}$$

et transforment finalement la condition fournie par l'annulation de (37) en celle-ci,

$$(40)\quad - F_1 (x'_1\, \delta x_0 + y'_1\, \delta y_0 + z'_1\, \delta z_0) = 0.$$

Puisqu'on admet que F_1 diffère de zéro, il vient donc, à la place de la première (35),

$$(41)\quad x'_1\, \delta x_0 + y'_1\, \delta y_0 + z'_1\, \delta z_0 = 0;$$

et tout déplacement élémentaire δs_0 de la *première* extrémité a sa projection nulle sur la *dernière* tangente (à cosinus directeurs x'_1, y'_1, z'_1) de la ligne qu'il s'agit de construire. Ainsi, *le maximum ou le minimum de l'intégrale exigent que la courbe soit, à son extrémité* (x_1, y_1, z_1) *dont les coordonnées ne paraissent pas dans l'élément* $F\, ds$, *tout à la fois normale à la figure qui contient cette extrémité, et parallèle à une normale menée, par l'autre extrémité, à la figure sur laquelle se meut celle-ci.*

De là résulte, entre les deux points de départ et d'arrivée de la courbe, une corrélation (exprimée par le parallélisme de deux normales respectives aux deux figures) qui trouve à s'appliquer, notamment, dans le problème de la *brachistochrone* reliant deux courbes

ou surfaces données. Ce problème, dont on verra, pour le cas d'extrémités fixes, la solution au n° 493 (p. 259) par une méthode plus élémentaire que le calcul des variations, consiste à rechercher le minimum de l'intégrale $\int F\,ds$, quand $F = \frac{1}{\sqrt{y - y_0}}$.

La même corrélation se trouve bien vérifiée dans le cas $F = 1$, qui est celui de la ligne minima entre deux figures; car la droite constituant cette ligne doit bien être tout à la fois normale aux deux.

491*. — Cas où ces lignes sont astreintes à ne pas quitter une surface donnée; démonstration, par l'analyse, des propriétés générales des lignes géodésiques.

Ce ne sont pas seulement les deux points extrêmes de la courbe $\int ds$ qui peuvent se trouver assujettis à des conditions regardant en particulier chacun d'eux, mais aussi tous les points intermédiaires (x, y, z). Quelquefois, par exemple, on demandera le maximum ou minimum relatif de l'intégrale $\int F(x, y, z)\,ds$, pour des lignes $\int ds$ non pas quelconques, mais situées sur une surface donnée $f(x, y, z) = 0$ et y reliant un point à une courbe ou deux certaines courbes entre elles. Les déplacements δx, δy, δz de chaque point (x, y, z) se feront donc alors de manière que $f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0$, c'est-à-dire en vérifiant la relation

$$\frac{df}{dx}\,\delta x + \frac{df}{dy}\,\delta y + \frac{df}{dz}\,\delta z = 0; \tag{42}$$

et l'on ne devra annuler séparément, dans les trois derniers termes de (32) réunis en une seule intégrale, que les coefficients totaux de deux des variations δx, δy, δz, après élimination de la troisième au moyen de (42). Comme le terme tout entier où figurent, sous le signe $\int$, ces trois variations sera encore nul, il viendra néanmoins

$$\left\{\begin{aligned} &\left[d\left(F\frac{dx}{ds}\right) - \frac{dF}{dx}\,ds\right]\delta x + \left[d\left(F\frac{dy}{ds}\right) - \frac{dF}{dy}\,ds\right]\delta y \\ &\qquad + \left[d\left(F\frac{dz}{ds}\right) - \frac{dF}{dz}\,ds\right]\delta z = 0, \end{aligned}\right. \tag{43}$$

et la vérification de cette équation pour chaque point (x, y, z), quels qu'y soient les rapports mutuels de δx, δy, δz compatibles avec (42), reviendra évidemment à y écrire la proportionnalité des coefficients de δx, δy, δz aux trois dérivées $\frac{df}{d(x, y, z)}$ figurant dans (42). Ainsi les

équations (33) feront place à la double proportion

$$(44)\quad \frac{d\left(F\dfrac{dx}{ds}\right)-\dfrac{dF}{dx}ds}{\dfrac{df}{dx}}=\frac{d\left(F\dfrac{dy}{ds}\right)-\dfrac{dF}{dy}ds}{\dfrac{df}{dy}}=\frac{d\left(F\dfrac{dz}{ds}\right)-\dfrac{dF}{dz}ds}{\dfrac{df}{dz}},$$

que l'on reconnaît d'ailleurs aisément, en procédant presque comme après (33), ne constituer, grâce à l'équation évidente

$$(45)\qquad \frac{df}{dx}dx+\frac{df}{dy}dy+\frac{df}{dz}dz=0,$$

qu'une seule relation distincte. Si, en effet, l'on multiplie les deux termes du premier rapport (44) par $\frac{1}{F}\frac{dx}{ds}$, ceux du second par $\frac{1}{F}\frac{dy}{ds}$, ceux du troisième par $\frac{1}{F}\frac{dz}{ds}$, puis qu'on ajoute terme à terme, il vient identiquement, vu aussi (34), le résultat $\frac{0}{0}$; ce qui prouve que l'un des trois rapports égaux (44) s'obtiendrait bien par l'addition terme à terme des deux autres après y avoir introduit *haut et bas* les facteurs indiqués.

Ainsi l'on pourra extraire de (44) l'équation différentielle, en x et y par exemple, de la courbe cherchée sur la surface $f(x, y, z)=0$. Et les constantes qu'introduira son intégration se détermineront, à moins qu'on ne fixe les points de départ ou d'arrivée, au moyen des conditions (35) ou (41), toujours subsistantes, dont les premières, notamment, exprimeront la normalité de la courbe aux lignes de la surface qui doivent contenir ces extrémités respectives.

L'élimination au second membre de (32), ou dans (43), de la variation, δx ou δy, ou δz, non indépendante pour chaque point (x, y, z), se serait faite encore (p. 256) en opérant comme si l'on cherchait le maximum ou minimum absolu d'une fonction égale à la proposée $\int F(x, y, z)\,ds$ plus la somme des produits de facteurs constants indéterminés par les premiers membres des équations de condition, mises sous la forme $\varphi=0$. Ici les conditions dont il s'agit, en nombre aussi grand que les points (x, y, z), sont toutes exprimées par $f(x, y, z)=0$, où x, y, z se rapportent successivement à tous ces points mobiles qui définissent la courbe considérée ; et, afin de donner à la fonction totale qu'il s'agit de composer la forme d'une intégrale, il y a lieu d'appeler $d\lambda$, plutôt que λ, les facteurs indéterminés, variables comme x, y, z avec le numéro d'ordre σ des points, mais constants en ce sens qu'on ne leur attribue pas de variations δ. Le maximum

ou minimum absolu à chercher sera dès lors celui de la somme $\int F(x, y, z)\,ds + \int f(x, y, z)\,d\lambda$, si, pour simplifier, nous supposons les deux extrémités fixes, afin de n'avoir pas à ajouter encore deux termes comme $\lambda_0 f(x_0, y_0, z_0) + \lambda_1 f(x_1, y_1, z_1)$; et la variation à annuler sera

$$(46) \qquad \delta\int F(x, y, z)\,ds + \int\left(\frac{df}{dx}\delta x + \frac{df}{dy}\delta y + \frac{df}{dz}\delta z\right)d\lambda,$$

c'est-à-dire le second membre de (32), diminué de ses termes en δx_0, δy_0, δz_0, δx_1, δy_1, δz_1, que l'on fait nuls, mais accru de la seconde intégrale (46), à trois termes sous le signe $\int$. L'annulation, sous ce signe, des trois coefficients totaux de δx, δy, δz, donnera donc les trois équations indéfinies

$$(47) \qquad \begin{cases} d\left(F\dfrac{dx}{ds}\right) - \dfrac{dF}{dx}ds - \dfrac{df}{dx}d\lambda = 0, \\ d\left(F\dfrac{dy}{ds}\right) - \dfrac{dF}{dy}ds - \dfrac{df}{dy}d\lambda = 0, \\ d\left(F\dfrac{dz}{ds}\right) - \dfrac{dF}{dz}ds - \dfrac{df}{dz}d\lambda = 0; \end{cases}$$

et il suffit, pour en déduire les relations définitives (44), d'y éliminer $d\lambda$, en égalant entre elles les trois valeurs de ce facteur indéterminé qui se tirent respectivement de la première, de la deuxième et de la troisième (47).

Bornons-nous, comme application, au cas très simple où, la fonction donnée F se réduisant à l'unité, il s'agit de mener sur une surface $f = 0$ la ligne $\int ds$ minima, soit entre deux points, soit d'un point à une courbe, soit entre deux courbes. Alors la double proportion (44) devient celle des différentielles $d\dfrac{dx}{ds}$, $d\dfrac{dy}{ds}$, $d\dfrac{dz}{ds}$, dont les rapports mutuels en chaque point (x, y, z) de la courbe y définissent (t. I, p. 241) la direction de la normale principale, aux dérivées $\dfrac{df}{dx}$, $\dfrac{df}{dy}$, $\dfrac{df}{dz}$ qui y définissent de même la direction de la normale à la surface. Ainsi *la ligne minima menée entre deux points, sur une surface, a partout sa normale principale perpendiculaire à la surface même, ou son plan osculateur normal à celle-ci;* et, d'ailleurs, d'après (35), une telle ligne coupe *normalement* toute courbe qu'elle doit, *sur la surface,* relier par le chemin le plus court à un point ou à une autre courbe donnée. Ainsi se démontrent par le calcul des variations les premières propriétés des *lignes géodésiques* établies géométriquement vers la fin du tome I (pp. 304* et 310*).

Le même calcul des variations conduit avec une aussi grande facilité aux propriétés concernant les *rayons géodésiques* et les *perpendiculaires géodésiques communes* (t. I, pp. 311* et 312*). Il suffit, à cet effet, de remarquer que si l'on tire une *ligne géodésique*, variable, c'est-à-dire mobile à volonté sur la surface, soit à partir d'un point fixe (x_0, y_0, z_0) de celle-ci, soit à partir d'un point (x_0, y_0, z_0) quelconque sur une courbe donnée $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$ de la surface, mais en l'astreignant alors sans cesse à être, au départ, normale à cette courbe, la variation $\delta \int ds$ qu'éprouvera la longueur de cette ligne d'un instant à l'autre, et qui sera calculable dans l'hypothèse $F = 1$ par le second membre de (32) [p. 551*], se réduira au premier terme (trinôme) de ce second membre. En effet, d'une part, l'ensemble des trois derniers termes de (32) y sera nul, élément par élément, car la ligne considérée ne cessera pas d'être géodésique, c'est-à-dire tracée d'après les relations (44) qu'a fournies l'annulation de ces trois derniers termes ; et, d'autre part, la fixité du point (x_0, y_0, z_0), ou la perpendicularité, sur la courbe $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$, de la tangente en (x_0, y_0, z_0) à la ligne géodésique mobile, tangente définie en direction par les cosinus directeurs x'_0, y'_0, z'_0, entraîne la première condition (35) et annule le terme de (32) affecté des variations δx_0, δy_0, δz_0. Il vient donc simplement, en représentant par x'_1, y'_1, z'_1 les cosinus directeurs de la dernière tangente à la ligne géodésique ainsi mobile,

$$\delta \int ds = x'_1 \, \delta x_1 + y'_1 \, \delta y_1 + z'_1 \, \delta z_1. \tag{48}$$

Or cette relation montre que, si la ligne géodésique conserve sa longueur ou a sa variation $\delta \int ds$ nulle, sa seconde extrémité (x_1, y_1, z_1) vérifiera la seconde équation (35), exprimant la constante normalité de sa tangente en ce point (x_1, y_1, z_1) à la trajectoire de celui-ci. Donc *les lignes géodésiques équivalentes émanées, sur une surface, soit d'un même point et dans tous les sens possibles, soit des divers points d'une même courbe quelconque et alors normalement à celle-ci, se terminent à une courbe qui les coupe toutes à angle droit.* On reconnaît bien là les propriétés, découvertes par Gauss, des *cercles géodésiques* et des *parallèles géodésiques*.

492*. — Minimum d'une intégrale plus générale que $\int F(x, y, z) ds$; principe de la moindre action.

L'intégrale $\int F(x, y, z) ds$, quand on y suppose les trois coordonnées x, y, z simultanément variables avec continuité, mais d'ailleurs arbitrairement, *depuis un premier système assigné* x_0, y_0, z_0 de va-

leurs *jusqu'à un dernier système, donné aussi*, x_1, y_1, z_1, revient à sommer la suite des valeurs de l'expression

$$F(x, y, z)\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

car s désigne justement une variable auxiliaire définie de proche en proche par la formule même, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, de ses petits accroissements. Or on peut généraliser cette expression, d'abord en y supposant quelconque le nombre des variables $x, y, \ldots$ de la fonction F, puis en définissant la variable auxiliaire par la condition d'avoir sans cesse sa différentielle non de la forme $\sqrt{dx^2 + dy^2 + \ldots}$, mais de la forme plus complexe $\sqrt{\dfrac{a\,dx^2 + b\,dy^2 + \ldots}{2f(x, y, \ldots)}}$ où a, b, ... sont des coefficients positifs constants, et $f(x, y, \ldots)$ une fonction également positive, du moins dans les intervalles où se trouveront compris $x, y, \ldots$. Alors appelons t, au lieu de s, la variable auxiliaire, *à différentielle essentiellement positive*, ainsi définie par l'équation

$$2f(x, y, \ldots)\,dt^2 = a\,dx^2 + b\,dy^2 + \ldots; \tag{49}$$

et l'intégrale dont nous voulons nous occuper, plus générale que

$$\int F(x, y, z)\,ds,$$

sera

$$\int F(x, y, \ldots)\,dt. \tag{50}$$

Elle admettra un minimum, si nous supposons le facteur $F(x, y, \ldots)$ *positif* comme dt, et sensiblement différent de zéro au moins dans d'assez grandes régions de l'étendue où évolueront $x, y, \ldots$; car, de quelque manière que $x, y, \ldots$ varient simultanément, en allant des valeurs *initiales données* x_0, y_0, ... aux valeurs *finales*, aussi *données*, x_1, y_1, ..., la somme des éléments ne pourra évidemment pas s'abaisser jusqu'à la limite zéro, tandis qu'elle grandira sans mesure quand $x, y, \ldots$ s'écarteront beaucoup, en quelque sens que ce soit, des intervalles respectifs compris entre x_0 et x_1, y_0 et y_1, ... Il y a donc lieu de chercher comment ces variables $x, y, \ldots$ devront changer en fonction de l'une d'elles, ou plutôt en fonction de la variable auxiliaire t, pour que la somme (50) soit le plus faible possible.

Supposant ce mode de variation réalisé, nous imaginerons qu'on y apporte de petits changements arbitraires, ou que chacun des systèmes successifs de valeurs par lesquels y passent les variables x, y, ..., éprouve des modifications élémentaires quelconques δx, δy, ...; et nous aurons à écrire que ces changements ne produiront sur l'intégrale (50) qu'une altération totale du second ordre de peti-

tesse. Dans chaque élément $F(x, y, \ldots)\,dt$, le facteur F deviendra $F + \delta F$ ou

$$F + \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \ldots.$$

Quant au facteur dt, il croîtra de la quantité $\delta\,dt$ qui se déduit de (49) en y substituant de même, à chaque système $x, y, \ldots$ de valeurs des variables arbitraires, les nouvelles valeurs $x + \delta x$, $y + \delta y$, ... et, par suite, aux accroissements $dx, dy, \ldots$ de ces variables entre deux systèmes consécutifs, les nouveaux accroissements

$$dx + d\,\delta x, \quad dy + d\,\delta y, \quad \ldots.$$

La variation du premier membre de (49), où dt^2 devient

$$(dt + \delta\,dt)^2 = dt^2 + 2\,dt\,\delta\,dt,$$

est ainsi, évidemment,

$$\left\{\begin{aligned} &2(f + \delta f)(dt^2 + 2\,dt\,\delta\,dt) - 2f\,dt^2 \\ &\quad = 4f\,dt\,\delta\,dt + 2\,dt^2\left(\frac{df}{dx}\delta x + \frac{df}{dy}\delta y + \ldots\right); \end{aligned}\right.$$

et si on l'égale à la variation analogue du second membre de (49), savoir, à $2a\,dx\,d\,\delta x + 2b\,dy\,d\,\delta y + \ldots$, il vient, en isolant finalement $\delta\,dt$,

$$(51)\quad \delta\,dt = -\frac{dt}{2f}\left(\frac{df}{dx}\delta x + \frac{df}{dy}\delta y + \ldots\right) + \frac{a}{2f}\frac{dx}{dt}d\,\delta x + \frac{b}{2f}\frac{dy}{dt}d\,\delta y + \ldots.$$

Donc, chaque élément $F\,dt$, dans (50), variant de

$$dt\,\delta F + F\,\delta\,dt = dt\left(\frac{dF}{dx}\delta x + \ldots\right) + F\,\delta\,dt,$$

la variation tout entière de l'intégrale sera, après substitution à $\delta\,dt$ de sa valeur (51),

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\left[\left(\frac{dF}{dx} - \frac{F}{2f}\frac{df}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dF}{dy} - \frac{F}{2f}\frac{df}{dy}\right)\delta y + \ldots\right]dt \\ &\quad + \int\frac{aF}{2f}\frac{dx}{dt}d\,\delta x + \int\frac{bF}{2f}\frac{dy}{dt}d\,\delta y + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Il ne reste plus qu'à y intégrer par parties les derniers termes, affectés de $d\,\delta x$, $d\,\delta y$, ..., afin d'en éliminer ces différentielles (non arbitraires) de variations. Nous aurons, en indiquant toujours par les indices 0, 1 les quantités prises respectivement aux deux limites infé-

rieure et supérieure,

$$(53) \left\{ \begin{aligned} \delta \int F(x, y, \ldots)\, dt = & \left[\frac{F}{2f} \left(a \frac{dx}{dt} \delta x + b \frac{dy}{dt} \delta y + \ldots \right) \right]_0^1 \\ & - \int \left[a\, d\left(\frac{F}{2f} \frac{dx}{dt} \right) - \left(\frac{dF}{dx} - \frac{F}{2f} \frac{df}{dx} \right) dt \right] \delta x \\ & - \int \left[b\, d\left(\frac{F}{2f} \frac{dy}{dt} \right) - \left(\frac{dF}{dy} - \frac{F}{2f} \frac{df}{dy} \right) dt \right] \delta y - \ldots \end{aligned} \right.$$

Le terme aux limites disparaît à cause de la *fixité* des valeurs extrêmes x_0, y_0, ... et x_1, y_1, ..., qui revient à y faire $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, ...; et les conditions du minimum prévu se réduisent à annuler, sous les signes $\int$ du second membre de (53), les coefficients totaux de δx, δy, ... Les formules cherchées reliant x, y, ... à t seront donc, après division par dt, les équations différentielles du second ordre simultanées

$$(54) \left\{ \begin{aligned} & a \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{2f} \frac{dx}{dt} \right) = \frac{dF}{dx} - \frac{F}{2f} \frac{df}{dx}, \\ & b \frac{d}{dt} \left(\frac{F}{2f} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{dF}{dy} - \frac{F}{2f} \frac{df}{dy}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

Elles se simplifient, non seulement quand on prend

$$2f = 1, \qquad a = b = \ldots = 1$$

et, par suite, $dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \ldots}$, ce qui (sauf le changement de s en t et le nombre actuellement quelconque des variables $x, y, \ldots$) les réduit à la forme déjà obtenue (33) [p. 551*], mais, encore, lorsqu'on pose $f(x, y, \ldots) = F(x, y, \ldots)$, ce qui les change en

$$(55) \qquad a \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dF}{dx}, \qquad b \frac{d^2 F}{dt^2} = \frac{dF}{dy}, \qquad \ldots.$$

Alors l'intégrale (50) rendue minimum est, d'après la valeur de $f(x, y, \ldots)$ ou de $F(x, y, \ldots)$ déduite de (49),

$$(56) \qquad \int F(x, y, \ldots)\, dt = \frac{1}{2} \int \left(a \frac{dx^2}{dt} + b \frac{dy^2}{dt} + \ldots \right).$$

Supposons que x, y, ... y désignent les coordonnées respectives, x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', ..., des divers points d'un système matériel; que, de plus, on ait pris les masses mêmes m, m', m'', ... de ces points pour les coefficients a, b, ..., lesquels seront dès lors, respectivement, les trois premiers, m, les trois suivants, m', etc.,

enfin, que la variable auxiliaire t soit le temps, à éléments successifs dt liés aux éléments de chemin

$$(57)\quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad ds' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}, \quad ds'' = \ldots, \quad \ldots$$

parcourus durant leur écoulement, par une *équation* dite *de conservation des forces vives ou de l'énergie,* de la forme

$$(58)\qquad \frac{m}{2}\frac{ds^2}{dt^2} + \frac{m'}{2}\frac{ds'^2}{dt^2} + \frac{m''}{2}\frac{ds''^2}{dt^2} + \ldots = \mathrm{F}(x, y, \ldots)$$

et, dès lors, identique à $2f(x, y, \ldots)\,dt^2 = m\,ds^2 + m'ds'^2 + \ldots$ ou à (49). On voit que le double de (56), savoir,

$$\int\left(m\frac{ds^2}{dt} + m'\frac{ds'^2}{dt} + \ldots\right),$$

ou

$$(59)\qquad \int\left(m\frac{ds}{dt}ds + m'\frac{ds'}{dt}ds + m''\frac{ds''}{dt}ds + \ldots\right),$$

sera minimum si le mouvement des masses m, m', m'', ..., entre les situations initiales *données*

$$(x_0, y_0, z_0), \quad (x'_0, y'_0, z'_0), \quad (x''_0, y''_0, z''_0), \quad \ldots$$

et les situations finales, *assignées* également,

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x'_1, y'_1, z'_1), \quad (x''_1, y''_1, z''_1), \quad \ldots,$$

est régi par les équations (55), devenues, sous une forme plus condensée,

$$(60)\quad m\frac{d^2(x, y, z)}{dt^2} = \frac{d\mathrm{F}}{d(x, y, z)}, \quad m'\frac{d^2(x', y', z')}{dt^2} = \frac{d\mathrm{F}}{d(x', y', z')}, \quad \ldots.$$

Or il se trouve que ces équations (60) sont précisément celles du mouvement effectif de tout système matériel soumis aux seules actions mutuelles de ses divers *points,* la fonction F y désignant la demi-force vive totale dans chaque situation, conformément au principe physique de la conservation de l'énergie. On peut les déduire justement de ce principe, combiné avec une autre loi physique capitale, d'après laquelle les *accélérations,* ou dérivées secondes des coordonnées x, y, z, x', y', ... par rapport au temps t, sont fonction uniquement de x, y, z, x', y', ... [1].

---

[1] *Voir,* par exemple, les seconde et troisième de mes *Leçons synthétiques de Mécanique générale* (pp. 12 et 23).

Cette dernière loi revient donc à admettre que la nature rend minima l'intégrale (59) dans tout passage d'une situation du système à une autre, puisque l'hypothèse du minimum implique également les véritables équations (60) du mouvement. On appelle *action* dépensée, lors d'un tel passage, l'expression même (59), *somme des produits des masses déplacées* m, m', m'', ... *par leurs déplacements élémentaires* ds, ds', ds'', ... *et par les vitesses* $\frac{ds}{dt}$, $\frac{ds'}{dt}$, $\frac{ds''}{dt}$, ... *avec lesquelles ces déplacements s'opèrent*. Aussi la loi physique en vertu de laquelle l'intégrale (59) est ainsi rendue minimum a-t-elle reçu le nom de *Principe de la moindre action*.

Vers le milieu du XVIII[e] siècle, Maupertuis, puis Euler et Lagrange l'ont mis en vue, savoir Maupertuis et Euler dans des cas particuliers, Lagrange d'une manière générale. Il constitue l'application, au problème des changements de situation des systèmes matériels, de cette loi suprême *d'épargne* (t. I, p. 170), encore inconnue dans son énoncé complet, dont le principe de l'économie du temps, posé par Fermat pour la théorie de la lumière, fournit une autre application, savoir, celle qui concerne les chemins suivant lesquels se fait (du moins en quantité sensible), entre deux points donnés, la communication successive des petits mouvements émanés d'une source lumineuse. Cette seconde application est parfaitement distincte de la précédente; car on n'y considère pas des mouvements *simultanés* pour l'ensemble d'un système, mais, au contraire, des mouvements qui atteignent *successivement* diverses de ses parties, ou qui, à chaque instant, présentent en ses différents points toutes les différences possibles de phase.

497*. — **Sur des cas où, pour distinguer entre un minimum, un maximum et l'absence tant de l'un que de l'autre, il convient d'attribuer, aux variations, des valeurs sensibles, au lieu de valeurs infiniment petites; application à l'intégrale $\int F\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds$, prise entre deux points fixes.**

Dans les applications que nous avons faites jusqu'ici du calcul des variations, la nature de la question indiquait *a priori* l'existence d'un maximum ou d'un minimum; en sorte qu'il nous suffisait, pour déterminer ce maximum ou ce minimum, d'appliquer le principe de Fermat revenant à annuler, dans la variation de l'intégrale, l'ensemble des termes du premier ordre de petitesse. Nous pouvions donc négliger

ceux d'ordre supérieur. Il n'en sera plus toujours ainsi; et il y aura lieu, alors, d'évaluer ces derniers termes, principalement ceux du second ordre dont dépend en général le signe, toujours positif dans le cas du minimum, toujours négatif dans le cas du maximum, changeant dans les autres cas, des petites variations effectives de l'intégrale à partir de sa valeur déterminée par le principe de Fermat.

Quand cette intégrale, de la forme $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ par exemple (avec a et b constants), est assez simple, il peut y avoir avantage à supposer quelconque et non plus infiniment petite la *variation indépendante,* que nous appellerons alors Δy, éprouvée par chaque valeur de la fonction y de x, variation qui sera, comme y, une fonction finie de x, et à former dans cette hypothèse l'expression exacte ou complète, $\int_a^b \left[f\left(x, y + \Delta y, y' + \frac{d\Delta y}{dx}\right) - f(x, y, y')\right] dx$, de la variation correspondante $\Delta \int_a^b f(x, y, y')\,dx$ de l'intégrale. En y développant, s'il est nécessaire, la fonction sous le signe $\int$ suivant les puissances de Δy et de $\frac{d\Delta y}{dx}$, mais surtout en tenant compte de la forme imposée à y par l'annulation identique de l'ensemble des termes du premier degré, on pourra parfois, très facilement, mettre en évidence le signe de la variation de l'intégrale et reconnaître ainsi la nature du résultat obtenu.

Prenons pour exemple toute somme relative aux divers arcs infiniment petits ds d'une courbe, et dont les éléments soient les produits $\mathrm{F}\,ds$ de ces arcs respectifs ds par une fonction donnée quelconque F *de leur direction,* fonction qu'on peut, en y introduisant comme variables les cosinus directeurs de ds, dérivées des coordonnées rectangulaires x, y, z de la courbe par rapport à l'arc s, écrire $\mathrm{F}\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$. Supposons d'ailleurs fixes ou connues les deux extrémités de la courbe, et, choisissant pour axe des x la droite qui les joint, adoptons l'abscisse x comme variable indépendante; ce qui nous donnera, dans le problème, deux fonctions y et z, de x, à variations arbitraires entre deux limites constantes a et b, mais nulles à ces limites mêmes. Chaque arc ds devenant

$$\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx,$$

l'élément $\mathrm{F}\,ds$ prendra la forme $\varphi(y', z')\,dx$, où φ sera une fonction

connue ; et l'on devra ainsi considérer l'intégrale

$$(63) \qquad \int_a^b \varphi(y', z')\, dx.$$

Comme les dérivées y', z' y auront pour variations *infiniment petites* respectives $\frac{d\delta y}{dx}$ et $\frac{d\delta z}{dx}$, la propre variation, infiniment petite aussi, de cette intégrale, sera évidemment $\int_{x=a}^{x=b} \frac{d\varphi}{dy'}\, d\delta y + \int_{x=a}^{x=b} \frac{d\varphi}{dz'}\, d\delta z$, ou bien, en intégrant par parties et observant que δy, δz s'annulent aux deux limites,

$$(64) \qquad -\int_{x=a}^{x=b} \left(d\frac{d\varphi}{dy'}\right)\delta y - \int_{x=a}^{x=b} \left(d\frac{d\varphi}{dz'}\right)\delta z.$$

On voit que son annulation identique donne comme équations indéfinies de maximum ou de minimum, $d\frac{d\varphi}{dy'} = 0$, $d\frac{d\varphi}{dz'} = 0$, c'est-à-dire, après une intégration immédiate qui introduit deux constantes arbitraires c et c', $\frac{d\varphi(y', z')}{dy'} = c$, $\frac{d\varphi(y', z')}{dz'} = c'$. Ce sont deux équations finies entre y' et z', de sorte que, résolues par rapport à y' et à z', elles impliquent pour y' et pour z' deux valeurs constantes C, C′, évidemment arbitraires comme c, c'. Donc y, z seront deux fonctions linéaires de x, et la courbe propre à rendre maximum ou minimum l'intégrale proposée (63) se réduira à une droite, savoir, à l'axe des x, puisqu'elle devra le joindre pour les deux valeurs a, b de l'abscisse.

Ainsi les deux fonctions y, z de x à partir desquelles on veut maintenant considérer des variations *finies* arbitraires Δy, Δz, sont $y = 0$, $z = 0$; d'où il suit que, sur la *courbe déformée*, à laquelle se rapporteront ces variations, les ordonnées dans les sens des y et des z auront les valeurs Δy, Δz et, leurs dérivées premières en x, les valeurs $\frac{d\Delta y}{dx}$, $\frac{d\Delta z}{dx}$.

La variation finie de l'intégrale (63) sera donc

$$(65) \qquad \Delta \int_a^b \varphi(y', z')\, dx = \int_a^b \left[\varphi\left(\frac{d\,\Delta y}{dx}, \frac{d\,\Delta z}{dx}\right) - \varphi(0, 0)\right] dx.$$

On voit que tous ses éléments, du moins en supposant $\frac{d\Delta y}{dx}$, $\frac{d\Delta z}{dx}$ assez peu différents de zéro, seront essentiellement positifs, si la fonction φ est minimum pour les valeurs 0, 0 de ses deux variables,

essentiellement négatifs, si, au contraire, $\varphi(0, 0)$ est un maximum. Donc la droite $y = 0$, $z = 0$ rendra l'intégrale (63) minima dans le premier cas et maxima dans le second.

Reste le cas ordinaire, plus complexe, où $\varphi(0, 0)$ n'est ni un maximum, ni un minimum. Alors attribuons d'assez petites valeurs absolues aux quantités $\frac{d\Delta y}{dx}$, $\frac{d\Delta z}{dx}$; et la fonction sous le signe $\int$, dans le second membre de (65), prendra très sensiblement, d'après la série de Mac Laurin, la forme

$$A\frac{d\,\Delta y}{dx} + B\frac{d\,\Delta z}{dx} + C\left(\frac{d\,\Delta y}{dx}\right)^2 + 2D\frac{d\,\Delta y}{dx}\frac{d\,\Delta z}{dx} + E\left(\frac{d\,\Delta z}{dx}\right)^2.$$

Les deux premiers termes de cette expression ne donneront rien dans le second membre de (65); car les intégrales auxquelles ils conduisent, $A\int_{x=a}^{x=b} d\Delta y$, $B\int_{x=a}^{x=b} d\Delta z$, ou $A\left(\Delta y\right)_{x=a}^{x=b}$, $B\left(\Delta z\right)_{x=a}^{x=b}$, s'annulent comme les valeurs mêmes de Δy, Δz aux deux limites. Ainsi, la formule (65) deviendra

$$(66)\quad \Delta\int_a^b \varphi(y', z')\,dx = \int_a^b \left[C\left(\frac{d\,\Delta y}{dx}\right)^2 + 2D\frac{d\,\Delta y}{dx}\frac{d\,\Delta z}{dx} + E\left(\frac{d\,\Delta z}{dx}\right)^2\right]dx.$$

Alors, si le trinôme homogène et du second degré placé sous le signe $\int$ est ou essentiellement positif, ou essentiellement négatif, il en sera de même du changement (66) éprouvé par l'intégrale proposée (63) dans le passage de la droite $y = 0$, $z = 0$ à la courbe de forme quelconque ayant les ordonnées Δy, Δz suivant les y et les z; la valeur de (63), $\varphi(0, 0)(b - a)$, relative à la ligne droite, représentera donc respectivement ou un minimum, ou un maximum. Si, au contraire, ce trinôme est susceptible de prendre des signes divers suivant les valeurs données au rapport de ses deux variables $\frac{d\Delta y}{dx}$, $\frac{d\Delta z}{dx}$, comme il arrivera quand le carré D^2 de son demi-coefficient moyen surpassera le produit CE de ses deux coefficients extrêmes, la ligne droite $y = 0$, $z = 0$ ne rendra l'intégrale ni minimum, ni maximum. En effet, il suffira d'établir entre Δy et Δz, variations arbitraires dans l'intervalle des limites, un rapport constant, qui sera, par suite, celui même de $\frac{d\Delta y}{dx}$ à $\frac{d\Delta z}{dx}$, pour rendre, à volonté, le trinôme et, par suite, le second membre de (66), dans tous ses éléments, ou positif, ou négatif; d'où il suit bien que l'intégrale (63) tantôt croîtra, et tantôt

décroîtra, dans le passage de la droite $y=0$, $z=0$ aux courbes voisines.

Le cas le plus simple est celui où l'expression proposée $\int F\,ds$ se réduit à la longueur même $\int ds$ de la courbe et où l'on a, par conséquent, $\varphi(y', z') = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$. On voit qu'alors la fonction sous le signe $\int$, au second membre de (65), est essentiellement positive. La droite fournit donc non seulement un minimum, mais même la valeur la plus petite possible qui existe pour l'intégrale $\int ds$, comme il était évident.

498*. — **Application de la même méthode à des problèmes de maximum ou de minimum relatif; propriétés de minimum dont jouit la forme de l'onde solitaire.**

La même méthode pour trouver et distinguer les maxima ou les minima des intégrales s'applique aisément à certains problèmes de maximum ou minimum relatif, à ceu notamment d'intégrales de la forme $\int_a^b \varphi(y, y')\,dx$, quand la fonction y de x dont elles dépendent n'est arbitraire entre les deux limites a, b qu'avec la restriction de faire acquérir une valeur constante donnée K à une seconde intégrale $\int_a^b \psi(y)\,dx$, sous le signe $\int$ de laquelle figure comme facteur de dx une fonction $\psi(y)$ que l'on sait devoir être constamment de même signe (positive par exemple) depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$.

Alors, en appelant u l'expression $\int_a^x \psi(y)\,dx$, croissante de zéro à K lorsque x grandit de a à b, les deux quantités u, x peuvent évidemment se suppléer dans le rôle de variable indépendante; car, pour chaque fonction y à considérer, ces quantités x et u sont liées de manière qu'une seule valeur de l'une quelconque des deux corresponde à chaque valeur de l'autre. De plus, la condition spéciale distinguant les fonctions y à considérer, de celles qu'on veut exclure, sera que u, partie de la valeur zéro pour $x=a$, atteigne chez toutes la valeur unique K à l'instant où x deviendra b; de sorte que le choix de u comme variable de la fonction y et comme variable d'intégration aura pour effet de transformer la condition $\int_a^b \psi(y)dx = \text{K}$ en une simple constante de la nouvelle limite supérieure K, et de changer, par conséquent, le problème de maximum ou minimum relatif en un problème de maximum ou minimum absolu.

Comme l'équation de transformation $u = \int_a^x \psi(y)\,dx$ donne identiquement $du = \psi(y)\,dx$ $\left[\text{d'où } \frac{d}{dx} = \psi(y)\frac{d}{du}\right]$, l'intégrale proposée $\int_a^b \varphi(y, y')\,dx$ deviendra

$$(67) \qquad \int_0^{K} \varphi\left[y, \psi(y)\frac{dy}{du}\right]\frac{du}{\psi(y)};$$

et c'est dans celle-ci que l'on aura à faire croître y, pour chaque valeur de u, d'une variation Δy fonction arbitraire de u, sauf aux limites o et K, où l'on aura $\Delta y = 0$ s'il est entendu que la fonction y s'y trouve donnée.

Soit, comme exemple, l'intégrale, où c désigne l'inverse du cube d'une certaine longueur constante,

$$(68) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}(y'^2 - cy^3)\,dx,$$

intégrale prise, ainsi qu'on le voit, pour toute la suite des points (x, y) d'une courbe infinie $y = f(x)$ asymptote des deux côtés à l'axe des x, l'ordonnée y, nulle aux deux limites avec toutes ses dérivées, devant d'ailleurs satisfaire à la condition

$$(69) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} y^2\,dx = \text{K}.$$

La constante c peut être supposée positive ; car, si elle était négative, un simple changement du sens de l'axe des y réduirait la fonction placée sous le signe $\int$ de (68), alors de la forme $y'^2 + cy^3$, à $y'^2 - cy^3$, sans rien changer à (69).

Cela posé, on aura ici $\varphi(y, y') = y'^2 - cy^3$, $\psi(y) = y^2$ et l'expression (67) sera $\int_0^{K}\left(y^2\frac{dy^2}{du^2} - cy\right)du$ ou $\int_0^{K}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{d.y^2}{du}\right)^2 - cy\right]du$. Appelons $\Delta.y^2$ la variation $2y\,\Delta y + (\Delta y)^2$ qu'éprouvera y^2 quand, pour chaque valeur de u, y croîtra de Δy; et, vu que, par suite, la variation de $\left(\frac{d.y^2}{du}\right)^2$ sera

$$2\frac{d.y^2}{du}\frac{d\Delta.y^2}{du} + \left(\frac{d\Delta.y^2}{du}\right)^2 \quad \text{ou} \quad 4y\frac{dy}{du}\frac{d\Delta.y^2}{du} + \left(\frac{d\Delta.y^2}{du}\right)^2,$$

nous aurons, pour celle de l'intégrale proposée,

$$(70)\qquad \int_{u=0}^{u=K} y\frac{dy}{du}\,d\Delta.y^2 - \int_0^K c(\Delta y)\,du + \int_0^K \frac{1}{4}\left(\frac{d\Delta.y^2}{du}\right)^2 du.$$

Intégrons enfin par parties le premier terme, en observant que la partie intégrée, $y\frac{dy}{du}\Delta.y^2$, ou $\left(2+\frac{\Delta y}{y}\right)y^2\frac{dy}{du}\Delta y = \left(2+\frac{\Delta y}{y}\right)\frac{dy}{dx}\Delta y$, tend vers zéro aux deux limites $x=\pm\infty$, à cause de ses deux facteurs évanouissants $\frac{dy}{dx}$, Δy, tandis que le troisième $2+\frac{\Delta y}{y}$ est fini; et si nous remplaçons, sous le nouveau signe $\int$, $\Delta.y^2$ par $2y\,\Delta y + (\Delta y)^2$, nous trouverons, comme expression définitive de la variation cherchée,

$$(71)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta\int_0^K \left[\frac{1}{4}\left(\frac{d.y^2}{du}\right)^2 - cy\right]du \\ &\qquad = -\int_0^K \left[2y\frac{d}{du}\left(y\frac{dy}{du}\right) + c\right](\Delta y)\,du \\ &\qquad\quad + \int_0^K \left[-y\frac{d}{du}\left(y\frac{dy}{du}\right)\frac{(\Delta y)^2}{y} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\Delta.y^2}{du}\right)^2\right]du. \end{aligned}\right.$$

Le coefficient de Δy dans le premier terme du second membre devant être nul pour la courbe demandée, l'équation différentielle de celle-ci sera, en isolant c et divisant par 2,

$$(72)\qquad y\frac{d}{du}\left(y\frac{dy}{du}\right) = -\frac{c}{2};$$

après quoi la formule (71), si l'on remplace, dans son dernier terme, l'expression $-y\frac{d}{du}\left(y\frac{dy}{du}\right)$ par sa valeur tirée de (72), deviendra simplement

$$(73)\qquad \Delta\int_0^K \left[\frac{1}{4}\left(\frac{d.y^2}{du}\right)^2 - cy\right]du = \int_0^K \left[c\frac{(\Delta y)^2}{2y} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\Delta.y^2}{du}\right)^2\right]du.$$

Il suffira donc que l'équation (72) nous conduise à une expression de y partout positive, pour que cette formule (73) représente une variation essentiellement positive elle-même, ou pour que la courbe obtenue rende l'intégrale proposée (68) minimum.

Or c'est justement ce qui arrive. L'équation (72) s'intègre de suite en introduisant comme variable indépendante, au lieu de la quantité $u=\int_{-\infty}^x y^2\,dx$, l'aire $\sigma=\int_{-\infty}^x y\,dx$, comprise entre la courbe et son

asymptote depuis l'abscisse $x=-\infty$ jusqu'à l'abscisse quelconque x, aire qui, nulle avec y et u pour $x=-\infty$, varie sans cesse, comme u, dans un même sens quand x croît, du moins tant que l'ordonnée y ne s'est pas annulée de nouveau, et qui peut bien ainsi, jusqu'à production d'une pareille circonstance, se substituer à u ou à x comme variable indépendante. Alors, des deux formules évidentes $du=y^2\,dx$, $d\sigma=y\,dx$, il résulte $\frac{y}{du}=\frac{1}{y\,dx}=\frac{1}{d\sigma}$; et l'équation (72) se réduit à

$$(74)\qquad \frac{d^2y}{d\sigma^2}=-\frac{c}{2}.$$

Intégrée une première fois, elle donne $\frac{dy}{d\sigma}=\frac{c}{2}(\text{A}-\sigma)$, en appelant A une constante arbitraire, qui devra être positive pour que y et σ, d'abord nuls, prennent même signe (comme l'indique l'expression $\int_{-\infty}^{x} y\,dx$ de σ) quand x croîtra à partir de $-\infty$. Par une deuxième intégration, encore effectuée en partant de l'abscisse $x=-\infty$ où s'annulent à la fois y et σ, il viendra

$$(75)\qquad y=\frac{c}{4}(2\text{A}\sigma-\sigma^2)=\frac{c}{4}[\text{A}^2-(\sigma-\text{A})^2].$$

Comme l'ordonnée y doit, aux deux limites, se réduire à zéro, cette formule (75) montre que toutes les valeurs effectives de σ se trouveront comprises entre les deux seules, $\sigma=0$ et $\sigma=2\text{A}$, qui annulent l'expression (75) de y, et qui correspondent bien, en effet, aux deux abscisses $\pm\infty$; car la formule $d\sigma=y\,dx$ donne $dx=\frac{d\sigma}{y}$ et montre que $\pm\int dx$ ou $\pm\int\frac{d\sigma}{y}$ devient infinie quand, σ tendant vers l'une des deux valeurs zéro, 2A, l'ordonnée y devient de l'ordre de petitesse même de σ ou de $2\text{A}-\sigma$. Or, entre les limites $\sigma=0$, $\sigma=2\text{A}$, l'expression (75) de cette ordonnée y est positive, comme on l'avait annoncé après la formule (73). Donc, la courbe représentée par l'équation (75) quand on fait varier σ de zéro à 2A, sera la seule qui puisse, tout en vérifiant la relation (69), rendre l'intégrale (68) maximum ou minimum ; et elle la rend effectivement minimum.

La constante positive arbitraire A devra se déterminer par la condition (69) qui, en y substituant $d\sigma$ à $y\,dx$, devient évidemment

$\int_0^{2A} y\,d\sigma = K$, ou, à cause de l'expression de y donnée par le second membre de (75), $\frac{1}{4}c\left(A\sigma^2 - \frac{1}{3}\sigma^3\right)_0^{2A} = \frac{1}{3}cA^3 = K$. Ainsi, l'on aura

$$(76) \qquad A = \sqrt[3]{\frac{3K}{c}}.$$

Enfin, appelant h la plus grande ordonnée y, qui correspond, d'après le troisième membre de (75), à $\sigma = A$, et dont la valeur est

$$(77) \qquad h = \frac{cA^2}{4},$$

divisons (75) par h, puis comptons les aires σ, non plus à partir de $x = -\infty$, mais à partir de cette ordonnée h elle-même, ou, en d'autres termes, remplaçons $\sigma - A$ par σ dans le troisième membre de (75); et, pour simplifier encore l'équation de la courbe, choisissons une nouvelle unité, d'une longueur telle, que la moitié, A, de l'aire comprise entre la courbe et son asymptote devienne numériquement égale à la plus grande ordonnée h. A cet effet, adoptons comme unité la longueur $\frac{A}{h} = \frac{4}{Ac}$ qui, rendant respectivement la hauteur h et l'aire A $\frac{A}{h}$ fois et $\frac{A^2}{h^2}$ fois plus petites, leur feront acquérir la valeur numérique commune $\frac{h^2}{A}$. Alors, en appelant encore y, σ, h les nouvelles valeurs de l'ordonnée variable, de l'aire limitée par elle, et de la hauteur maxima, l'on aura une équation de la courbe

$$(78) \qquad \frac{y}{h} = 1 - \frac{\sigma^2}{A^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{h^2} \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{1}{h}(h^2 - \sigma^2),$$

identique à celle qui exprime, sous la forme la plus simple possible, le profil longitudinal d'une onde solitaire (p. 55*). Ainsi, le profil d'une telle onde a la propriété de rendre minimum l'intégrale (68), sous la condition (69). C'est justement à cette propriété que l'onde solitaire doit d'être stable dans sa configuration et de se réaliser fréquemment ([1]).

Le même profil jouit encore d'une autre propriété de minimum relatif, mais paraissant beaucoup moins importante.

Il est, parmi toutes les courbes situées en entier d'un même côté de l'axe des x, asymptotes à cet axe aux deux bouts et comprenant

---

([1]) *Voir* mon *Essai sur la théorie des eaux courantes* (p. 402).

enfin une même aire totale donnée $\int_{-\infty}^{\infty} y\,dx = 2\,A'$, celle qui rend minimum l'intégrale

$$(79) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} (y'^2 - cy^3)\,\frac{dx}{y},$$

où c désigne une constante que l'on peut encore supposer positive. En effet, si elle ne l'était pas, on changerait le sens des y positifs; ce qui reviendrait à remplacer l'aire $\int_{-\infty}^{\infty} y\,dx = 2\,A'$ par $-2\,A'$ et l'intégrale (79) par $-\int_{-\infty}^{\infty}\left(y'^2 + cy^3\right)\frac{dx}{y}$, dès lors de la forme voulue (79), au signe près, vu que c s'y trouverait négatif.

Prenons, pour nouvelle variable d'intégration, l'aire $\sigma = \int_{-\infty}^{x} y\,dx$, qui variera sans cesse dans un même sens, de zéro à $2\,A'$, quand x grandira de $-\infty$ à $+\infty$, et qui sera, par conséquent, bien propre à remplacer x. Comme on aura, à cause de la valeur $y\,dx$ de $d\sigma$, $\frac{dx}{y} = \frac{d\sigma}{y^2}$ et $\frac{dy}{dx}$ ou $y' = y\,\frac{dy}{d\sigma}$, l'intégrale (79) deviendra, pour toutes les courbes proposées à ordonnées de sens uniforme et à même aire totale $2\,A'$,

$$(80) \qquad \int_0^{2A'} \left(\frac{dy^2}{d\sigma^2} - cy\right) d\sigma.$$

Or, si, pour chaque valeur de σ, y croît de Δy, le carré $\frac{dy^2}{d\sigma^2}$, devenant $\left(\frac{dy}{d\sigma} + \frac{d\Delta y}{d\sigma}\right)^2$, grandit de $2\,\frac{dy}{d\sigma}\,\frac{d\Delta y}{d\sigma} + \left(\frac{d\Delta y}{d\sigma}\right)^2$. La variation finie de (80) sera donc

$$(81) \qquad \int_{\sigma=0}^{\sigma=2A'} 2\,\frac{dy}{d\sigma}\,d\Delta y - \int_0^{2A'} c(\Delta y)\,d\sigma + \int_0^{2A'} \left(\frac{d\Delta y}{d\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Intégrons le premier terme par parties, en observant que le produit $2\,\frac{dy}{d\sigma}\,\Delta y$, ou $2\,y'\,\frac{\Delta y}{y}$, tend vers zéro aux deux limites $x = \pm\infty$ où s'évanouit le coefficient angulaire y' de la tangente ; et nous aurons enfin

$$(82) \quad \Delta \int_0^{2A'} \left(\frac{dy^2}{d\sigma^2} - cy\right) d\sigma = -\int_0^{2A'} \left(2\,\frac{d^2y}{d\sigma^2} + c\right)(\Delta y)\,d\sigma + \int_0^{2A'} \left(\frac{d\Delta y}{d\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

On voit : 1° d'une part, que l'annulation du coefficient de Δy, sous le signe $\int$ du premier terme du second membre, conduit à poser précisément, comme équation différentielle de la courbe cherchée, la relation indéfinie (74) [p. 571*], qui nous a conduit, en appelant A une constante arbitraire *positive,* à l'équation finie (75) et à des valeurs utilisables de σ comprises entre $\sigma = 0$ et $\sigma = 2A$, c'est-à-dire à la coupe longitudinale d'une onde solitaire ; 2° d'autre part, que la variation de l'intégrale, dès lors réduite au dernier terme de (82), sera essentiellement positive, ou que la courbe représentée par (75) exprimera bien un minimum. Son aire totale étant d'ailleurs $2A$, la détermination de la constante arbitraire A se fera par l'équation $2A = 2A'$, ou $A = A'$. Le problème n'admettra donc de solution que si l'aire donnée $2A'$ se trouve être positive, ou si l'on considère des courbes ayant leurs ordonnées y de même signe que c.

499*. — Intégrales s'étendant, l'une, à tout le volume d'un corps, l'autre, à sa surface, et dont la somme est rendue minima par la fonction qui exprime les températures stationnaires de ce corps dans des conditions données.

Le principe de la moindre action (p. 564*) relatif aux déplacements des systèmes matériels, celui de Fermat sur l'économie du temps dans la propagation de la lumière (t. I, p. 167), la propriété de minimum qui explique la production fréquente de l'onde solitaire le long des canaux (p. 572* ci-dessus), etc., constituent des exemples tendant à montrer que les lois naturelles des phénomènes d'état variable impliquent, en général, la réalisation de certains minima, ou ne sont autre chose que l'expression même des conditions de ces minima. L'observation des phénomènes d'état permanent conduit à une conclusion analogue. Celle-ci est même évidente dans les cas d'équilibre stable d'un système matériel élastique, où il y a une fonction, appelée *énergie potentielle d'élasticité,* aux dépens de laquelle se font, dans le système, les accroissements de mouvement ou de demi-force vive, et dont le minimum correspond justement à la configuration d'équilibre stable ; car tout changement des dimensions du système à partir de cette configuration entraîne une extinction de mouvement. Or il en est encore de même, comme nous allons voir, dans le problème d'un état calorifique permanent, ou des températures stationnaires d'un corps (du moins isotrope) ; en sorte qu'on se trouve bien autorisé à supposer les lois physiques, d'une manière générale, subordonnées à ce *principe suprême d'épargne* entrevu dès l'antiquité,

mais non encore dégagé complètement, et dont nous avons eu plusieurs fois déjà l'occasion de parler (p. 564* et t. I, p. 170).

Pour nous borner en ce moment au cas d'un corps homogène et isotrope dont nous appellerons ϖ le volume et σ la surface, la somme qui s'y trouve rendue minimum par la fonction φ de x, y, z exprimant ses températures permanentes, est celle-ci :

$$(83) \qquad \int_\varpi \left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right) d\varpi + \int_\sigma k^2(\varphi - \varphi_0)^2 \, d\sigma.$$

Nous admettons, d'une part, que ces températures satisfassent, dans tout le volume ϖ, à l'équation aux dérivées partielles

$$(84) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0;$$

d'autre part, qu'elles vérifient en outre, sur chaque élément $d\sigma$ de la surface, dont dn désignera la normale tirée à partir de l'intérieur (comme si l'on voulait la prolonger au dehors) et alors définie en direction par les trois cosinus de ses angles α, β, γ avec les axes, la condition spéciale

$$(85) \quad \frac{d\varphi}{dn} + k^2(\varphi - \varphi_0) = 0, \quad \text{où} \quad \frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{dx}\cos\alpha + \frac{d\varphi}{dy}\cos\beta + \frac{d\varphi}{dz}\cos\gamma,$$

k, φ_0 étant, comme $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, des constantes finies réelles pour chaque élément $d\sigma$ ou des fonctions données de x, y, z aux divers points de la surface. Ces relations sont bien, en effet, les plus générales du problème des températures stationnaires dans un solide isotrope homogène (p. 384*) : la seconde, (85), se simplifie d'ordinaire soit par l'hypothèse $k^2 = \infty$ (entraînant $\varphi = \varphi_0$), quand on donne directement la température $\varphi = \varphi_0$ de l'élément $d\sigma$, soit par l'hypothèse contraire de k^2 infiniment petit $\left(\text{d'où } \frac{d\varphi}{dn} = k^2\varphi_0 = \text{une fonction connue de } x, y, z\right)$, dans le cas *limite* opposé où l'on se donne le flux de chaleur à travers $d\sigma$.

Pour reconnaître que la solution des équations (84), (85) rend bien l'expression (83) minimum, attribuons, dans celle-ci, à la valeur (supposée quelconque) de φ en chaque point (x, y, z), un accroissement fini arbitraire $\Delta\varphi$. L'expression $\frac{d\varphi^2}{dx^2}$, devenue $\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\Delta\varphi}{dx}\right)^2$, aura varié de $2\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\Delta\varphi}{dx} + \left(\frac{d\Delta\varphi}{dx}\right)^2$ ou, identiquement (en transformant le premier terme afin d'en éliminer par l'intégration la dérivée

non arbitraire de $\Delta\varphi$ en x), de

$$2\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}\Delta\varphi\right) - 2\frac{d^2\varphi}{dx^2}\Delta\varphi + \left(\frac{d\Delta\varphi}{dx}\right)^2;$$

et les expressions des carrés $\frac{d\varphi^2}{dy^2}$, $\frac{d\varphi^2}{dz^2}$ auront éprouvé des variations analogues. D'ailleurs, sur chaque élément $d\sigma$ de la surface, le carré $(\varphi - \varphi_0)^2$, devenu de même $(\varphi - \varphi_0 + \Delta\varphi)^2$, aura crû de

$$2(\varphi - \varphi_0)\Delta\varphi + (\Delta\varphi)^2.$$

Donc la variation de la somme (83) sera

$$(86)\quad \begin{cases} 2\int_\varpi \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}\Delta\varphi\right) + \ldots\right] d\varpi - 2\int_\varpi \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \ldots\right)(\Delta\varphi)\, d\varpi \\ \quad + 2\int_\sigma k^2(\varphi - \varphi_0)(\Delta\varphi)\, d\sigma + \int_\varpi \left[\left(\frac{d\Delta\varphi}{dx}\right)^2 + \ldots\right] d\varpi + \int_\sigma k^2(\Delta\varphi)^2\, d\sigma. \end{cases}$$

Le premier terme a chacune de ses trois parties intégrable une fois ou convertible, par les formules (22) du n° 313 (p. 93*), en une intégrale relative à la surface σ; et, en joignant au troisième terme de (86) les résultats ainsi obtenus, dont la somme est $2\int_\sigma \frac{d\varphi}{dn}(\Delta\varphi)\, d\sigma$ d'après la seconde formule (85), il vient enfin, pour la variation exacte cherchée de l'expression (83),

$$(87)\quad \begin{cases} -2\int_\varpi \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)(\Delta\varphi)\, d\varpi + 2\int_\sigma \left[\frac{d\varphi}{dn} + k^2(\varphi - \varphi_0)\right](\Delta\varphi)\, d\sigma \\ \quad + \int_\varpi \left[\left(\frac{d\Delta\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Delta\varphi}{dz}\right)^2\right] d\varpi + \int_\sigma k^2(\Delta\varphi)^2\, d\sigma. \end{cases}$$

Le maximum ou le minimum exigent d'abord, comme on sait, l'annulation, dans les deux premiers termes de (87), linéaires par rapport à $\Delta\varphi$, du coefficient de la variation $\Delta\varphi$, laquelle ne sera pas moins arbitraire sur chaque élément $d\sigma$ de la superficie que dans tout élément intérieur $d\varpi$ d'espace. Or l'on aura, de la sorte, justement les équations (84) et (85), caractéristiques de la fonction φ qui représente les températures stationnaires du corps proposé. Et d'ailleurs la valeur correspondante de la somme (83) sera bien minimum; car les équations (84) et (85) réduiront l'expression (87) de sa variation, comptée à partir de cette valeur, aux deux derniers termes, essentiellement positifs.

500*. — Utilisation de cette propriété de minimum pour démontrer l'existence d'une solution générale du problème des températures stationnaires; autres problèmes, dans lesquels la même méthode atteint un résultat analogue et a, parfois aussi, facilité la mise en équation.

Ayant démontré ainsi l'identité d'un système donné de relations, savoir (84) et (85), aux premières des conditions que vérifie dans les hypothèses ordinaires de continuité le maximum ou le minimum d'une certaine expression, laquelle est ici (83), ou ayant, par suite, ramené au moins en partie, l'un à l'autre, les deux problèmes qui consistent soit à résoudre ces relations (84) et (85), soit à rendre maxima ou minima l'expression (83) dont il s'agit, nous pourrons essayer de nous servir de la considération d'un tel maximum ou minimum pour démontrer l'existence d'une solution générale du système d'équations (84) et (85). En effet, nous avons reconnu, sur la presque totalité des questions de maximum ou de minimum abordées dans ce Cours, que, si le calcul des maxima ou minima est ordinairement difficile et laborieux, du moins leur existence s'offre souvent comme évidente ou presque évidente. Il pourrait donc y avoir, à transformer le problème de la résolution ou de l'intégration d'un système d'équations en une question de maximum ou de minimum, l'avantage de rendre certaine la possibilité d'une solution d'un pareil système. C'est justement ce qui est arrivé (t. I, p. 150*) dans la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre : il nous a été plus facile de former une fonction chez laquelle la nécessité d'un minimum se reconnaissait aisément et dont les minima correspondaient à des diviseurs du second degré, réels et irréductibles, du premier membre d'une équation algébrique donnée, que de constater directement l'existence de ces diviseurs.

Voyons s'il en sera de même ici. Pour démontrer la compatibilité du système (84) et (85), c'est-à-dire l'existence d'une fonction φ qui y satisfasse, nous devrons examiner si la somme (83), où φ désigne toute fonction de x, y, z continue à l'intérieur et à la surface de l'espace ϖ, admet un minimum régi par le principe de Fermat ou de Kepler.

Or, d'une part, cette somme, à éléments essentiellement positifs, ne peut pas, quelle que soit la fonction φ, descendre au-dessous d'une certaine limite. D'autre part, il suffit d'y donner à φ de très fortes valeurs négatives ou positives, distribuées comme on voudra soit partout (y compris la surface σ), soit seulement à l'intérieur, pour rendre extrêmement grandes en valeur absolue, dans des régions $\int d\sigma$

ou $\int d\varpi$ finies, soit les différences $\varphi - \varphi_0$ à la surface, soit les dérivées $\frac{d\varphi}{d(x,y,z)}$ à l'intérieur, et, par conséquent, dans les deux cas, la somme (83). Il y a donc, en quelque sorte, un état de grandeur infranchissable au-dessous duquel ne s'abaisse pas cette somme quand φ se déforme de manière à la faire décroître, et qui, se produisant sans que φ devienne considérable ni à l'intérieur, ni à la surface de l'espace ϖ, constitue un vrai minimum, c'est-à-dire une valeur parfaitement susceptible d'être atteinte, entourée de toutes parts de valeurs plus grandes. Seulement, la fonction φ qui réalise ce minimum jouit-elle partout, quant au mode de variation de ses dérivées premières, de la même continuité que les fonctions voisines φ considérées? Ou, au contraire, est-elle un cas limite *singulier* de celles-ci, qui, en lui donnant naissance, tendraient à perdre et perdraient en effet leur graduelle variation, base indispensable des règles de maximum ou de minimum exposées ici? On ne voit aucune raison de lui supposer de telles discontinuités *singulières;* et alors s'appliquent sans difficulté à cette fonction φ les équations (84) et (85), exprimant l'annulation de toute la partie de la variation (87) qui est de l'ordre des changements Δy des variables correspondantes.

Ainsi, le système (84), (85) d'équations aux dérivées partielles admettra une solution, dont l'unité a d'ailleurs été démontrée plus haut (p. 384*). Mais on voit que la démonstration implique l'hypothèse, dans la fonction réalisant le minimum, d'une continuité au sujet de laquelle pourraient, à la rigueur, subsister quelques doutes. Peut-être cette difficulté est-elle, au fond, inséparable de celle qu'éprouve notre esprit à *construire* nettement les intégrales des équations aux dérivées partielles, surtout quand il n'y a pas de *variable principale* pour en régler et en simplifier, si l'on peut ainsi dire, l'ordonnance. Alors la pluralité des sens suivant lesquels varie la fonction inconnue rend pénible ou même incomplète (sauf, sans doute, à la suite d'une longue et minutieuse analyse) l'intuition simultanée des détails qu'il s'agit de relier ensemble : or cette intuition est l'unique source de notre sentiment intérieur d'évidence et, par suite, de la certitude mathématique.

Il est clair que, sous la même réserve, les raisonnements précédents s'appliqueraient, en remplaçant le volume ϖ par une aire plane et la surface σ par son contour, si la fonction φ devenait indépendante de z ou n'avait à être considérée que dans le plan des xy. Ils s'étendraient aussi à bien des cas de corps non homogènes ni isotropes, parvenus à un état calorifique permanent.

On peut, mais encore avec des restrictions analogues quant à l'hypothèse analytique de variation graduelle pour les fonctions considérées, démontrer de la même manière ([1]) l'existence d'une solution du problème de l'équilibre d'élasticité d'un système solide pesant quelconque, lorsque chaque élément $d\sigma$ de sa surface se trouve sollicité, vers certaines situations données, par des ressorts ayant leur tension fonction linéaire des écarts qui existent, suivant les trois axes, entre cette situation locale de repos et la situation effective. Ce cas très général comprend, *à la limite :* 1° d'une part, celui où la partie considérée $d\sigma$ de surface est fixe grâce à l'attribution, aux coefficients des fonctions linéaires dont il s'agit, de valeurs infinies, entraînant pour les écarts des valeurs nulles, et, 2°, d'autre part, le deuxième cas extrême où la pression extérieure exercée sur $d\sigma$ est donnée, cas où il faut, au contraire, attribuer aux coefficients des valeurs évanouissantes, mais aux écarts des valeurs généralement fort grandes, comme lorsqu'on a posé ci-dessus, dans (85), $k^2 = 0$, mais $k^2\varphi_0 =$ une fonction donnée de x, y, z. L'énergie potentielle totale que rend minimum l'état d'équilibre stable étudié se compose, d'abord, de ses deux parties ordinaires, l'une élastique, l'autre de pesanteur, représentées par deux intégrales s'étendant à tout le volume ϖ, et, en outre, d'une troisième partie, dans le genre du second terme de (83) ou constituée par une intégrale relative à la surface σ, et qui exprime l'énergie potentielle des ressorts sollicitant la superficie.

C'est enfin d'une manière analogue, impliquant toujours les mêmes hypothèses analytiques de continuité, que se démontre (depuis Gauss) l'existence d'une solution du problème général de l'Électrostatique, cas où la fonction minima dans l'état d'équilibre se réduit à une énergie potentielle de forces régies par les lois newtoniennes.

La transformation des questions de Philosophie naturelle en problèmes de minimum présente donc, comme on voit, une réelle utilité, indépendamment de son intéressante signification physique. Lagrange, Navier, etc., s'en sont même servis, une fois sa légitimité établie dans toute une branche d'études, pour appliquer aux divers problèmes que celle-ci comprenait le calcul des variations et poser ainsi, en annulant identiquement les termes du premier ordre de petitesse par rapport aux variations indépendantes, les équations mêmes du problème, tant indéfinies que définies ou relatives aux limites. Dans une question assez

---

([1]) Comme je le fais depuis 1886 dans le Cours de *Mécanique physique* de la Sorbonne.

délicate, où les conditions définies strictement nécessaires ne se montraient pas d'une manière évidente, savoir la théorie de l'équilibre de flexion des plaques, il s'est même trouvé que Kirchhoff a découvert de la sorte (en 1848) les véritables relations aux limites, c'est-à-dire concernant le contour des plaques fléchies. Mais une étude directe un peu attentive de la question a prouvé depuis que ces conditions se posaient naturellement sans le calcul des variations, qui, tout en les indiquant, n'avait pas fait apercevoir leur vraie raison d'être.

FIN DE LA PARTIE COMPLÉMENTAIRE DU TOME II.

14533 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.